全国二十大考研辅导机构指定教材

2013 全国硕士研究生入学统一考试

概率论与数理统计辅导讲义

◎主编 张宇

积累知识，夯实基础

典型例题，精准把脉

掌握方法，规范答题

查漏补缺，提升水平

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

全国二十大考研辅导机构指定教材

2013 全国硕士研究生入学统一考试

概率论与数理统计辅导讲义

◎主编 张宇

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计辅导讲义/张宇主编.—西安：西安交通大学出版社，2012.3

ISBN 978-7-5605-4237-9

Ⅰ.①概… Ⅱ.①张… Ⅲ.①概率论—研究生—自学参考资料 ②数理统计—研究生—自学参考资料 Ⅳ.①021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 040547 号

概率论与数理统计辅导讲义

主　　编：张　宇
责任编辑：杨　璠
出版发行：西安交通大学出版社
地　　址：西安市兴庆南路 10 号(邮编：710049)
电　　话：(029)82668315　82669096(总编办)
　　　　　(029)82668357　82667874(发行部)
印　　刷：保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：10.5
字　　数：249 千字
版　　次：2012 年 5 月第 1 版
印　　次：2012 年 5 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5605-4237-9
定　　价：25.00 元

前　言

本书在前一版的基础上进行了全面的修订，注重培养考生对“概率论与数理统计”中基本概念、基本方法和基本理论进行熟练掌握和灵活运用的能力，并删去一些繁杂例题与习题，语言叙述亦更加规范、严谨、通俗、易懂。

“概率论”是建立在随机事件这个概念基础上的。理解、掌握“概率论”的基本概念及其实际应用，正确分析给定随机试验中的随机事件、随机变量之间的关系，并选择合适的等价表示形式，是学好“概率论”的关键。而“数理统计”则应着重于掌握其统计思想，它是所有不同统计方法的依据。基于学科特点及考研实际情况，我们用较多篇幅讲述“数理统计”的内容及解题方法，目的在于使考生用最少的时间掌握考点与解题方法，达到举一反三、触类旁通的效果。

本书共八章，其中第八章(假设检验)仅数学一要求。每章的结构体例如下：

考研大纲要求　将本章的考研具体要求明确列出来，让同学们有一个清晰的学习目标，同时把握重点，节省时间和精力。也可作为衡量自己学习成果的标准：是否对每一个知识点都能熟练掌握。

考研知识体系　将整章的内容用体系图表现出来，更具层次感。各个知识点之间的逻辑关系一目了然。

考研内容精讲　结合大纲，对数学基本概念、基本定理，重要的数学原理、数学结论深入讲解，对于要点在点评中都有详细分析，值得认真思考。

典型例题精解　数学试题千变万化，但其知识结构却基本相同，题型也相对固定，一般存在相应的解题规律。通过典型例题的讲解，总结、归纳解题思路、方法和技巧，尽量深挖例题内涵。

过关习题精练　切实提高数学的解题能力，莫过于积极主动地亲自做题。编者根据多年的考研教学辅导、命题及阅卷的经验，精心优化设计了适量的习题，难度与考研真题相近。做题时不要先看答案。如果题目确实做不出来，可以再看答案。看明白之后再把题目独立地做一遍。不要以为看明白了就会了，只有自己真正做出来，才算是真正掌握了。

本书在编写过程中，参考了教育部考试中心编写的《考研数学考试大纲》和众多优秀的数学教材和辅导教材，篇幅有限，不一一列出，感谢诸位相关作者的辛勤工作，更感谢同学们，是你们的上进心和拼搏意志触动着我，让我们共同努力，为同学们的美好未来奋勇向前。

由于编者水平有限，疏漏错误之处在所难免，欢迎读者批评指正。

本书答疑地址在我的新浪微博：http://weibo.com/zhangyumaths。

预祝同学们考研成功！

张　宇

2012 年春 第二稿 于北京

目录

第一章　随机事件与概率

◆ 考研大纲要求

1. 本章给出概率论中最基本、最重要的三个概念:事件、概率与独立性.

① 这一章是概率论与数理统计的基础. ② 事件的表述,等价性表示以及事件之间关系的判别是本章重点,难点. ③ 概率计算是本章重点.

计算概率的方法有:概型法(定义法),性质与公式法,分布法,近似估计法. 后两种方法在其他章节中介绍.

2. 考试大纲要求我们:了解样本空间(基本事件空间)的概念;理解随机事件、概率、条件概率、事件独立性与独立重复试验的概念. 掌握事件的关系与运算,概率的基本性质、加法公式、减法公式、乘法公式、全概公式以及贝叶斯公式. 会计算古典概率、几何概率;掌握应用公式、事件独立性进行概率计算以及与 n 重伯努利试验有关的事件的概率计算.

◆ 考研知识体系

- 随机现象—随机试验—随机事件
  - 表达方式
    - 语言叙述
    - 点集—基本事件,样本空间,事件,必然事件,不可能事件
    - 关系
      - 包含、相等、互不相容、对立、完备事件组
      - 相互独立
        - 定义(描述性定义与严格定义)
        - 性质
    - 运算
      - 形式—加(并)、交(积)、减、逆
      - 法则—交换、结合、分配、对偶、吸收、分解
    - 随机变量取值范围
  - 概率
    - 定义—描述性定义,统计定义,古典定义,几何定义,公理化定义
    - 性质
      - 非负,有界,单调不减,有限可加
      - 加法公式,减法公式,求逆公式
    - 条件概率
      - 定义
      - 三公式—乘法公式,全概公式,贝叶斯(Bayes)公式
    - 概型
      - 等可能概型
        - 古典概型
        - 几何概型
      - 独立试验序列概型(n 重伯努利概型)

◆1.1 考研内容精讲

1.1.1 随机试验与随机事件

1. 随机试验与随机事件

称一个试验为随机试验，如果

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 试验所有可能结果是明确可知道的，并且不止一个；

(3) 每一次试验会出现哪一个结果事先不能确定.

