智立方
中学生辅导丛书

李正兴 著

高中数学专题精编

复数
排列组合 概率统计

二项式定理

上海科学普及出版社

智立方

中学生辅导丛书

李正兴 著

高中数学专题精编

复数 排列组合 概率统计

二项式定理

上海科学普及出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学专题精编. 复数、排列组合、概率统计/李正兴著. --上海：上海科学普及出版社，2014. 8

ISBN 978 - 7 - 5427 - 6165 - 1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. ①G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 147130 号

责任编辑　张建青

高中数学专题精编

复数　排列组合　概率统计

李正兴　著

上海科学普及出版社出版发行

(上海中山北路 832 号　邮政编码 200070)

http://www.pspsh.com

各地新华书店经销　上海叶大印务发展有限公司印刷

开本 787×1092　1/16　印张 12　字数 292 000

2014 年 8 月第 1 版　2014 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978 - 7 - 5427 - 6165 - 1　定价：22.00 元

序

300余万字的《高中数学专题精编》丛书，由昂立智立方中学生教育研究院院长卢影精心策划，经历了我整整两年的笔耕，终于如愿完成并付梓在即. 这是我退休之后完成的第六套数学教育专著，也是我15年来出版的所有数学教育专著中篇幅最长、花费工夫最大、写作时间最长的一套.

《高中数学专题精编》分为8册，根据课程标准以及近年来高考数学命题的现状及改革方向，遵循考纲、注重思维、立足各版教材，目标是在专题上有所突破，在夯实基础的同时，全面提升学生的能力和素质. 它涵盖了高中数学的所有知识板块，并以知识板块为分册依据，每个分册针对一至两个板块，满足学生在这些知识点上的学习需求. 而在谋篇布局上，既考虑了高一、高二学生新授知识的需要，又考虑到高三学生迎考冲刺的需求，每个分册都由基础篇和拓展提高篇组成，力求层次清楚、坡度平稳，基础一般的学生和优秀学生都能使用.

一、基础篇中章与章之间、讲与讲之间环环相扣. 每讲从"知识储备"、"双基回眸"、"例题精讲"、"易错警示"、"链接高考"、"专项训练"等六个方面实施"推进式"辅导，每章最后给出若干份阶段检测卷来对整章知识进行全面考核.

1. "知识储备"：重要知识点一览无余，从而达到消除盲点、贯通知识、建构知识链的目标. 你想要完整地夯实数学基础，你想在数学高考中获得高分，对知识点的整理归纳是必不可少的重要步骤.

2. "双基回眸"：复习过程中的"热身"，通过3～5题紧扣本讲知识的基础小题，巩固"通识"，掌握"通法"，带给高中学生攻克数学堡垒的灵感.

3. "例题精讲"：针对每讲应掌握的知识点，给出若干紧扣考纲、能呈现基础知识和解题通法的典型例题，并给出"策略点击"与详细的解法步骤. 例题的涉及面广，题型多样，通过一题多解的方式，倡导多角度、多维度地分析问题、突破难点，引导学生拓展思维、循序渐进、由此及彼、逐步深入，进而能举一反三，掌握若干解题方法.

4. "易错警示"：帮助学生寻找易错点，进行查漏补缺. 对大多数学生而言，在数学学习过程中常有一个瓶颈存在，就是在每次测试中低级错误不断，问题出在对知识点以及解题通法不能做到"了然于胸". 解决这一问题，是短时间内提高成绩的有效途径.

5. "链接高考"：高中阶段的数学学习完成后，大多数学生总是要参加数学高考的，所以在高一、高二阶段的数学学习过程中，渗透高考的要求是必需的. 这里所选的例题通常是经历时间洗礼或近年来在高考(或自主招生考试)中出现的具有创新精神的精彩好题，这些例题典型性强，能启迪思维，揭示规律性. 同时，对近年来高考命题的走向进行科学分析，展示解题过程中的逻辑之美、节奏之美、数学思想之美.

6. "专项训练"：每讲至少给出一份专项训练卷(重点专项给出A、B两份甚至A、B、C三份专项训练卷)，题型新而全，基础题、中档题、难题合理布局，并大多给出详解. 通过专项

训练可以激发学生的潜能，进一步深入理解和掌握相关知识点，提高解题的能力和技巧.

