

土木工程专业研究生系列教材

混凝土结构 非线性分析

(第二版)

梁兴文 叶艳霞 编著



中国建筑工业出版社
CHINA ARCHITECTURE & BUILDING PRESS

Master of Civil Engineering

土木工程专业研究生系列教材

混凝土结构非线性分析

(第二版)

梁兴文 叶艳霞 编著

中国建筑工业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

混凝土结构非线性分析/梁兴文, 叶艳霞编著. —2 版.

北京: 中国建筑工业出版社, 2015. 1

(土木工程专业研究生系列教材)

ISBN 978 - 7 - 112 - 17634 - 2

I. ①混… II. ①梁…②叶… III. ①混凝土结构 - 非线性 - 结构分析 - 研究生 - 教材 IV. ①TU37

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 001581 号

土木工程专业研究生系列教材

混凝土结构非线性分析

(第二版)

梁兴文 叶艳霞 编著

*

中国建筑工业出版社出版、发行 (北京西郊百万庄)

各地新华书店、建筑书店经销

北京嘉泰利德公司制版

北京市书林印刷有限公司印刷

*

开本: 787 × 1092 毫米 1/16 印张: 14 1/2 字数: 348 千字

2015 年 2 月第二版 2015 年 2 月第二次印刷

定价: 32.00 元

ISBN 978 - 7 - 112 - 17634 - 2

(26858)

版权所有 翻印必究

如有印装质量问题, 可寄本社退换

(邮政编码 100037)

本书是土木工程专业研究生系列教材之一，第二版主要阐述了混凝土结构的非线性全过程分析以及塑性极限分析方法。内容包括非线性分析基础、混凝土强度准则、材料本构模型、混凝土结构非线性全过程分析、混凝土杆系结构有限元分析、静力弹塑性分析、动力弹塑性分析和混凝土结构极限分析等。

本书对混凝土强度准则和本构关系有较详细的论述，力图使读者掌握这两个问题的基本研究方法；较全面地介绍了静力和动力弹塑性分析方法，有利于读者掌握其基本概念和方法；对混凝土和钢筋混凝土构件塑性极限分析的基本原理和方法，通过较多实例分析予以阐述，有利于读者理解基本原理和掌握分析方法。

本书可作为土木工程专业研究生教材及本科高年级学生的选修课教材，也可供相关专业的科研及设计人员参考。

* * *

责任编辑：岳建光

责任校对：陈晶晶 党 蕾

第二版前言

这次再版修订工作，除了对第一版的不妥之处进行修订之外，主要补充了以下内容：

(1) 补充了“关于屈服条件和本构关系的进一步说明(1.2.5节)”，以便加深读者对这两个基本概念的理解。

(2) 补充了我国《混凝土结构设计规范》推荐的混凝土受压、受拉损伤本构关系。

(3) 由于在混凝土结构非线性分析中，约束混凝土的本构关系应用较多，故补充了“约束混凝土的应力-应变关系(3.8节)”。

(4) 补充了“第7章 动力弹塑性分析”，原第7章改为第8章。内容包括一般的动力弹塑性分析、增量动力分析以及基于增量动力分析的地震易损性分析方法。

西安建筑科技大学梁兴文和长安大学叶艳霞对本书进行修订。研究生陆婷婷、梁丹、党争、邢朋涛、王英俊、党王祯等做了部分计算或绘制了部分插图，在此对他们表示衷心的感谢！

鉴于作者水平有限，书中难免有错误或不妥之处，敬请读者批评指正。

第一版前言

混凝土结构非线性分析在土木工程各个领域广泛应用,尤其是在结构工程、防灾减灾及防护工程等学科领域内应用更广。因此,对于从事这些领域学习与研究的研究生和本科高年级学生,掌握和了解一些混凝土结构非线性方法是非常必要的。

本书是根据作者10余年来为结构工程和防灾减灾及防护工程硕士研究生讲授“混凝土结构非线性分析”的讲稿,经补充编写而成的,主要阐述了混凝土结构的非线性全过程分析以及塑性极限分析方法。本课程的教学目的,是使学生从原理上和问题的本质上去认识混凝土结构的受力和变形性能,为从事研究工作打下理论基础,并掌握基本的研究方法。

