研究生教材

YANJIUSHENGJIAOCAI

应用随机过程

YINGYONGSUIJIGUOCHENG

主编　陈家清　赵华玲　梅顺治

武汉理工大学出版社
WUTP　Wuhan University of Technology Press

应用随机过程

主　编　陈家清　赵华玲
梅顺治

武汉理工大学出版社
·武　汉·

内 容 提 要

本书主要内容包括：概率论基础知识、随机过程的概念和基本类型、泊松过程、离散状态和连续时间马尔可夫链、鞅和布朗运动、随机分析等。

本书尽可能地简化复杂的抽象证明或推导，主要突出知识的应用教学与学习；叙述通俗、简明且例题较多，并给出了章节习题的大部分参考答案，便于读者自学参考。

本书可作为高等院校工科类以及管理、经济与金融类研究生和高年级本科生的教材，同时也可作为广大从事相关专业技术研究人员的参考或自学书籍。

图书在版编目(CIP)数据

应用随机过程/陈家清，赵华玲，梅顺治主编．—武汉：武汉理工大学出版社，2014.9

ISBN 978-7-5629-4193-4

Ⅰ.①应… Ⅱ.①陈… ②赵… ③梅… Ⅲ.①随机过程 Ⅳ.①O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 145955 号

项目负责人：陈军东　彭佳佳　　**责任编辑**：彭佳佳
责 任 校 对：王　思　　**装帧设计**：芳华时代
出 版 发 行：武汉理工大学出版社
社　　址：武汉市洪山区珞狮路 122 号
邮　　编：430070
经　　销：各地新华书店
印　　刷：安陆市鼎鑫印务有限责任公司
开　　本：787×960　1/16
印　　张：12.5
字　　数：270 千字
版　　次：2014 年 9 月第 1 版
印　　次：2014 年 9 月第 1 次印刷
印　　数：1—2000 册
定　　价：28.00 元

前　　言

随机过程理论是现代概率论中的一个重要分支，在生物、物理、系统工程、管理和经济等领域都有着广泛的应用。目前国内大多数高校大都在工科、管理和经济等相关专业开设了应用随机过程课程。本书是编者结合多年的教学经验，在自编讲义的基础上，根据教学课时的安排及工科等专业研究生掌握概率统计专业基础知识的程度，以及全国工科院校硕士研究生应用随机过程课程的教学基本要求而编写的。

本书在内容的选取方面，既涵盖了随机过程基本内容、基本思想和基本方法，又通过典型实例的分析，重点突出了知识的实际应用背景，旨在培养学生应用随机过程的理论与方法解决实际问题的能力。同时，尽可能地简化某些结论的抽象证明，突出主要知识的讲解和应用，以期满足学生掌握运用知识的需要。本书大致分为五个部分：概率论基础知识以及随机过程的基本内容（第1章、第2章），泊松过程（第3章），马尔可夫过程（第4章、第5章），鞅和布朗运动（第6章），随机分析（第7章）。

参加本书编写的人员有陈家清、梅顺治和赵华玲等老师，他们多年来从事研究生、本科生随机过程的教学工作，具有较为丰富的教学实践经验。同时感谢周树民教授对本书书稿的编写给出的详细指导和修改。

这里特别感谢武汉理工大学研究生院培养处的各位同仁，他们帮助和鼓励编者完成了这本书的编写。余旌胡教授认真审阅了书稿，并提出了许多宝贵的意见，在此表示由衷的感谢！同时还要感谢武汉理工大学出版社对本书出版提供的支持和帮助！

由于编者水平有限，书中的缺点在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2014 年 7 月于马房山

目　　录

第 1 章　概率论基础知识

1.1　随机事件及其概率

随机试验是概率论的一个基本概念. 一个试验(或观察),若它的结果预先无法确定,但具有如下三个性质,则称之为**随机试验**,简称为试验:

(1) 试验的可重复性,即在相同的条件下可重复进行;

(2) 试验的可能结果不止一个,且所有可能结果是已知的;

(3) 试验结果的不确定性,即每次试验前不能确定哪个结果会出现.