【点评】 ① 我们是通过研究随机试验来研究随机现象的，为方便起见，将随机试验简称为试验，并用字母 E 或 $E_1, E_2, \cdots$ 表示.

② 在一次试验中可能出现，也可能不出现的结果称为随机事件，简称为事件，并用大写字母 A, B, C 等表示，为讨论需要，将每次试验一定发生的事件称为必然事件，记为 Ω. 每次试验一定不发生的事件称为不可能事件，记为 $\varnothing$.

③ 随机试验每一最简单、最基本的结果称为基本事件或样本点，记为 ω. 每次试验能且只能发生一个基本事件. 基本事件（或样本点）的全体称为基本事件空间（或样本空间），记为 Ω，即 $\Omega = \{w\}$，随机事件 A 总是由若干个基本事件组成，即 A 是 Ω 的子集，$A \subset \Omega$. 事件 A 发生等价于构成 A 的基本事件有一个发生.

④ 在不少情况下，我们不能确切知道某一随机试验的全部可能结果，但可以知道它不超出某个范围. 这时，也可以用这个范围来作为该试验的全部可能结果. 例如我们需要记录某个城市一天的交通事故数量，则试验结果将是非负数 x. 我们无法确定 x 的可能取值的确切范围，但可以把这范围取为 $[0, \infty)$，它总能包含一切可能的试验结果，尽管我们明知，某些结果，如 $x > 10000$，是不会出现的，我们甚至可以把这范围取为 $(-\infty, \infty)$ 也无妨. 这里就有了一定的数学抽象，它可以带来很大的方便.

2. 随机事件的关系与运算

如果事件 A 发生必导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A（或 A 被 B 包含），记为 $A \subset B$. 如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与 B **相等**，记为 $A = B$. A 与 B 相等，事实上也就是说，A 与 B 由完全同样的一些试验结果构成，它不过是同一件事表面上看来不同的两个说法而已.

若两事件 A, B 不能在同一次试验中都发生（但可以都不发生），则称它们是**互斥**的，如果一些事件中任意两个都互斥，则称这些事件是两两互斥的，或简称互斥的，互斥事件的一个重要情况是“对立事件”.

称“事件 A 与 B 至少有一个发生”的事件为事件 A 与 B 的**并(或和)**，记为 $A \cup B$，称“有限个（或可列个）事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n \cdots$ 至少有一个发生”的事件为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n \cdots$ 的并（或和），记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$；称“事件 A 与 B 同时发生”的事件为事件 A 与 B 的**交(或积)**，记为 $A \cap B$ 或 AB，称“有限个（或可列个）事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生”的事件为事件 $A_1, \cdots, A_n \cdots$ 的交（或积），记

为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. 称"事件 A 发生而事件 B 不发生"的事件为事件 A 与 B 的差，记为 $A-B$；称"事件 A 不发生"的事件为事件 A 的**逆事件或对立事件**，记为 $\overline{A}$. 由定义易知 $A-B=A-AB=A\overline{B}$，$B=\overline{A}\Leftrightarrow AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$. 称可列个(或有限个)事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$ 构成一个完备事件组(或 Ω 的一个不交分割)，如果 $\bigcup\limits_i A_i=\Omega$，且 $A_iA_j=\varnothing$(一切 $i\neq j$).

事件的关系、运算与集合的关系、运算相当，且具有相同的运算法则：

吸收律：若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B, AB=A$；

交换律：$A\cup B=B\cup A, AB=BA$；

结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(AB)C=A(BC)$；

分配律：$A(B\cup C)=AB\cup AC, A\cup BC=(A\cup B)(A\cup C)$；$A(B-C)=AB-AC$；

对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

【点评】 (1) 事件运算顺序约定为先进行逆运算，而后交运算，最后并或差.

(2) 事件的关系、运算及其法则，在分析事件，化简事件运算以及对事件作必要的等价变换时常常要用到. 要学会用概率论语言来叙述事件，用简单的事件的运算、关系表示或化简较复杂的事件.

(3) 在分析和讨论事件关系时，常常借助于图示法，既直观又简便.

(4) 正确的理解事件的关系：包含、相等、互不相容、对立、相互独立的概念、等价性条件、区别与联系.

【例 1.1】 选择题

(1) 设 A、B、C 为三个事件，则事件"A、B、C 不多于一个发生"的逆事件是

(A) A、B、C 至少有一个发生.　　(B) A、B、C 至少有二个发生.

(C) A、B、C 都发生.　　(D) A、B、C 不都发生.　　[　　]

【解题思路】 这是用概率论语言叙述的事件，由逆事件定义知"不多于一个发生"的反面是"至少有二个发生"，因此选择(B). 我们也可以用事件的关系与运算来确定正确选项. 为此需要引入事件 $D=$"A、B、C 不多于一个发生"$=$"A、B、C 至少有二个不发生"$=\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{C}\cup\overline{B}\,\overline{C}$，应用对偶法则及其他运算法则，得 $\overline{D}=\overline{(\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{C}\cup\overline{B}\,\overline{C})}=(A\cup B)(A\cup C)(B\cup C)=(A\cup BC)(B\cup C)=AB\cup AC\cup BC=$"$A$、$B$、$C$ 至少有二个发生"，选择(B).