全书共分7章。第1章简要介绍了混凝土结构非线性分析中涉及的一些塑性力学基本概念;第2、3、4章介绍了混凝土结构非线性全过程分析的基本原理和方法;第5、6章介绍了混凝土杆系结构非线性全过程分析及静力弹塑性分析方法;第7章介绍了混凝土结构塑性极限分析的基本原理和方法。

为了培养学生分析问题、解决问题的能力及创新能力,本书不追求相关问题的全面性,而是举一反三,尽可能地将问题的来龙去脉叙述清楚,使学生掌握相关问题的研究思路和方法。例如,关于混凝土的强度准则和本构关系,目前可供选用的有好多种,如全面论述,则将占用较大篇幅,本书在选材时,仅选取其中有代表性的一些,对其建立的思路和方法进行了较详细的论述。

关于混凝土结构极限分析的专著很多,但大多数是关于结构整体的极限分析,对于混凝土及钢筋混凝土构件的极限分析很少,而后者在研究构件性能及建立承载力计算公式时是非常有用的,本书在这方面为读者提供了一种分析方法。

目前,在基于结构性能的抗震设计理论与方法研究方面,静力弹塑性分析方法是一个有力的工具。但此法尚处于研究阶段,还没有出版有关专著。为了使学生对这一方法有所了解,本书专列一章,对有影响的几种方法予以介绍。

本书由西安建筑科技大学梁兴文(第1、2、3、6、7章)和长安大学叶艳霞(第4、5章)编写。资深教授童岳生先生主审本书,并提出了许多宝贵的意见。研究生文保军、陶松平、刘昶宏和赵风雷为本书绘制了部分插图。特在此对他们表示诚挚的谢意。

本书在编写过程中参考了大量的国内外文献,引用了一些学者的资料,这在每章的参考文献中已列出,特在此向其作者表示感谢。

希望本书能为读者的学习和工作提供帮助。鉴于作者水平有限,书中难免有错误及不妥之处,敬请读者批评指正。

目 录

第 1 章 非线性分析基础	1
1.1 应力与应变分析	1
1.1.1 物体内任意一点的应力状态	1
1.1.2 应力不变量	1
1.1.3 主应力求解	3
1.1.4 八面体正应力和剪应力	4
1.1.5 应变张量及其分解	4
1.2 塑性理论中几个基本概念	5
1.2.1 基本概念	5
1.2.2 实例分析	6
1.2.3 屈服条件	7
1.2.4 本构方程	8
1.2.5 关于屈服条件和本构关系的进一步说明	9
1.3 混凝土结构非线性分析的意义及特点	10
1.3.1 混凝土结构非线性分析的意义	10
1.3.2 混凝土结构非线性分析的主要方法及其特点	10
参考文献	11
第 2 章 混凝土强度准则	12
2.1 混凝土破坏曲面的特点及表述	12
2.1.1 混凝土的破坏类型及其特点	12
2.1.2 混凝土破坏曲面的特点及其表述	12
2.2 古典强度理论	14
2.2.1 最大拉应力强度准则 (Maximum-Tensile-Stress Criterion (Rankine, 1876))	14
2.2.2 最大拉应变强度准则 (Maximum-Tensile-Strain Criterion (Mariotto, 1682))	15
2.2.3 最大剪应力强度准则 (Shearing-Stress Criteria)	15
2.3 混凝土强度准则	16
2.3.1 二参数强度准则	16
2.3.2 三参数强度准则	20
2.3.3 四参数强度准则	21
2.3.4 五参数强度准则	24
参考文献	37
第 3 章 材料本构模型	38
3.1 一般说明	38
3.2 混凝土单轴受力应力-应变关系	38
3.2.1 混凝土单向受压应力-应变关系	38
3.2.2 混凝土单向受拉应力-应变关系	40