随机试验的可能结果称为样本点或基本事件,记为 ω. 所有样本点的集合称为样本空间,记作 Ω. 随机事件(简称为事件)是样本空间 Ω 的子集,包含若干个样本点,用大写字母 A,B,C 表示. 样本空间 Ω 称为必然事件,空集 $\varnothing$ 称为不可能事件. 如果 A 所包含的样本点中有一个发生,则称事件 A 发生. 由 Ω 中的若干子集构成的集合称为集族,用花写字母 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{F}$ 等表示.

一般并不把 Ω 的一切子集都作为事件,因为这将给定义概率带来困难;另一方面,又必须把问题中感兴趣的事件都包括进来,例如 A 是事件,则应要求 $\overline{A}$ 也是事件;若 A,B 是事件,则 $A\cup B,AB$ 也应是事件. 为此,引入 σ- 代数的概念:

定义 1.1　设随机试验 E 的样本空间为 Ω,$\mathscr{F}$ 是 Ω 的子集组成的集族,满足:

(1) $\Omega\in\mathscr{F}$;

(2) 若 $A\in\mathscr{F}$,则 $\overline{A}\in\mathscr{F}$;

(3) 若 $A_i\in\mathscr{F}\ (i=1,2,\cdots)$,则 $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i\in\mathscr{F}$;

则称 $\mathscr{F}$ 为 Ω 的一个 **σ- 代数**(σ- 域),$\mathscr{F}$ 中的集合称为事件,$(\Omega,\mathscr{F})$ 称为**可测空间**.

可测空间具有如下性质:

(1) $\varnothing\in\mathscr{F}$;

(2) 若 $A_i\in\mathscr{F}(i=1,2,\cdots)$,则有 $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty}A_i\in\mathscr{F}$;

(3) 若 $A_i\in\mathscr{F}(i=1,2,\cdots,n)$,则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\in\mathscr{F}$,或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i\in\mathscr{F}$;

(4) 若 $A\in\mathscr{F},B\in\mathscr{F}$,则 $A-B\in\mathscr{F}$.

定义 1.2　设$(\Omega,\mathscr{F})$是一可测空间，定义在$\mathscr{F}$上的实值集函数$P(\cdot)$，若满足：

(1) 非负性：对$\forall A\in\mathscr{F}, 0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) 规一性：$P(\Omega)=1$；

(3) 完全可加性：对$\forall A_i\in\mathscr{F}(i=1,2,\cdots), A_i\cap A_j=\varnothing, i\neq j$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(A_i)$$

则称P是$(\Omega,\mathscr{F})$上的概率测度，简称为概率，$(\Omega,\mathscr{F},P)$称为概率空间，$P(A)$表示事件A的概率.

由定义 1.2 易知，事件的概率具有如下性质：

(1) $P(\overline{A})=1-P(A), P(\varnothing)=0$.

(2) 若$A,B\in\mathscr{F}$，且$B\subset A$，则$P(A-B)=P(A)-P(B)$，且$P(A)\geqslant P(B)$.

(3) 若$A_i\in\mathscr{F}(i=1,2,\cdots,n), A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

(4) 上连续性：若$A_i\in\mathscr{F}$，且$A_1\supset A_2\supset\cdots$，且$\bigcap_{n=1}^{+\infty}A_n=A$，则

$$\lim_{n\to+\infty}P(A_n)=P(A)$$

(5) 下连续性：若$A_i\in\mathscr{F}$，且$A_1\subset A_2\subset\cdots$，且$\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n=A$，则

$$\lim_{n\to+\infty}P(A_n)=P(A)$$

(6) 设$A_i\in\mathscr{F}, i=1,2,\cdots,n$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n}P(A_iA_k)+\cdots+(-1)^{n+1}P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)$$

(7) 次可加性：若$A_i\in\mathscr{F}, i=1,2,\cdots,n$，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

1.1.1　条件概率

定义 1.3　设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间，$A,B\in\mathscr{F}$，且$P(B)>0$，则

$$P(A|B)\triangleq\frac{P(AB)}{P(B)}$$

称为在已知事件B发生的条件下，事件A发生的条件概率.