(2) 现有一批电子元件，系统初始先由一个元件工作，当其损坏时，立即更换一个新元件接替工作. 如果用 X_i 表示第 i 个元件寿命，那么事件 $A=$"到时刻 T 为止，系统仅更换一个元件"可以表示为

(A) $A=\{X_1+X_2>T\}$.

(B) $A=\{0\leqslant X_1<T, 0\leqslant X_2<T\}$.

(C) $A=\{0\leqslant X_1<T, X_1+X_2<T\}$.

(D) $A=\{0\leqslant X_1<T, X_1+X_2>T\}$.　　[　　]

【解题思路】 事件 $A=$"到时刻 T 为止，系统仅更换一个元件"$=$"第一个元件在时刻 T 之前已经损坏，第一个、第二个元件寿命之和要超过时刻 T"$=\{0\leqslant X_1<T, X_1+X_2>T\}$，选择(D).

(3) 将一均匀骰子随意投掷 4 次，记 $A=$"4 次投掷最大点数为 5"，下列 4 个不同的表示：①$A_1=$"4 次投掷点 5 至少出现一次"；②$A_2=$"4 次投掷点 6 都不出现"；③$A_3=$"4 次投掷点 5 至少出现一次且点 6 不出现"；④$A_4=$"4 次投掷最大点数不小于 5"$-$"4 次投掷最大点数为 6"，其中有 2

个是与 A 等价的表示，它们是：

(A)① 与 ②.　　　　　　　　(B)② 与 ③.

(C)③ 与 ④.　　　　　　　　(D)④ 与 ①.　　　　　　　　[　　]

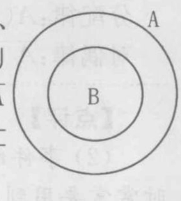
【解题思路】 依题意 A 是“含点 5 而不含点 6”的所有基本事件构成的，由此即知 ①、② 不正确，因此正确选项是(C)：③ 与 ④. 事实上，① 中的 A_1 含有“既有点 5 又有点 6”的基本事件，如“5,5,6,6”，“6,6,5,6”等等；② 中 A_2 含有不含 5 的基本事件，如“1,1,1,2”，“1,2,3,4”等.

(4) 设 A,B 为随机事件，则与 A 包含 B 不等价的是

(A)$A\cup B=A$.　　　　　　　　(B)$B-A=\varnothing$.

(C)$A-B=\varnothing$.　　　　　　　　(D)$AB=B$.　　　　　　　　[　　]

【解题思路】 这是判断事件关系的选择题，借助图形立即可以推断(A)、(B)、(D) 是事件 A 包含 B 的充要条件，因而选择(C). 事实上，A 包含 $B\Leftrightarrow B\subset A\Leftrightarrow A\cup B=A$((A) 是充要条件)，$\Leftrightarrow B\overline{A}=B-A=\varnothing$((B) 为充要条件)，$\Leftrightarrow B=BA+B\overline{A}=BA$((D) 为充要条件). 对于(C) 而言，$A-B=\varnothing\Leftrightarrow A\overline{B}=\varnothing\Leftrightarrow A\subset B$，这与 $B\subset A$ 矛盾.



(5) 设事件 A 与 B 满足条件 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$，则

(A)$A\cup B=\varnothing$.　　　　　　　　(B)$A\cup B=\Omega$.

(C)$A\cup B=A$.　　　　　　　　(D)$A\cup B=B$.　　　　　　　　[　　]

【解题思路】 由“对称性”知(C)、(D) 都不成立(否则一个成立另一个必成立)，而(A) 成立 $\Leftrightarrow A=B=\varnothing$，此与已知矛盾，所以正确选项是(B). 事实上，由对偶法则及题设有 $AB=\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}$，根据吸收律得

$$A\cup B=A\cup B\cup AB=(A\cup B)\cup(\overline{A\cup B})=\Omega.$$

1.1.2　随机事件的概率及其性质

通常我们将随机事件 A 发生可能性大小的度量(非负值)，称为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)$. 这是概率的描述性定义.

1. 概率的统计定义

在相同条件下做重复试验，事件 A 出现的次数 k 和总的试验次数 n 之比 k/n，称为事件 A 在这 n 次试验中出现的频率. 当试验次数 n 充分大时，频率将“稳定”于某常数 p 的“附近”. n 越大，频率偏离这个常数 p 的可能性越小. 这个常数 p 就被称为事件 A 的概率.

【点评】 (1) 概率的统计定义实质上是说，用频率 k/n 作为事件 A 的概率 $P(A)$ 的估计. 其直观背景为：某事件出现的可能性大小，可由在多次重复试验中其出现的频率程度去刻画.

(2) 从上述(1) 可以看出，频率只是概率的估计，而非概率本身. 也就是说，概率的统计定义是无法准确给出某事件的概率的. 其重要性主要基于以下两点：一，它提供了估计概率的方法，比如在一批产品中抽取样品，来估计该批产品的合格率(合格率是客观的数据，抽取样品计算出来的合格率，只是一种估计)；二，它提供了一种检验某结论是否正确的准则，比如你说某批产品的合格率是 95%，我们做实验，抽取样品进行计算，得出的结果，合格率是 20%，远远低于你所说的 95% 这个数据，于是毫不犹豫地拒绝你的结论.