二、拓展提高篇所讲的是体现能力要求的重点专题，充满了知识的交汇、方法与技巧的展示、数学思想的顿悟，是高考中常出压轴题之所在，也是名牌大学自主招生的“主打板块”.所选例题大多是近年来出现的一些极其典型的试题，浓缩了一种纯粹的高考精华，体现了一种全新的备考理念，既是基本方法的科学总结，又是决战千里的锦囊妙计.剑指难点，迎战不慌！

本人从事高中数学教育工作30余年，退休至今一直沉潜在这一领域也已有7年，我认为一名优秀的高中数学教师对教学过程应当有通盘考虑，对纵向基础知识的梳理和横向各板块知识的综合应当有清晰的认识与掌控.如对每一节课如何引入和展开，知识层面上如何发散，如何抓住学生的注意力，如何激发学生的兴趣，课后如何精选习题和巩固练习，如何进行检测反馈，都要作出独具匠心的安排.我崇尚戏剧式的数学教学，追求完美的有节奏感的深入推进，上每堂专题课都如同导演一场舞台剧，序幕、情节展开、高潮、升华、思考，一环紧扣一环，引领学生走向成功.

胡适有言：“成功不必在我，功力必不唐捐”.在丛书完稿之时，填词一首，是生命的感受，不吐不快.

金　缕　曲

数苑四十载，在教坛，华发染鬓，才情尽送.
叹高次方程无解，世事原来不公.
难将息，灵泉源涌，五色尚存生花笔，向人间，纸墨相吟弄.
夜深沉，海上风.
青春岁月消踪，想当年，意气勃发，今已成空.
一曲清歌浦江畔，汗牛也要充栋.
君不见，江湖澒洞.
得失无关文章事，勤耕耘.
莘莘学子有用，脚乃健，心犹雄.

每当我想起钱锺书先生的诗句：“睡乡分境隔山川，枕坼槐安各一天，那得五丁开路手，为余凿梦两通连”，更激励我无怨无悔地做学生们的“开路手”，为具有梦想的学生们写作，他们的受益是我的快乐.我不会在喧闹的人世间迷失方向，我找到了最适合我的天性的生活，对我而言是理想的生活.感谢我的妻子杨惠芬，没有她的支持，我的2 000余万字、35部专著是不可能写出来的，亲情使我获得生命的享受，我坚信，大自然提供的只是素材，唯有亲情才能把素材创造成完美的作品，我获得的任何细小的成功都有她的陪伴，这就是阳光下绵亘着人生简朴的幸福.我还要感谢昂立智立方中学生教育研究院高中数学教研组长李璐璐老师帮我校对了一部分书稿，责任编辑张建青先生8年来为出版我的书所付出的辛勤劳动.

限于本人水平，书中难免存在的疏漏之处，欢迎读者批评指正.

李正兴

2014年夏于海上述而斋

目　　录

基　础　篇

（每讲配有专项训练）

拓 展 提 高 篇

基 础 篇

JICHUPIAN

第一章　复　　数

第一讲　复数的概念与运算、复数加减法的几何意义

一、知识储备

1. 复数的概念

(1) 复数：形如 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 的数称为复数. a 称为复数的实部，b 称为复数的虚部. 用大写 $\mathbf{C}$ 表示复数集.

(2) 复数集与其他数集之间的关系：$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}\subsetneqq\mathbf{C}$.

(3) 几个性质：

① $z=a+bi\in\mathbf{R}\Leftrightarrow b=0(a,b\in\mathbf{R})$.

② $z=a+bi$ 是虚数$\Leftrightarrow b\neq0(a,b\in\mathbf{R})$.

③ $z=a+bi$ 是纯虚数$\Leftrightarrow a=0$ 且 $b\neq0(a,b\in\mathbf{R})\Leftrightarrow z+\bar{z}=0(z\neq0)\Leftrightarrow z^2<0$.

④ $a+bi=c+di\Leftrightarrow a=c$ 且 $b=d(a,b,c,d\in\mathbf{R})$，$z=a+bi=0(a,b\in\mathbf{R})\Leftrightarrow\begin{cases}a=0,\\b=0.\end{cases}$

一般地，两个复数只能说相等或不相等，而不能比较大小.

(4) 复平面：建立了直角坐标系表示复数的平面叫做复平面.

阐述：① 复数集与复平面上所有点的集合建立一一对应关系，即复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 与复平面上的点 $Z(a,b)$ 一一对应.

② 实轴：x 轴，表示实数的点都在实轴上；

虚轴：y 轴(除去原点)，表示纯虚数的点都在虚轴上.