显然，给定事件B，条件概率$P(\cdot\,|B)$具有如下性质：

(1) $\forall A \in \mathscr{F}, 0 \leqslant P(A|B) \leqslant 1$;

(2) $P(\Omega|B) = 1$;

(3) 若 $A_i \in \mathscr{F}(i=1,2,\cdots)$，且 $A_i \cap A_j = \varnothing(i \neq j)$，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i|B)$$

定理 1.1 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是概率空间，若 $A_i \in \mathscr{F}$, $P(A_i) > 0$ $(i=1,2,\cdots)$, $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \Omega, A_iA_j = \varnothing(i \neq j)$. 则对任意 $B \in \mathscr{F}$ 有

(1) $P(B) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)P(B|A_i)$;

(2) $P(A_j|B) = \dfrac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)P(B|A_i)}(j=1,2,\cdots)$.

等式(1) 称为全概率公式，等式(2) 称为 Bayes 公式，$P(A_i)$ 称为先验概率，条件概率 $P(A_i \mid B)$ 称为后验概率.

1.1.2 事件的独立性

定义 1.4 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是概率空间，$A, B \in \mathscr{F}$，称 A 与 B 独立，如果

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

由定义可知，若事件 A 与 B 独立，则 $\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也是独立的.

定义 1.5 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是概率空间，$A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{F}$，称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是相互独立的，如果对任意 $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_m}\} \subset \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}(m \leqslant n)$，有

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_m}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_m})$$

【例 1.1】 某个国家总人口中有 1% 的人 HIV 呈阳性. 现通过一种程序来检测某人 HIV 是否为阳性，如果被检测的人 HIV 是阳性，通过该程序检测也是阳性的概率是 0.98；如果被检测的人 HIV 不是阳性，通过该程序检测也不是阳性的概率是 0.96. 问：通过该程序检测 HIV 呈阳性，而被检测者 HIV 也是呈阳性的概率有多大？

解 A 表示“该程序检测 HIV 呈阳性”，B 表示“被检测者 HIV 呈阳性”，则由题意可知

$$P(B) = 0.01, P(\overline{B}) = 0.99$$
$$P(A \mid B) = 0.98, P(\overline{A} \mid B) = 0.02$$
$$P(\overline{A} \mid \overline{B}) = 0.96, P(A \mid \overline{B}) = 0.04$$

根据全概率公式，可得

$$P(A)=P(A\mid B)P(B)+P(A\mid \bar{B})P(\bar{B})$$
$$=0.98\times 0.01+0.04\times 0.99=0.0494$$

再由 Bayes 公式，可知

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\mid B)P(B)}{P(A)}=\frac{0.98\times 0.01}{0.0494}=0.1984$$

1.2　随机变量及其分布

定义 1.6　设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间，$X(\omega)$是定义在Ω上的单值实函数，若对于任意实数$x\in\mathbf{R}$，有$\{\omega:X(\omega)\leqslant x\}\in\mathscr{F}$，则称$X(\omega)$是$\mathscr{F}$上的随机变量，简称为**随机变量**. 函数$F(x)=P\{\omega:X(\omega)\leqslant x\}$，$x\in\mathbf{R}$，称为随机变量$X$的分布函数.

若随机变量X的可能取值仅有有限个或可列无穷多个，则称X是**离散型随机变量**. 其概率分布用分布列描述：

$$p_k=P\{X=x_k\},k=1,2,\cdots$$

且满足$p_k\geqslant 0$，$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}p_k=1$，其分布函数$F(x)=\sum\limits_{x_k\leqslant x}p_k$.

对随机变量X的分布函数$F(x)$，若存在一非负函数$f(x)$，对$\forall x\in\mathbf{R}$，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)\mathrm{d}u$$

则称X是**连续型随机变量**，$f(x)$为随机变量X的概率密度函数.

若$f(x)$连续，则

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}=f(x)$$

即

$$\lim_{h\to 0}\frac{P(x<X\leqslant x+h)}{h}=f(x)$$

或

$$P(x<X\leqslant x+h)=f(x)h+o(h)$$

以上关系是以后用所谓"微元法"求概率密度函数的依据：为求随机变量X的概率密度函数，先求X落在一个小区域$(x,\ x+h]$上的概率$P(x<X\leqslant x+h)$，然后令$h\to 0$，求其极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{P(x<X\leqslant x+h)}{h}$$

即得$f(x)$.