2. 古典概率与几何概率

称随机试验(随机现象)的概率模型为古典概型,如果其基本事件空间(样本空间)满足(1)只有有限个基本事件(样本点);(2)每个基本事件(样本点)发生的可能性都一样.如果古典概型的基本事件总数为 n,事件 A 包含 k 个基本事件,即有利于 A 的基本事件 k 个.则 A 的概率定义为

$$P(A) \triangleq \frac{k}{n} = \frac{\text{事件 } A \text{ 所含基本事件的个数}}{\text{基本事件总数}}.$$

由上式计算的概率称为 A 的古典概率.

称随机试验(随机现象)的概率模型为几何概型,如果(1)样本空间(基本事件空间)Ω 是一个可度量的几何区域;(2)每个样本点(基本事件)发生的可能性都一样,即样本点落入 Ω 的某一可度量的子区域 A 的可能性大小与 A 的几何度量成正比,而与 A 的位置及形状无关.

在几何概型随机试验中,如果 S_A 是样本空间 Ω 一个可度量的子区域,则事件 $A=$“样本点落入区域 S_A”的概率定义为

$$P(A) \triangleq \frac{S_A \text{ 的几何度量}}{\Omega \text{ 的几何度量}}.$$

由上式计算的概率称为 A 的几何概率.

【点评】 基本事件有限、等可能的随机试验为古典概型;基本事件无限、等可能的随机试验为几何概型.

3. 概率的公理化定义

设随机试验的样本空间为 Ω,如果对每一个事件 A 都赋于一个确定的实数 $P(A)$,且事件函数 $P(\cdot)$ 满足(1)非负性:$P(A) \geqslant 0$;(2)规范性:$P(\Omega)=1$;(3)可列可加性:对任意可列个互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$(即 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j$)有 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$,则称 $P(\cdot)$ 为概率,$P(A)$ 为事件 A 的概率.

【点评】 ① 数学上所说的“公理”,就是一些不加证明而承认的前提,上述公理化定义只是介定了概率这个概念所必须满足的一些一般性质,它不解决具体场合下的概率计算.② 概率 $P(\cdot)$ 是事件的函数.

4. 概率的基本性质

(1) 有界性 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$, $P(\varnothing)=0$, $P(\Omega)=1$.

(2) 单调性 若 $A \subset B$,则 $P(A) \leqslant P(B)$.

(3) 有限可加性

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件,则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$

(4) 加法公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$.

一般地 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots$

$+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$.

(5) 减法公式　$P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

(6) 求逆公式　$P(\overline{A})=1-P(A)$.

【点评】 $P(A)=0$,不能断言 $A=\varnothing$;$P(B)=1$,不能断言 $B=\Omega$.

1.1.3　条件概率及与其有关的三公式:乘法公式、全概率公式、贝叶斯(Bayes)公式

1. 条件概率

设 A、B 为任意两个事件,若 $P(A)>0$,我们称在已知事件 A 发生的条件下,事件 B 发生的概率为条件概率,记为 $P(B\mid A)$,并定义

$$P(B\mid A)\triangleq\frac{P(AB)}{P(A)}\qquad(P(A)>0).$$

【点评】 (1) 条件概率 $P(\cdot\mid A)$ 是概率,概率的一切性质和重要结果对条件概率都适用,例如:

$$P(\overline{B}\mid A)=1-P(B\mid A),$$
$$P(B-C\mid A)=P(B\mid A)-P(BC\mid A),\text{等等}.$$

(2) 条件概率就是附加一定的条件之下所计算的概率. 当说到“条件概率”时,总是指另外附加的条件,其形式可归结为“已知某事件发生了”.

2. 乘法公式

如果 $P(A)>0$,则 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)$. 一般地,如果 $P(A_1\cdots A_{n-1})>0$,则

$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1\cdots A_{n-1})$

【点评】 A_i 先于 A_{i+1} 发生时用此公式.

3. 全概率公式

如果 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$,$A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$,$P(A_i)>0$,则对任一事件 B,有

$$B=\bigcup_{i=1}^{n}A_iB,P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i).$$

4. 贝叶斯(Bayes)公式(逆概公式)

如果 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$,$A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$,$P(A_i)>0$,则对任一件事 B,只要 $P(B)>0$,有

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)(B\mid A_i)}(i=1,2,\cdots,n)$$

【点评】 (1) 要注意 $P(AB)$ 与 $P(B\mid A)$ 的区别：

$P(AB)$ 是在样本空间为 Ω 时，A 与 B 同时发生的可能性，而 $P(B\mid A)$ 则是表示在 A 已经发生的条件下，B 发生的可能性，此时样本空间已由 Ω 缩减为 A，只要题目中有前提条件："在 A 发生的条件下"或"已知 A 发生"等等，均要考虑条件概率.

(2) 全概率公式是用于计算某个"结果"B 发生的可能性大小. 如果一个结果 B 的发生总是与某些前提条件(或原因、因素或前一阶段结果)A_i 相联系，那么在计算 $P(B)$ 时，我们总是将 B 对 A_i 作分解：$B=\bigcup\limits_i A_iB$，应用全概率公式计算 $P(B)$. 如果在 B 发生的条件下探求导致这一结果的各种"原因"A_i 发生的可能性大小 $P(A_i\mid B)$，则要应用 Bayes 公式.