(虚轴的单位是 1 不是 i，坐标原点属于实轴而不属于虚轴.)

(5) 共轭复数：当两个复数的实部相等，虚部互为相反数时，这两个复数称为共轭复数. 复数 z 的共轭复数记作 $\bar{z}$.

(6) 复数的模：复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 在复平面上对应点 $Z(a,b)$ 与坐标原点间的距离称为复数的模(绝对值)，记为区域 $|a+bi|$.

(7) 复数的向量表示：复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 与复平面内点 $Z(a,b)$ 一一对应，连结 OZ，并把方向指向 Z，得到向量 $\overrightarrow{OZ}$，则复数 z 与向量 $\overrightarrow{OZ}$ 一一对应. 可用向量 $\overrightarrow{OZ}$ 表示复数 z.

(用点 $Z(a,b)$ 与向量 $\overrightarrow{OZ}$ 表示复数 z 都是复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 的几何表示.)

2. 复数代数形式的运算

(1) 加法：$z_1=a+bi$，$z_2=c+di(a,b,c,d\in\mathbf{R})$.

$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.

(2) 减法：$z_1=a+b\mathrm{i}, z_2=c+d\mathrm{i}(a,b,c,d\in\mathbf{R})$.

$z_1-z_2=(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}$.

(3) 乘法：$z_1=a+b\mathrm{i}, z_2=c+d\mathrm{i}(a,b,c,d\in\mathbf{R})$.

$z_1\cdot z_2=(a+b\mathrm{i})\cdot(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(bc+ad)\mathrm{i}$.

(4) 除法：$z_1=a+b\mathrm{i}, z_2=c+d\mathrm{i}(a,b,c,d\in\mathbf{R})$.

$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=\dfrac{(a+b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}{(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}\,(c+d\mathrm{i}\neq0)$.

(5) 复数加法与减法的几何意义：

① 加法的几何意义如图 1－1 所示.

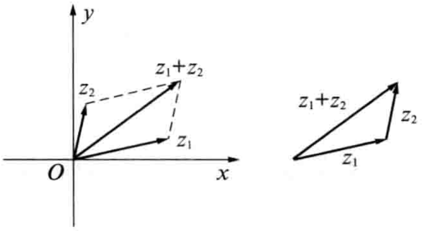

图 1－1

② 减法的几何意义如图 1－2 所示.

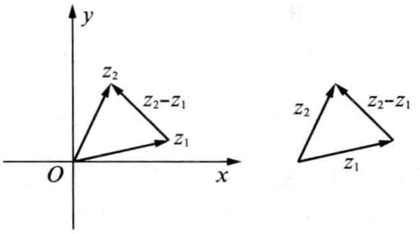

图 1－2

(6) 有关 i 的运算：

① i^n 的周期性：$\mathrm{i}^2=-1, \mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i}, \mathrm{i}^{4n+2}=-1, \mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i}, \mathrm{i}^{4n}=1$.

$\mathrm{i}^n+\mathrm{i}^{n+1}+\mathrm{i}^{n+2}+\mathrm{i}^{n+3}=0(n\in\mathbf{N}^*)$

② $(1\pm\mathrm{i})^2=\pm2\mathrm{i}, \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\mathrm{i}, \dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$.

(7) w 与 $\overline{w}$ 的性质：

$z^3=1$ 的三个根分别为：$1, -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}, -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. 记 $w=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，则 $\overline{w}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

则有 $w^3=1, \overline{w}^3=1, 1+w+w^2=0, 1+\overline{w}+\overline{w}^2=0$. $w^n+w^{n+1}+w^{n+2}=0(n\in\mathbf{N}^*)$.

$\overline{w}=w^2, \overline{w}^2=w, w=\dfrac{1}{\overline{w}}, \overline{w}=\dfrac{1}{w}$.

二、双基回眸

1. 设 x、y 为实数，且 $\dfrac{x}{1-\mathrm{i}}+\dfrac{y}{1-2\mathrm{i}}=\dfrac{5}{1-3\mathrm{i}}$，则 $x+y=$________.

2. 已知 $z=1+\mathrm{i}$,若 $\dfrac{z^2+az+b}{z^2-z+1}=1-\mathrm{i}$,则 $\begin{vmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ 的值为________.