3.3 混凝土非线性弹性本构模型	40
3.3.1 混凝土线弹性应力 - 应变关系	40
3.3.2 混凝土非线性弹性全量型本构模型	43
3.3.3 混凝土非线性弹性增量型本构模型	45
3.4 混凝土弹塑性本构模型	52
3.4.1 混凝土弹塑性增量理论	52
3.4.2 混凝土弹塑性全量理论	54
3.5 混凝土损伤本构模型	56
3.5.1 损伤力学的基本概念	56
3.5.2 单轴受力状态下混凝土损伤本构模型	58
3.5.3 多轴受力状态下混凝土损伤本构模型	62
3.5.4 混凝土动态损伤本构模型	66
3.6 钢筋的本构模型	69
3.6.1 单向加载下钢筋的应力 - 应变关系模型	69
3.6.2 反复加载下钢筋的应力 - 应变关系模型	69
3.7 钢筋与混凝土的粘结 - 滑移本构模型	71
3.7.1 钢筋与混凝土的粘结	71
3.7.2 粘结强度的计算	72
3.7.3 单调荷载下粘结应力 - 滑移本构模型	76
3.7.4 反复荷载下粘结 - 滑移本构模型	80
3.8 约束混凝土的应力 - 应变关系	82
参考文献	85
第4章 混凝土结构非线性全过程分析	88
4.1 有限元分析模型	88
4.1.1 整体式模型	88
4.1.2 分离式模型	89
4.1.3 组合式模型	89
4.1.4 嵌入式滑移模型	92
4.2 钢筋与混凝土之间的联结单元	95
4.2.1 双弹簧联结单元	96
4.2.2 四边形滑移单元	97
4.3 单元开裂和屈服后的处理	99
4.3.1 裂缝的模拟	99
4.3.2 混凝土开裂、破坏后的处理	102
4.3.3 钢筋单元达到屈服条件后的处理	104
4.3.4 联结单元破坏后的处理	104
4.4 非线性问题的基本解法	105
4.4.1 非线性问题的基本解法	105
4.4.2 考虑结构负刚度的一些算法	107
4.4.3 考虑时间效应的非线性解法	108
4.4.4 非线性分析步骤	109
参考文献	110

第 5 章 混凝土杆系结构有限元分析	112
5.1 混凝土构件截面分析	112
5.1.1 纤维截面分析模型	112
5.1.2 屈服面模型	116
5.1.3 多弹簧截面模型	118
5.2 混凝土构件分析	121
5.2.1 一般杆件非线性有限元分析	121
5.2.2 钢筋混凝土杆件非线性分析	123
5.3 混凝土杆系结构有限元分析	124
5.3.1 一般说明	124
5.3.2 层模型的刚度矩阵	127
5.3.3 杆系模型的刚度矩阵	129
5.3.4 杆系-层模型的刚度矩阵	138
5.3.5 结构动力非线性有限元分析	139
5.4 杆系结构非线性分析实例	142
5.4.1 SRC 框架结构非线性分析	142
5.4.2 复杂高层建筑结构整体非线性分析	142
参考文献	145
第 6 章 静力弹塑性分析	147
6.1 基本原理和方法	147
6.1.1 静力弹塑性分析方法的基本假定	147
6.1.2 等效单自由度体系	147
6.1.3 目标位移	150
6.1.4 水平荷载的加载模式	154
6.1.5 实施步骤	155
6.2 适应谱 Pushover 分析方法	156
6.3 振型 Pushover 分析方法	157
6.3.1 单自由度弹性体系的地震反应	157
6.3.2 多自由度弹性体系的地震反应及 Pushover 分析	158
6.3.3 多自由度非弹性体系的地震反应及 Pushover 分析	159
6.3.4 对振型 Pushover 分析方法的几点改进	161
参考文献	165
第 7 章 动力弹塑性分析	167
7.1 动力弹塑性分析	167
7.1.1 恢复力模型	167
7.1.2 地震波的选取	171
7.1.3 地震动强度指标的选取	176
7.1.4 动力弹塑性分析实例	176
7.2 增量动力分析	179
7.2.1 增量动力分析的基本原理与方法	179
7.2.2 基于增量动力分析的结构地震易损性分析	182
7.2.3 结构地震易损性分析实例	184

参考文献	188
第 8 章 混凝土结构极限分析	190
8.1 结构极限分析的基本原理及方法	190
8.1.1 结构极限分析必须满足的三个条件	190
8.1.2 结构极限分析的基本假设	190
8.1.3 极限定理	190
8.1.4 求极限荷载的具体方法	191
8.1.5 结构的极限分析与极限设计	191
8.2 混凝土构件极限分析	192
8.2.1 塑流变形	192
8.2.2 内功计算	193
8.2.3 应用实例	195
8.3 钢筋混凝土构件极限分析	198
8.3.1 钢筋混凝土隔板 (Diaphragm) 的受剪强度	199
8.3.2 钢筋混凝土梁的受剪强度	201
8.4 钢筋混凝土板的极限分析	203
8.4.1 上限解法	203
8.4.2 下限解法	214
参考文献	219