【例 1.2】 选择题

(1) 设 A、B 为随机事件，则

(A) $P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)$.　　(B) $P(A-B)\geqslant P(A)-P(B)$.

(C) $P(AB)\geqslant P(A)P(B)$.　　(D) $P(A\mid B)\geqslant \dfrac{P(A)}{P(B)}(P(B)>0)$.　　[　]

【解题思路】 由概率性质知，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\leqslant P(A)+P(B)$，选项(A)不成立；$P(A-B)=P(A)-P(AB)\geqslant P(A)-P(B)$，(因为 $P(AB)\leqslant P(B)$)，故正确选项是(B). 而 $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}\leqslant\dfrac{P(A)}{P(B)}$，故(D)不成立；而选项(C)可能成立也可能不成立，例如 $AB=\varnothing$，则 $P(AB)=0\leqslant P(A)P(B)$，若 $B\subset A$，则 $P(AB)=P(B)\geqslant P(A)P(B)$.

(2) 设 A 为随机事件且 $P(A)=1$，则对任意的随机事件 B，必有

(A) $P(A\cup B)=P(B)$.　　(B) $P(A-B)=P(B)$.

(C) $P(B-A)=P(B)$.　　(D) $P(AB)=P(B)$.　　[　]

【解题思路】 这是一道应用概率性质及事件关系计算概率的选择题，已知 $P(A)=1$，故 $P(\overline{A})=0$，由于 $A\subset A\cup B$，所以 $P(A\cup B)=1\neq P(B)$，$P(B-A)=P(B\overline{A})=0\neq P(B)$，(A)、(C)不成立. 由分解律得 $B=AB+\overline{A}B$，故 $P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=P(AB)$，(D)成立，选择(D). 同理 $\overline{B}=A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}$，$P(\overline{B})=P(A\overline{B})+P(\overline{A}\,\overline{B})=P(A\overline{B})=P(A-B)\neq P(B)$，(B)不成立.

【点评】 $P(A)=1$，则 A 与任意事件 B 独立，故 $P(AB)=P(A)P(B)=P(B)$，选择(D). $P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=P(\overline{B})\neq P(B)$，(B)不成立.

(3) 已知事件 A 与 B 同时发生，事件 C 必发生，则

(A) $P(C)\leqslant P(A)-P(B)$.　　(B) $P(C)\geqslant P(A)-P(B)$.

(C) $P(C)\leqslant P(A)-P(\overline{B})$.　　(D) $P(C)\geqslant P(A)-P(\overline{B})$.　　[　]

【解题思路】 显然我们必须由已知条件通过计算才能确定正确选项. 由题设知 $AB\subset C$，所以 $P(C)\geqslant P(AB)$. 由于各选项右式均有 $P(A)$，为此考虑分解式：$A=AB\cup A\overline{B}$，从而得 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$，$P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})\geqslant P(A)-P(\overline{B})$，$P(C)\geqslant P(AB)\geqslant P(A)-P(\overline{B})$，选择(D).

1.1.4 随机事件相互独立与独立试验序列概型

1. 事件的独立性

(1) 独立性定义

描述性定义(直观性定义) 设A、B为两个事件，如果其中任何一个事件发生的概率不受另外一个事件发生与否的影响，则称事件A与B相互独立. 设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是n个事件，如果其中任何一个或几个事件发生的概率都不受其余的某一个或某几个事件发生与否的影响，则称事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立.

数学定义 设A、B为事件，如果$P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件A与B相互独立，简称为A与B独立.

设$A_1,A_2,\cdots,A_n$为n个事件，如果对其中任意有限个事件$A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{ik}(k\geqslant 2)$，有$P(A_{i1}A_{i2}\cdots A_{ik})=P(A_{i1})P(A_{i2})\cdots P(A_{ik})$，则称$n$个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立.

(2) 独立性的判定

1° 直观性判定：若试验独立其结果必相互独立. 例如：甲、乙各自试验结果相互独立；袋中有返回取球其结果相互独立等.

2° 充要条件.

〈1〉$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立$\Leftrightarrow$任意$k\geqslant 2$；$P(\bigcap\limits_{j=1}^{k}A_{ij})=\prod\limits_{j=1}^{k}P(A_{ij})$.

特别地A、B独立$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$.

若$0<P(A)<1$，则A、B独立$\Leftrightarrow P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})=P(B)$.

〈2〉n个事件相互独立的充要条件是，它们中任意一部分事件换成各自的对立事件所得到的n个事件相互独立.

3° 必要条件.

〈1〉n个事件相互独立必两两独立，反之不然.

〈2〉n个事件相互独立，则不含相同事件的事件组经某种运算后所得的事件是相互独立的. 例如，A、B、C、D相互独立，则AB与$C\cup D$相互独立，A与$BC-D$相互独立，等等.

4° 一定独立与一定不独立的判定.

概率为1或零的事件与任何事件都相互独立. 如果$0<P(A)<1,0<P(B)<1$，A与B互不相容或存在包含关系，则A与B不相互独立.