分布函数具有如下性质：

(1)$F(x)$ 是单调不减函数；

(2)$0 \leqslant F(x) \leqslant 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$；

(3)$F(x)$ 是右连续函数，即对 $\forall x \in \mathbf{R}, F(x+0) = F(x)$.

下面是常见随机变量的分布：

1. 二点分布(伯努利分布)

如果随机变量 X 的分布列为

$$P(X = k) = p^k q^{1-k}, k = 0, 1$$

即

$$P(X = 1) = p, P(X = 0) = q = 1 - p$$

其中 $0 < p < 1$,则称 X 服从二点分布或伯努利分布.

2. 几何分布

若随机变量 X 的分布列为

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

其中 $0 < p < 1$,则称 X 服从参数为 p 的几何分布,记为 $X \sim g(k;p)$.

3. 泊松分布

如果随机变量 X 的分布列为

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

其中 $\lambda > 0$,则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布,记为 $X \sim P(\lambda)$.

4. 二项分布

若随机变量 X 的分布列为

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \cdots, n)$$

其中 $0 < p < 1$,则称 X 服从参数为 n, p 的二项分布,记为 $X \sim B(k;n,p)$ 或 $X \sim B(n,p)$.

5. 巴斯卡分布

若随机变量 X 的分布列为

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \quad (k = r, r+1, \cdots)$$

其中 $0 < p < 1, r \in \mathbf{Z}^+$,则称 X 服从参数为 p, r 的巴斯卡分布,记为 $X \sim f(k;r,p)$.

6. 负二项分布

若随机变量 X 的分布列为

$$P(X = l) = \binom{r+l-1}{l} p^r (1-p)^l \quad (l = 0, 1, \cdots)$$

其中 $0 < p < 1, r \in \mathbf{Z}^+$,则称 X 服从参数为 p, r 的负二项分布,记为 $X \sim \mathrm{Nb}(l;r,p)$.

7. 超几何分布

若随机变量 X 的分布列为

$$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},\quad k=0,1,\cdots,\min(n,M)$$

其中 $M\leqslant N,n\leqslant N$ 且均为正数,则称 X 服从参数为 M,N,n 的超几何分布,记为 $X\sim h(k;M,N,n)$.

8. 均匀分布

若随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则称 X 在区间 $[a,b]$ 上服从均匀分布.

9. 正态分布

若随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

其中 μ 和 $\sigma>0$ 是常数,则称随机变量 X 服从参数为 μ 和 σ 的正态分布(或高斯分布),记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 称参数 $\mu=0,\sigma^2=1$ 的正态分布为标准正态分布,记为 $X\sim N(0,1)$.

10. 对数正态分布

若随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

其中 $\sigma>0,\mu$ 为常数,则称 X 服从对数正态分布. 因 X 的对数 $\ln X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 而得名.

11. 韦布尔分布

若随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{m}{\beta}(x-\alpha)^{m-1}e^{-\frac{(x-\alpha)^m}{\beta}}, & x\geqslant\alpha\\ 0, & x<\alpha\end{cases}$$

则称 X 服从韦布尔分布. 其中 $m(m>0)$ 称为形状参数;α 称为位置参数;$\beta(\beta>0)$ 称为尺度参数.

12. Γ 分布

若随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

其中 $\alpha>0$, $\lambda>0$,则称 X 服从 Γ 分布,记为 $X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$.

13. **埃尔兰分布**

在 Γ 分布中令 $\alpha=n,\lambda>0$,得到埃尔兰分布的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{n}}{n\,!}x^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

分布函数为

$$F(x)=1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda x)^{k}}{k\,!}=\mathrm{e}^{-\lambda x}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\lambda x)^{k}}{k\,!},x\geqslant 0$$

14. **指数分布**

在 Γ 分布中令 $\alpha=1,\lambda>0$,得到指数分布的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

15. χ^2 **分布**

在 Γ 分布中令 $\alpha=\dfrac{n}{2}$,n 为正整数,$\lambda=\dfrac{1}{2}$,得到自由度为 n 的χ^2 分布的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

16. Beta **分布**

若随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1},\ 0\leqslant x\leqslant 1$$

其中参数 $\alpha>0,\beta>0$,则称随机变量 X 服从参数为α 和β 的 Beta 分布.