第 1 章 非线性分析基础

混凝土结构非线性分析涉及塑性力学中的一些基本概念。为了便于自学及后续各章节引用，本章对其中的一些主要概念作简要介绍。

1.1 应力与应变分析

1.1.1 物体内部任意一点的应力状态

为了分析物体内部任意一点的应力状态，在其内取出包含该点在内的一个微元六面体，其边长分别为 Δx 、 Δy 和 Δz ，并选取三个坐标轴分别与六面体的各面平行，如图 1.1.1 所示。将六面体每个面上的总应力沿坐标轴方向分解为 3 个应力分量，即分解为一个正应力和两个剪应力，这样 6 个面共有 18 个应力分量。对于六面体的两对面，即平行于同一坐标面的两对面，当相应的边长趋近于零时，实际上变为同一截面的两对面，但外法线方向相反，因而这两对面上的应力或应力分量必然大小相等而方向相反。这样，一点的应力状态可以用 3 个相邻面上的 9 个应力分量来表示，即

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1.1.1)$$

式中， σ_{ij} 表示应力张量 (stress tensor)； $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \dots$ 表示应力张量的分量。其中第一个下标表示应力所在平面，第二个下标表示应力平行于哪个坐标轴。为简洁起见，在式 (1.1.1) 中将 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ 简写为 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 。

在张量运算中，常用同一个字母表示同一物理量，这一物理量的不同分量则用不同的下标表示。所以，应力张量也可用下式表示

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1.1.2)$$

1.1.2 应力不变量

如上所述，混凝土材料单元内部任一点的应力状态完全由应力张量 σ_{ij} 的分量确定。而经过同一点的不同斜面上的应力是随斜面的方向

而变化的，当斜面变化到某一方向，其法线方向余弦为 n_1, n_2, n_3 时，该斜面上的剪应力分量都等于零，则该斜面称为主平面 (principal plane)，其法线方向 n_j 称为主方向 (principal direction)，该斜面上的正应力称为主应力 (principal stress)。在主方向 n_j 上，有下列

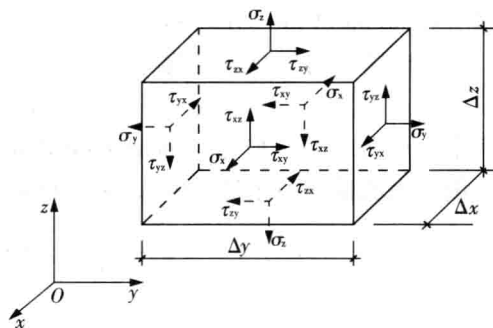


图 1.1.1 一点的应力分量

关系^[1.6]

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0 \quad (1.1.3)$$

式中, $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ 为 Kronecher 符号, 并满足 $i = j, \delta_{ij} = 1; i \neq j, \delta_{ij} = 0$ 。其矩阵表达式为

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.1.4)$$

式 (1.1.3) 是关于 (n_1, n_2, n_3) 的三个线性齐次方程的方程组, 当且仅当系数行列式等于零时这一方程组才有解, 即

$$|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0 \quad (1.1.5)$$

上式展开后可得到关于 σ 的一个三次方程

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (1.1.6)$$

其中

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_{ii} \quad (1.1.7)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \\ &= \frac{1}{2} (I_1^2 - \sigma_{ij} \sigma_{ij}) \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} - \frac{1}{2} I_1 \sigma_{ij} \sigma_{ji} + \frac{1}{6} I_1^3 \quad (1.1.9)$$

如用主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 表达, 则有

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 \\ I_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

方程 (1.1.6) 有三个实根, 也即可以求出三个主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 。对于给定的应力状态, 其主应力是确定的, 即其大小和方向与坐标轴的选取无关。由此可以推断, I_1, I_2 和 I_3 也必定是与坐标轴的选择无关的量。这三个量分别称为应力张量的第一、第二和第三不变量 (invariant of the stress tensor)。

有时将应力张量表示为

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma_m \delta_{ij} \quad (1.1.11)$$

其中, σ_m 称为平均应力 (mean normal stress) 或纯静水应力 (pure hydrostatic stress); s_{ij} 称为偏应力或偏应力张量 (deviatoric stress tensor), 表示纯剪状态。 σ_m 和 s_{ij} 的表达式分别为