【点评】 *在现实生活中，难于想像两两独立而不相互独立的情况，可以这样想：独立性毕竟是一个数学概念，是现实世界中通常理解的那种“独立性”的一种数学抽象，它难免会有些不尽人意的地方.*

2. 试验的独立

如果各个试验结果是相互独立的，则称这些试验是相互独立的. 例如，称随机试验E_1和E_2是相互独立的，如果对E_1的任一结果A_1，E_2的任一结果A_2，事件A_1与A_2独立，即$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$. 称n个试验$E_1,E_2,\cdots,E_n$是相互独立的，如果对试验E_i中的任一结果$A_i(i=1,2,\cdots,n)$，事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立. 即对其中任意k个事件有

$$P(\bigcap_{j=1}^{k} A_{ij}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{ij}) \qquad (k \geqslant 2).$$

3. **独立试验序列概型与 n 重伯努利概型**

在同样条件下重复独立地进行一系列完全相同的试验，即每次试验结果及其发生的概率都不变，各次试验是相互独立的，称这种重复试验序列的数学模型为独立试验序列概型. 如果每次试验只有两个结果 A 与 $\overline{A}$，且在每次试验中 A 发生的概率都相等(即 $P(A) = p$)，将这种试验独立重复 n 次，则称这种试验为 n 重伯努利概型.

在 n 重伯努利概型中，事件 A 发生 k 次(只管次数，不论位置)的概率为 $C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k=0, 1, \cdots, n)$，如果用 X 表示 n 重伯努利概型中事件 A 发生的次数，则 X 服从二项分布 $B(n, p)$.

【点评】 (1) 事件相互独立的概念是概率论中一个重要的概念，它是定义随机试验独立性，随机变量独立性的基础. 我们总是由试验的方式来判定试验的独立性，进而判定事件的相互独立性，再应用事件独立性定义中所揭示的概率关系计算与之有关的事件的概率.

(2) 要善于判定独立试验序列概型，只要题目中出现"将 … 重复进行 n 次"，"对 … 重复观察 n 次"等字样，或可以转换为 n 次独立重复试验概型的问题，都是要考虑应用二项分布计算与之有关的事件的概率.

【例 1.3】 选择题

(1) 设 A、B 为任意随机事件，已知 $0 < P(A) < 1$，则

(A) 若 $A \subset B$，则 A、B 一定不独立.　　(B) 若 $B \subset A$，则 A、B 一定不独立.

(C) 若 $AB = \varnothing$，则 A、B 一定不独立.　　(D) 若 $A = \overline{B}$，则 A、B 一定不独立.　　[　]

【解题思路】 这是一道考查与判定事件"一定不独立"有关命题的选择题. 我们知道在条件"$0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$"下，$A$ 与 B 互不相容或存在包含关系，则 A、B 一定不独立，本题仅假设 $0 < P(A) < 1$，而对 $P(B)$ 未作任何假设，因此(A)、(B)、(C) 都不成立，正确选项是(D). 事实上，当 $P(B) = 1$ 时，如果 $A \subset B$，则 $P(AB) = P(A) = P(A)P(B)$，A 与 B 独立，(A) 不成立；当 $P(B) = 0$ 时，若 $B \subset A$，则 $P(AB) = P(B) = 0 = 0P(A) = P(B)P(A)$，$A$ 与 B 独立，故(B) 不成立；若 $AB = \varnothing$，$P(B) = 0$，则 $P(AB) = 0 = P(B)P(A)$，A 与 B 独立，故(C) 不成立. 所以选择(D)，事实上若 $A = \overline{B}$，则 $\overline{A} = B$，由题设知 $0 < P(A) = P(\overline{B}) < 1, 0 < P(\overline{A}) = P(B) < 1$，故 $P(AB) = P(\overline{B}B) = 0 \neq P(A)P(B)$，$A$ 与 B 不独立.

(2) 设 A，B 为随机事件，$0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$，则 A 与 B 相互独立的充要条件是

(A) $P(A \mid B) + P(\overline{A} \mid B) = 1$.　　(B) $P(A \mid B) + P(A \mid \overline{B}) = 1$.

(C) $P(A \mid B) + P(\overline{A} \mid \overline{B}) = 1$.　　(D) $P(A \mid \overline{B}) + P(\overline{A} \mid \overline{B}) = 1$.　　[　]

【解题思路】 这是一道由条件概率推导事件 A、B 独立充要条件的选择题. 我们可以从两个不同方面去考虑选择正确选项. 一是从选项入手，由于条件概率是概率，它具有概率的一切性质，因此(A)、(D) 对任意事件都成立，是 A、B 独立的必要条件但不充分. 又如果 A、B 独立，则 $P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B}) = P(A)$，从而有 $P(A \mid B) + P(A \mid \overline{B}) = 2P(A) \neq 1$，选项(B) 不成立. 因而正确选项是(C).

另一方面我们也可以从独立性充要条件入手确定正确选项，由于 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$，故 A 与 B 独立 $\Leftrightarrow P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B}) = 1 - P(\overline{A} \mid \overline{B}) \Leftrightarrow P(A \mid B) + P(\overline{A} \mid \overline{B}) = 1$，选择(C).

(3) 将一枚硬币独立地掷二次，记事件 $A =$"第一次掷出正面"，$B =$"第二次掷出反面"，$C =$"正面最多掷出一次"，则事件

(A)A,B,C 两两独立.　　　　(B)A 与 BC 独立.