17. Weibull **分布**

若随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{\beta}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta-1}\mathrm{e}^{(x/\theta)^{\beta}},x>0$$

其中 $\theta>0,\beta>0$,则称随机变量 X 服从参数为θ 和β 的 Weibull 分布.

18. Cauch **分布**

若随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{\lambda}{\pi[\lambda^2+(x-\mu)^2]},-\infty<x<+\infty$$

其中 $\lambda>0,-\infty<\mu<+\infty$,则称随机变量 X 服从参数为 λ 和 μ 的 Cauch 分布.

19. Logistic **分布**

若随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{\pi\exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\cdot\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}{\sqrt{3}\sigma\left[1+\exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\cdot\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^2},-\infty<x<+\infty$$

其中 $\sigma>0,-\infty<\mu<+\infty$,则称随机变量 X 服从参数为 σ 和 μ 的 Logistic 分布.

在二项分布中,当 n 大,p 小,而乘积 np 大小适中时,有如下近似:

定理 1.2 对于二项分布 $B(k;n,p)$,若 $\lim\limits_{n\to+\infty}np=\lambda$,则

$$\lim_{n\to+\infty}C_n^k p^k q^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

由此可得,当 n 充分大,p 较小时,二项分布可用泊松分布近似表示.

定理 1.3 当 N 很大,而 n 很小时,则有

$$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}\approx\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m},\ p=\frac{M}{N}$$

从而当 N 很大,而 n 很小时,可用二项分布来近似表示超几何分布.

【例 1.2】 一般来说,只有 0.01% 的鳟鱼卵可以发育成鳟鱼,那么 40000 个鳟鱼卵中至少有 3 个可以发育成鳟鱼的概率是多少?

解 令 X 表示 40000 个鳟鱼卵中发育成鳟鱼的个数,则 X 服从 $p=0.01\%$ 的二项分布,$p_i=P(X=i)=\binom{40000}{i}p^i(1-p)^{40000-i},\ i=1,2,\cdots,40000$.

又 n 较大,p 较小,故可用 $\lambda=np=4$ 的泊松分布近似表示二项分布,即

$$p_i\approx\frac{4^i}{i!}e^{-4},i=0,1,\cdots,40000$$

所以 40000 个鳟鱼卵中至少有 3 个可以发育成鳟鱼的概率为

$$\begin{aligned}p&=P(X\geqslant 3)=1-p_0-p_1-p_2\\&\approx 1-0.0183-0.0733-0.1465=0.7619\end{aligned}$$

定义 1.7　$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是概率空间，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\omega)=(X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega))$ 是定义在 Ω 上取值于 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 的向量函数. 如果 $X_i(\omega),1\leqslant i\leqslant n$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量，则称 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\omega)$ 为 n 维随机变量或 n 维随机向量，且称

$$F(x)=F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{\omega:X_1(\omega)\leqslant x_1,X_2(\omega)\leqslant x_2,\cdots,X_n(\omega)\leqslant x_n\},$$
$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$$

为 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的联合分布函数.

特别地，$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}$，$x,y\in\mathbf{R}$ 是 X,Y 的二维联合分布函数.

如果 X,Y 的可能取值仅有有限对或可列无穷多对，则称 (X,Y) 是二维离散型随机向量. 设 X,Y 所有可能取值为 (x_i,y_j)，$i=1,2,\cdots,j=1,2,\cdots$，则 (X,Y) 的联合概率分布可用下面的联合分布律表示：

$$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\},\ i=1,2,\cdots,j=1,2,\cdots$$

且满足 $p_{ij}\geqslant 0$，$\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\sum\limits_{j=1}^{+\infty}p_{ij}=1$.

如果存在一个非负的二元函数 $f(x,y)$，使得任意 $x,y\in\mathbf{R}$，有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

则称 (X,Y) 是二维连续型随机向量，$f(x,y)$ 称为 (X,Y) 的联合密度函数，它具有下列性质：

(1) $f(x,y)\geqslant 0$；

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$；

(3) 在 $f(x,y)$ 的连续点 (x,y) 处，有

$$f(x,y)=\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}$$

由定义 1.7 知，$X_i(\omega)$ 的分布函数可由联合分布函数求得，即 $F_{X_i}(x_i)=F(\infty,\cdots,\infty,x_i,\infty,\cdots,\infty)$，称一维分布函数 $F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2),\cdots,F_{X_n}(x_n)$ 为 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的边缘分布函数. 反之，随机向量的边缘分布函数不能确定其联合分布函数，但当它们是相互独立时，边缘分布和联合分布包含着相同的信息.