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} I_1 \quad (1.1.12)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} \quad (1.1.13)$$

与方程 (1.1.5) 类似, 可得方程为

$$|s_{ij} - s \delta_{ij}| = 0 \quad (1.1.14)$$

展开后可得

$$s^3 - J_1 s^2 - J_2 s - J_3 = 0 \quad (1.1.15)$$

其中

$$J_1 = s_{ii} = s_x + s_y + s_z = 0 \quad (1.1.16)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji} = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \quad (1.1.17)$$

$$J_3 = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} = \begin{vmatrix} s_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & s_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & s_z \end{vmatrix} \quad (1.1.18)$$

当用主应力表达时, 则有

$$J_1 = s_1 + s_2 + s_3 = 0 \quad (1.1.19)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (1.1.20)$$

$$J_3 = \frac{1}{3} (s_1^3 + s_2^3 + s_3^3) = s_1 s_2 s_3 \quad (1.1.21)$$

J_1, J_2 和 J_3 分别称为应力偏量的第一、第二和第三不变量 (invariant of the deviatoric stress tensor)。

应当强调, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, I_1, I_2, I_3, J_2, J_3$ 都是与参考轴的坐标系选择无关的标量不变量。而三个独立不变量 I_1, J_2 和 J_3 分别为应力的一次量、二次量和三次量, 其中 I_1 表示与纯静水应力有关的量, 而 J_2, J_3 表示纯剪状态的不变量。

1.1.3 主应力求解

由于 $J_1 = 0$, 所以方程 (1.1.15) 可写成

$$s^3 - J_2 s - J_3 = 0 \quad (1.1.22)$$

$$\text{令} \quad s = \rho \cos \theta \quad (1.1.23)$$

将式 (1.2.23) 代入式 (1.2.22), 可得

$$\cos^3 \theta - \frac{J_2}{\rho^2} \cos \theta - \frac{J_3}{\rho^3} = 0$$

将上式与三角恒等式

$$\cos^3 \theta - \frac{3}{4} \cos \theta - \frac{1}{4} \cos 3\theta = 0$$

比较后可得

$$\rho = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \quad (1.1.24)$$

$$\cos 3\theta = \frac{4J_3}{\rho^3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \quad (1.1.25)$$

则

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{4J_3}{\rho^3} \right) \quad (1.1.26)$$

对于主应力 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, θ 的变化范围为 $0 \leq \theta \leq \pi/3$, 相应的 $\cos \theta$ 值为

$$\cos \theta \quad \cos \left(\theta - \frac{2}{3} \pi \right) \quad \cos \left(\theta + \frac{2}{3} \pi \right) \quad (1.1.27)$$

将式 (1.1.23)、式 (1.1.24) 和式 (1.1.27) 代入式 (1.1.15), 得到主应力的计算公式

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix} + \sigma_m \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \cos \left(\theta - \frac{2}{3}\pi \right) \\ \cos \left(\theta + \frac{2}{3}\pi \right) \end{Bmatrix} + \frac{I_1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (1.1.28)$$

由上式可见, 求解主应力的问题现在转化为不变量 I_1, J_2 和 θ 的求值。

1.1.4 八面体正应力和剪应力

设物体内某点的主应力方向及大小均为已知, 通过该点作一特殊斜面, 使斜面的法线与三个主应力方向均具有相等的夹角, 该斜面称为八面体平面 (octahedral plane)。设 x_1, x_2, x_3 为主应力轴, 则八面体平面的法线 n_i 有

$$n_i = [n_1 \quad n_2 \quad n_3] = \frac{1}{\sqrt{3}} [1 \quad 1 \quad 1] \quad (1.1.29)$$

八面体平面上的法向应力 σ_n 可表示为

$$\sigma_{\text{oct}} = \sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \quad (1.1.30)$$

将式 (1.1.29) 代入上式, 得

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}I_1 = \sigma_m \quad (1.1.31)$$

可见, 八面体正应力等于平均应力, 且与应力张量第一不变量有关。

根据八面体总应力、正应力及剪应力之间的关系, 可得

$$\begin{aligned} \tau_{\text{oct}}^2 &= (\sigma_1 n_1)^2 + (\sigma_2 n_2)^2 + (\sigma_3 n_3)^2 - \sigma_{\text{oct}}^2 \\ &= \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \end{aligned}$$