(C)B 与 AC 独立.　　　　(D)C 与 AB 独立.　　　　[　　]

【解题思路】　由题设知,试验的基本事件共有 4 个:

ω_1 = "正,正",ω_2 = "正,反",ω_3 = "反,正",ω_4 = "反,反"

所以 A = "ω_1,ω_2",B = "ω_2,ω_4",C = "$\omega_2,\omega_3,\omega_4$"

$P(A)=P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$,$P(C)=\frac{3}{4}$,显然 A 与 B 独立. 即 $P(AB)=\frac{1}{4}=P(A)P(B)$,$B\subset C$,故 B、C 不独立,选项(A)不成立. 又 $BC=B$,$ABC=AB$,$P(ABC)=P(AB)=P(A)P(B)=P(A)P(BC)$,所以 A 与 BC 独立,选项(B)正确. 而

$P(ABC)=P(A)P(B)=\frac{1}{4}\neq P(B)P(AC)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$

$P(ABC)=\frac{1}{4}\neq P(C)P(AB)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}$,故选项(C)、(D)不正确.

【点评】　选择题分为概念性、理论性选择题与计算性选择题两种题型. 如果能确定某个选项是正确的,无需对它进行验证,也无需验证或举反例说明其他选项是不正确的,解答概念性、理论性选择题时常常是这样的. 在例题中我们做了必要的证明或举反例,是为了说明问题的需要.

对计算性选择题则必须通过计算才能确定正确选项.

1.2　典型例题精解

1.2.1　事件的关系与运算

随机事件是概率论最重要、最基本的一个概念. 要学会并掌握用概率论语言叙述事件,用符号表示事件;用简单的事件运算表示较复杂的事件;确定随机试验的基本事件并用它去表示其他事件,等等. 这是学好概率论的基础和关键.

【例 1.4】(1) 对一箱产品进行随意抽查检验,如果查出 2 个次品就停止检查,最多检查 3 个产品. 写出该试验的基本事件(样本)空间 Ω,并用基本事件(样本点)表示下列事件:A = "有 2 个产品是次品",B = "至少有 2 个正品".

(2) 用事件 A、B、C 的运算关系表示下列事件:1° A、B、C 都不发生;2° A、B、C 不都发生;3° A、B、C 不多于一个发生.

【解题思路】(1) 依题意,检查是有序的逐个进行,至少检查 2 个,最多检查 3 个. 因此,如果以"0"表示查出次品,以"1"表示查出正品,那么基本事件至少是一个二位数至多是一个三位数的有序数列. 基本事件空间 $\Omega=\{00,010,011,100,101,110,111\}$,事件 $A=\{00,010,100\}$,$B=\{011,101,110,111\}$.

(2) 这是一道要求由概率论语言叙述的事件用事件关系来表示的题目,只要知道各种运算所描述的事件关系,此题是不难解答的.

1° "A、B、C 都不发生" = "A 不发生,且 B 不发生,且 C 不发生" $=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}$.

2° "A、B、C 不都发生" = "A、B、C 至少有一个不发生" = "A、B、C 都发生" 的逆事件 $=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\overline{ABC}$.

3° "A、B、C 不多于一个发生" = "A、B、C 至多有一个发生" = "A、B、C 至少有二个不发生"

$= \overline{A}\,\overline{B} \cup \overline{A}\,\overline{C} \cup \overline{B}\,\overline{C} = A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C \cup \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

【例 1.5】 (1) 已知事件 A 与 B 互不相容，则 $A \cup \overline{B} =$ ________；$A - \overline{B} =$ ________；$A\overline{B} =$ ________.

(2) 已知事件 C 发生必导致 A、B 同时发生，又 $AB \cup C = B$. 求证：$C \subset B \subset A$.

【解题思路】 (1) 已知 A 与 B 互不相容 $\Leftrightarrow AB = \varnothing \Leftrightarrow A \subset \overline{B} \Leftrightarrow B \subset \overline{A}$，所以由吸收律得：

$$A \cup \overline{B} = \overline{B},\ A - \overline{B} = AB = \varnothing,\ A\overline{B} = A.$$

(2) 已知 $C \subset AB$，又 $AB \cup C = B$，由吸收律得 $AB \cup C = AB = B \Leftrightarrow B \subset A$. 从而证得

$$C \subset AB \subset B \subset A.$$

1.2.2　应用古典概型、几何概型与独立试验序列概型计算概率

只要计算与随机试验有关的事件的概率，都要考虑试验的概型，应用相应的公式、概率性质及其他公式计算概率.

1. 古典概型

古典概型　基本事件有限、等可能的随机试验.

古典概率　$P(A) \triangleq \dfrac{A\text{ 中基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$

计算的关键是基本事件、样本空间的选定以及基本事件数的计算. 计数方法常用的有三种：

(1) 列举法(直接查数法)：基本事件数不多时常用这种方法.

(2) 集合对应法(乘法法则，加法法则，排列，组合等等)：基本事件是一种事件，完成这件事有多少种不同的做法，相应的基本事件就有多少个. 特别常用的是乘法法则：完成某件事共有 k 个步骤，每一步骤有 $m_i(i = 1,2,\cdots,k)$ 种不同方法，采用何种方法是相互独立的，那么完成这件事有 $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_k$ 种不同的方法.

(3) 逆数法(先求 $\overline{A}$ 中的基本事件数 $n_{\overline{A}}$，将基本事件总数 n 减去 $n_{\overline{A}}$ 便得 A 中的基本事件数)：这种方法常用于计算含有"至少"字样的事件的概率.

古典概型典型模式常用的有三种：袋中取球，随机取数与随机占位. 我们常常把问题化为这三种模式之一去考虑求解.

【例 1.6】 从 $0 \sim 9$ 十个数字任取 3 个不同数字，求事件 $A =$"三个数字中不含 0 和 5"，$B =$"三个数字中不含 0 或 5"，$C =$"三个数字中含 0，但不含 5"的概率.