3. 已知复数 z_1 满足 $(z_1-2)(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$(i 为虚数单位),复数 z_2 的虚部为 2,且 $z_1\cdot z_2$ 是实数,则 $z_2=$________.

4. 在复平面中,已知正方形 $ABCD$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(1,2)$,$B(-2,1)$,$C(-1,-2)$,则 D 点的坐标为________.

解法导析: 1. 由 $\dfrac{x}{1-\mathrm{i}}+\dfrac{y}{1-2\mathrm{i}}=\dfrac{5}{1-3\mathrm{i}}$,知 $\dfrac{x}{2}(1+\mathrm{i})+\dfrac{y}{5}(1+2\mathrm{i})=\dfrac{5}{10}(1+3\mathrm{i})$.

整理得 $(5x+2y-5)+(5x+4y-15)\mathrm{i}=0$.

故 $\begin{cases}5x+2y-5=0,\\5x+4y-15=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1,\\y=5.\end{cases}$ $\therefore$ $x+y=4$.

2. $\dfrac{z^2+az+b}{z^2-z+1}=\dfrac{(1+\mathrm{i})^2+a(1+\mathrm{i})+b}{(1+\mathrm{i})^2-(1+\mathrm{i})+1}=\dfrac{(a+b)+(a+2)\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=(a+2)-(a+b)\mathrm{i}$.

由 $(a+2)-(a+b)\mathrm{i}=1-\mathrm{i}$,得 $\begin{cases}a+2=1,\\-(a+b)=-1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=2,\end{cases}$

从而有 $\begin{vmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-5$.

3. $\because$ $(z_1-2)(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$,$\therefore$ $z_1=2-\mathrm{i}$. 设 $z_2=a+2\mathrm{i}$,$a\in\mathbf{R}$.

$z_1\cdot z_2=(2-\mathrm{i})(a+2\mathrm{i})=(2a+2)+(4-a)\mathrm{i}$.

$\because$ $z_1\cdot z_2\in\mathbf{R}$. $\therefore$ $a=4$. $\therefore$ $z_2=4+2\mathrm{i}$.

4. **解法一:** 在复平面内设 D 点对应复数为 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形. $\therefore\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.

又 $\because$ $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{BC}$ 对应的复数为 $(-1-2\mathrm{i})-(-2+\mathrm{i})=1-3\mathrm{i}$.

且 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{AD}$ 对应的复数为 $(a+b\mathrm{i})-(1+2\mathrm{i})=(a-1)+(b-2)\mathrm{i}$.

$\therefore$ $(a-1)+(b-2)\mathrm{i}=1-3\mathrm{i}$. 由复数相等的条件得

$\begin{cases}a-1=1,\\b-2=-3,\end{cases}$ $\therefore$ $\begin{cases}a=2,\\b=-1.\end{cases}$ 因此,D 点的坐标为 $(2,-1)$.

解法二: 由条件可知,A、C 两点在复平面内所对应的复数分别为 $1+2\mathrm{i}$ 和 $-1-2\mathrm{i}$,由此可知 $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC}$,

$\therefore$ A、C 两点恰好关于原点中心对称,原点 O 是正方形 $ABCD$ 的中心.

$\therefore$ $\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB}$,而 $-\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为 $-(-2+\mathrm{i})=2-\mathrm{i}$,

因此,D 点的坐标为 $(2,-1)$.

三、例题精讲

例 1 判断下列命题的真假. 真命题请予以证明,假命题请举出反例.

(1) 两个共轭复数的差是纯虚数;

(2) 对于任意两个复数 x、y. 若 $|x|+|y|=0$. 则 $x=y=0$;

(3) 对于任意复数 x. 若 $|x|=1$. 则 $x=-1$ 或 $x=1$;

(4) 若 x、y 是两个复数,则 $\begin{cases}x+y>0,\\xy>0\end{cases}$ 是 $\begin{cases}x>0,\\y>0\end{cases}$ 的必要而非充分条件;

(5) 若 $z_1{}^2+z_2{}^2=0$,则 $z_1=z_2=0$;

(6) 若 $|z+\mathrm{i}|=|z-\mathrm{i}|$,则 $z\in\mathbf{R}$;

(7) 若 $|z|=1$ 且 $z\neq-1$,则 $\frac{1-z}{1+z}$ 为纯虚数.

策略点击: 从实数范围向复数范围数系扩充过程中,不能随意将实数范围内成立的结论不加证明地迁移过来,也就是说对虚数和纯虚数的有关概念应有清晰的认识.