上式经整理后得

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{1}{3}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \left(\frac{2}{3}J_2\right)^{1/2} \quad (1.1.32)$$

可见, 八面体剪应力与应力张量的第二不变量密切相关。

1.1.5 应变张量及其分解

在小变形条件下, 应变与位移的关系为

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}$$

式中, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ 表示工程应变分量。如令

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz}, \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\gamma_{zx}$$

且有

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}, \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}, \quad \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz}$$

则一点的应变分量组成一个对称应变张量，即

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (1.1.33)$$

与应力张量相似，应变张量也可分解为应变球张量与应变偏张量，即

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_m \end{bmatrix} \quad (1.1.34)$$

$$\varepsilon_m = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)/3$$

式中， ε_m 为平均应变。

式 (1.1.34) 右边第一项为应变球张量，第二项为应变偏张量，以 e_{ij} 表示，即

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} e_x & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{xy} & e_y & e_{yz} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_m \end{bmatrix} \quad (1.1.35)$$

则应变张量可简写为

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_m \delta_{ij} + e_{ij} \quad (1.1.36)$$

应变球张量具有各方向相同的正应变，它代表体积的改变。应变偏张量的 3 个正应变之和为零，说明它没有体积变形，只反映形状的改变。

应变偏张量的 3 个不变量分别以 J'_1, J'_2, J'_3 表示为

$$J'_1 = e_x + e_y + e_z = 0$$

$$J'_2 = \frac{1}{6}[(e_x - e_y)^2 + (e_y - e_z)^2 + (e_z - e_x)^2 + 6(e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2)] \quad (1.1.37)$$

$$J'_3 = e_x e_y e_z + 2e_{xy} e_{yz} e_{zx} - e_x^2 e_{yz} - e_y^2 e_{zx} - e_z^2 e_{xy}$$

1.2 塑性理论中几个基本概念

1.2.1 基本概念

1. 屈服条件

物体内某一点或构件某一截面开始出现塑性变形时所受的应力或内力应满足的条件，称为屈服条件，有时也称为屈服准则或塑性条件。表示屈服条件的函数关系称为屈服函数。屈服函数是弹性与塑性阶段之间的界限，应力或内力落在屈服面以内的状态称为弹性状态，应力或内力落在屈服面上的状态称为塑性状态。屈服面是由达到屈服条件

的各种应力或内力状态点集合而成的，在简单拉伸情况下，它相当于拉伸曲线上的屈服点。

2. 本构关系

在研究材料的力学性能时，材料在各种作用下的应力 - 应变关系即材料的本构关系。当材料处于弹性状态时，其本构关系就是广义虎克定律；当材料处于弹塑性或塑性状态时，其本构关系即为非线性的应力 - 应变关系。

1.2.2 实例分析

由刚塑性材料组成的梁，截面承受拉力 N 和弯矩 M ，如图 1.2.1 所示。试分析该梁达到塑性状态时的内力与变形。

1. 平衡条件

梁达到塑性状态时，截面应力分布如图 1.2.1 (b) 所示。由截面的平衡条件可得

$$N = (h - 2y_0)bf_y \quad (1.2.1)$$

$$M = by_0f_y(h - y_0) \quad (1.2.2)$$

另外，单轴受拉及纯弯时梁截面的承载力可分别表示为

$$N_u = bhf_y \quad (1.2.3)$$

$$M_u = \frac{1}{4}bh^2f_y \quad (1.2.4)$$

由式 (1.2.1) 和式 (1.2.3) 可得

$$\frac{y_0}{h} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{N}{N_u} \right) \quad (1.2.5)$$

将上式代入式 (1.2.2) 得

$$M = \frac{1}{4}bh^2f_y \left[1 - \left(\frac{N}{N_u} \right)^2 \right] = M_u \left[1 - \left(\frac{N}{N_u} \right)^2 \right] \quad (1.2.6)$$

由上式可得

$$\frac{M}{M_u} = 1 - \left(\frac{N}{N_u} \right)^2 \quad (1.2.7)$$

令 $m = M/M_u$ ， $n = N/N_u$ ，则式 (1.2.7) 可写成

$$m + n^2 - 1 = 0 \quad (1.2.7a)$$

式 (1.2.7) 就是该梁截面的屈服条件，因为它反映了梁截面屈服时截面上的内力应满足的条件。由上述分析过程来看，梁截面的屈服条件就是截面屈服时的平衡条件或称强度条件。