【解题思路】 这是一个随机取数的问题，依题意它是一个不放回的取数，如何取?一次取出还是逐次取出?题目并没有提出要求. 如果假设三个数是一次取出，那么三个不同数的任一无序数组是一个基本事件，其总数 $n = C_{10}^3$，由于 A 的基本事件是那些除去 0 和 5 后余下的 8 个数中任取三个数的一个无序数组，故 $n_A = C_8^3$，$P(A) = \dfrac{C_8^3}{C_{10}^3} = \dfrac{7}{15}$. 显然 $\overline{B} =$"三个数字中含 0 且含 5"，故 B 中基本事件数

$$n_B = n - n_B = C_{10}^3 - C_1^1C_1^1C_8^1,\ P(B) = 1 - \frac{C_8^1}{C_{10}^3} = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}.$$

C 中基本事件数 $n_C = C_1^1 \times C_8^2$，$P(C) = \dfrac{C_8^2}{C_{10}^3} = \dfrac{7}{30}$.

【点评】 本题还可以用下面方法求解

(1)(有序法) 如果三个数是依次逐一取出，那么三个不同数的任一有序数组是一个基本事件，总数 $n=10\times9\times8=720$，$n_A=8\times7\times6$，$P(A)=\dfrac{8\times7\times6}{720}=\dfrac{7}{15}$，同理可算其余.

(2)(全排列法) 如果将10个不同数的任一全排列作为一个基本事件，其总数 $n=10!$，事件 A 的有利基本事件数 $n_A=C_8^1C_7^1C_6^17!$. $P(A)=\dfrac{8\times7\times6\times7!}{10!}=\dfrac{7}{15}$.

(3)(性质法) 用简单事件运算来表示 A,B,C. 例如记 $D=$"三个数中不含0"，$E=$"三个数中不含5"，则 $A=DE$，$B=D\cup E$，$C=E-D$，且 $P(D)=\dfrac{C_9^3}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{10}$，$P(E)=\dfrac{C_9^3}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{10}$，$P(ED)=\dfrac{C_8^3}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{15}$，$P(A)=P(DE)=\dfrac{7}{15}$，$P(B)=P(D\cup E)=P(D)+P(E)-P(DE)=\dfrac{7}{10}+\dfrac{7}{10}-\dfrac{7}{15}=\dfrac{14}{15}$，$P(C)=P(E-D)=P(E)-P(ED)=\dfrac{7}{10}-\dfrac{7}{15}=\dfrac{7}{30}$.

【例 1.7】 从5双不同的鞋中任取4只，求这4只鞋中至少有两只能配成一双的概率.

【解题思路】 设想5双鞋(一共10只)是有区别的(例如编号)，试验是从10个不同数中无放回的取出4个，即随机取数. 由于取法的不同(一次取出还是逐一取出)，样本空间可以不同(无序样本还是有序样本)，因而就有不同的解法，若记

$A=$"4只鞋中至少有两只鞋配成一双"，

$B=$"4只鞋中恰有两只配成一双"，

$C=$"4只鞋恰好配成二双鞋"，则 $A=B\cup C$，$\overline{A}=$"4只鞋全不配对". 如果从5双鞋中一次取4只，把任何一个可能出现的结果作为基本事件，则其总数 $n=C_{10}^4=210$，B 中的基本事件，可以设想为先从5双鞋中任取一双，再从余下的4双鞋中任取两双，从两双中各取一只，依据乘法原理，事件 B 所含的基本事件数 $n_B=C_5^1\cdot C_4^2\cdot C_2^1\cdot C_2^1$，同理，$n_C=C_5^2$，由加法原理 $n_A=n_B+n_C=130$，或 $n_A=n-n_{\overline{A}}=C_{10}^4-C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1$($\overline{A}$ 等价于从5双鞋中任取4双，然后在四双中各取一只)，或 $n_A=C_5^1\times C_8^2-C_5^2=130$(从5双鞋中任取一双，再从余下8只鞋中任取2只，此时"4只鞋配成二双"重复计算一次，因此要减去 C_5^2)，所以

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{130}{210}=\frac{13}{21}.$$

【点评】 如果5双鞋中任取4只是逐一取出，则基本事件是一个有序结果，总数 $n=10\times9\times8\times7$，$\overline{A}=$"4只鞋全不配对"，$\overline{A}$ 中的基本事件可以设想先从10只中任取一只(有10种取法)，而后在余下的4双鞋(8只)中任取一只(有8种取法)，再在余下的3双鞋(6只)中任取一只(有6种取法)，最后从余下2双鞋(4只)中任取一只(有4种取法)，由乘法原理知

$$n_{\overline{A}}=10\times8\times6\times4,n_A=n-n_{\overline{A}},P(A)=1-\frac{n_{\overline{A}}}{n}=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}.$$

读者是否可以用"全排列法"来计算 $P(A)$?(此时基本事件总数 $n=10!$，$n_{\overline{A}}=C_{10}^1\cdot C_8^1\cdot C_6^1\cdot C_4^1\cdot6!$，$n_A=n-n_{\overline{A}}$).

【例 1.8】 将 n 个球随意放入 $N(n\leqslant N)$ 个盒子中，每个盒子可以放任意多个球. 试求下列事件的概率：$A=$"某指定 n 个盒子各有一球"；$B=$"恰有 n 个盒子各有一球"；$C=$"指定 $k(k\leqslant n)$ 个盒子各有一球".