定义 1.8　$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 n 维随机变量，若 $\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$$

则称随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立.

定理 1.4　若随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，则其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个随机变量 $X_{i_1},X_{i_2},\cdots,X_{i_k}$ 也相互独立.

1.3　随机变量的函数及其分布

先讨论单个随机变量函数的分布,设 X 是连续型随机变量,$y=h(x)$ 是一实值函数.

定理1.5　若 $Y=h(X)=\alpha X+\beta$,则

当 $\alpha>0$ 时,$F_Y(y)=F_X(\frac{y-\beta}{\alpha})$;

当 $\alpha<0$ 时,$F_Y(y)=1-F_X(\frac{y-\beta}{\alpha})$;

当 $\alpha\neq 0$ 时,$f_Y(y)=\left|\frac{1}{\alpha}\right|f_X(\frac{y-\beta}{\alpha})$.

定理1.6　若 $y=h(x)$ 是一个严格单调的函数,逆函数为 $x=h^{-1}(y)$,则

(1) 当 $y=h(x)$ 是严格单调递增函数时,$F_Y(y)=F_X[h^{-1}(y)]$;

(2) 当 $y=h(x)$ 是严格单调递减函数时,$F_Y(y)=1-F_X[h^{-1}(y)]$;

(3) $f_Y(y)=f_X[h^{-1}(y)]\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}\right|=f_X[x(y)]\left|\frac{\mathrm{d}x(y)}{\mathrm{d}y}\right|$.

【例1.3】　一个质量为 m 的质点以随机速度 X 沿着直线移动,已知 $X\sim U[0,V]$,该质点随机运动能量 $Y=\frac{1}{2}mX^2$,求 Y 的分布.

解　由 $y=h(x)=\frac{1}{2}mx^2,x\geqslant 0$ 知,

$x=h^{-1}(y)=\sqrt{\frac{2y}{m}},\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\sqrt{\frac{1}{2my}},0<y<\frac{1}{2}mV^2.$

而 $f_X(x)=\frac{1}{V},0\leqslant x\leqslant V$,所以 $f_Y(y)=\frac{1}{V}\sqrt{\frac{1}{2my}},0<y<\frac{1}{2}mV^2$.

【例1.4】　设随机变量 $X\sim N(0,1)$,求 $Y=\mathrm{e}^{3X+1}$ 的概率密度函数.

解　$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty$

因 $Y=\mathrm{e}^{3X+1}$,所以函数 $y=\mathrm{e}^{3x+1}$ 单调递增.而

$$x=\frac{1}{3}\ln y-\frac{1}{3},\quad x'=\frac{1}{3y}$$

故 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\varphi\left(\frac{1}{2}\ln y-\frac{1}{3}\right)\cdot x'=\frac{1}{3y\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(\frac{1}{2}\ln y-\frac{1}{3})^2}{2}}, & y\geqslant 0\\ 0, & y<0\end{cases}$$

1.3.1　二维随机变量函数的分布

已知二维随机变量(X,Y)的联合分布,如何求$g(X,Y)$的分布?下面就连续型随机变量进行讨论.

设连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)$,则随机变量$Z=g(X,Y)$的分布函数为

$$F_Z(z)=\iint\limits_{g(x,y)\leqslant z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (-\infty<z<+\infty)$$

Z的概率密度为

$$f_Z(z)=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z} \quad (-\infty<z<+\infty)$$

1. 和$Z=X+Y$的分布

已知(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)$,则$Z=X+Y$的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}\\&=\iint\limits_{x+y\leqslant z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

令$y=u-x$,得

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u-x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u$$

于是,Z的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x$$

利用X与Y的对称性可得

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y$$

当X与Y相互独立时,得卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y$$

2. 商$\frac{X}{Y}$的分布

已知(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)$,则$Z=\frac{X}{Y}(Y\neq 0)$的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{X/Y\leqslant z\}=\iint\limits_{x/y\leqslant z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{yz} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{yz}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\end{aligned}$$

令$x=uy$,得