在式 (1.2.7a) 中，如令 $n = 0$ ，则 $m - 1 = 0$ ，即 $M = M_u$ ，这是纯弯曲时截面的屈服条件；如令 $m = 0$ ，则 $n^2 - 1 = 0$ ，即 $N = N_u$ ，这是轴心受拉时截面的屈服条件。

将式 (1.2.7a) 绘成几何图形，如图 1.2.2 所示。当 m, n 均为正值时，则为第一象限的曲线，其对应的截面应力状态为图 1.2.1 (b)。如 m, n 采用不同的正负号，则得整

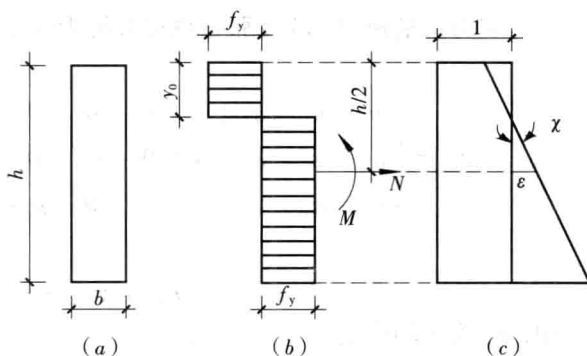


图 1.2.1 梁截面上的应力 - 应变分布

个曲线，图 1.2.2 所示即为屈服曲线。如 M 与 N 的组合点落在曲线内部，则截面是安全的；如 M 与 N 的组合点落在曲线上，则截面处于屈服状态。

2. 截面的塑性变形

如果截面应变符合平截面假定，则其应变图如图

1.2.1 (c) 所示。由几何关系得

$$\varepsilon = \chi \left(\frac{h}{2} - y_0 \right) \quad (1.2.8)$$

式中， ε 表示截面形心轴处的线应变； χ 表示截面的曲率。将式 (1.2.5) 代入上式得

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \chi h n \quad (1.2.9)$$

注意，因截面已处于塑性状态而不是弹性状态，故上式中的 ε 不等于 N/EA ，同样 χ 也不等于 M/EI ，图 1.2.2 偏心受力截面的屈服曲线其中 A ， I 为梁截面面积和惯性矩。

由式 (1.2.3) 和式 (1.2.4) 可得 $h = 4M_u/N_u$ ，将其代入式 (1.2.9)，并令

$$E = \varepsilon N_u \quad k = \chi M_u \quad (1.2.10)$$

则得

$$E = 2kn \quad (1.2.11)$$

上式表示极限状态时，截面上的复合变形 ε 和 χ 与内力之间的关系，一般称为本构关系。由于有两个未知变形 ε 和 χ ，而只有一个方程，故只能求出两个变形之间的相对关系，或假定一个变形而得另一个变形。

1.2.3 屈服条件

1. 普遍公式

令 $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots$ 表示广义应力（例如法向应力、剪应力等或轴力、弯矩和剪力等），则屈服条件可表示为

$$f(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots) = 0 \quad (1.2.12)$$

式中， $f(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots)$ 表示屈服函数。

在上例中，如用式 (1.2.12) 的形式表示屈服条件，则式 (1.2.7a) 可写为

$$f(m, n) = m + n^2 - 1 = 0 \quad (1.2.7b)$$

在用应力表示的屈服函数中，由于六个应力分量的数值与所选取的坐标方向有关，采用不同的坐标方向，就会得到不同数值的应力分量，使用极不方便。因此，如果材料是各向同性的，则可用与坐标方向无关的量来表示屈服函数。一般选用主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 、应力（偏）张量的不变量 I_1, J_2, J_3 来表达，或采用圆柱坐标系 (ξ, r, θ) 、八面体应力坐标轴来表示，即

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, c) = 0 \quad (1.2.13)$$

$$f(I_1, J_2, J_3, c) = 0 \quad (1.2.14)$$

$$f(\xi, r, \theta, c) = 0 \quad (1.2.15)$$

$$f(\sigma_{\text{oct}}, \tau_{\text{oct}}, \theta, c) = 0 \quad (1.2.16)$$

式中， c 是与材料有关的常数。