解: (1) 假命题. 设互为共轭的两复数分别为 $z=a+b\mathrm{i}$ 及 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$.
则 $z-\bar{z}=2b\mathrm{i}$ 或 $\bar{z}-z=-2b\mathrm{i}$.
当 $b\neq0$ 时,$z-\bar{z}$ 和 $\bar{z}-z$ 均为纯虚数;当 $b=0$ 时,$z-\bar{z}=0$,$\bar{z}-z=0$.
故两个共轭复数的差应是零或纯虚数.

(2) 真命题. 证明如下:$\because$ $|x|\geqslant0$,$|y|\geqslant0$,由题意 $|x|+|y|=0$,
$\therefore$ $|x|=0$ 且 $|y|=0$,即 $x=0$ 且 $y=0$,$\therefore$ $x=y=0$.

(3) 假命题. 令 $x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,$x\neq\pm1$,但 $|x|=\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right|=1$.

(4) 真命题. 先证 $\begin{cases}x+y>0,\\xy>0\end{cases}$ 是 $\begin{cases}x>0,\\y>0\end{cases}$ 的必要条件:

$\because$ $x>0$,$y>0$,即 $x,y\in\mathbf{R}$,$\therefore$ $x+y>0$,$xy>0$. 即 $\begin{cases}x+y>0,\\xy>0.\end{cases}$

再证 $\begin{cases}x+y>0,\\xy>0\end{cases}$ 不是 $\begin{cases}x>0,\\y>0\end{cases}$ 的充分条件.

令 $x=1+\mathrm{i}$,$y=1-\mathrm{i}$,不满足于 $x>0$,$y>0$,但 $x+y=2>0$,$xy=2>0$.

综上所述,$\begin{cases}x+y>0,\\xy>0\end{cases}$ 是 $\begin{cases}x>0,\\y>0\end{cases}$ 的必要而非充分条件.

(5) 假命题. 若 $z_1=1$,$z_2=\mathrm{i}$ 也有 $z_1{}^2+z_2{}^2=0$.

(6) 真命题. 证明:设 $z=a+b\mathrm{i}$(a,b 都是实数).
由原等式推出 $a^2+(b+1)^2=a^2+(b-1)^2\Rightarrow b=0$. $\therefore$ 可知 $z\in\mathbf{R}$.

(7) 假命题. 当 $z=1$ 时,$\frac{1-z}{1+z}=0$ 是一个实数.

例 2 已知 $z_1=a^2-3+(a+5)\mathrm{i}$,$z_2=a-1+(a^2+2a-1)\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$ 分别对应向量 $\overrightarrow{OZ_1}$,$\overrightarrow{OZ_2}$(O 为原点). 若向量 $\overrightarrow{Z_2Z_1}$ 对应的复数为纯虚数,求 a 的值.

策略点击: 复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 与复平面上的点 $Z(a,b)$ 一一对应,与向量 $\overrightarrow{OZ}$ 也一一对应. $\overrightarrow{Z_2Z_1}=\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}$,若 z 为纯虚数,则 $\begin{cases}\mathrm{Re}z=0,\\\mathrm{Im}(z)\neq0.\end{cases}$ 运用这些知识点,本题不难解决.

解: 设向量 $\overrightarrow{Z_2Z_1}$ 对应复数 z,$\because$ $\overrightarrow{Z_2Z_1}=\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}$,
$\therefore$ $z=z_1-z_2=a^2-3+(a+5)\mathrm{i}-[(a-1+(a^2+2a-1)\mathrm{i}]$

$=[(a^2-3)-(a-1)]+[(a+5)-(a^2+2a-1)]i$

$=(a^2-a-2)+(-a^2-a+6)i.$

$\because$ z 为纯虚数，

$\therefore \begin{cases} a^2-a-2=0, \\ -a^2-a+6\neq 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} (a-2)(a+1)=0, \\ (a+3)(a-2)\neq 0. \end{cases}$

$\therefore$ $a=-1.$

例 3 复数 $z=\dfrac{m^2-m-6}{m+3}+(m^2-2m-15)i$，求实数 m. 使得

(1) z 是实数；

(2) z 是纯虚数；

(3) z 所对应的点在复平面的第二象限.

策略点击： 复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，当 $b=0$ 时，z 是实数；当 $a=0$ 且 $b\neq 0$ 时，z 是纯虚数；当 $a<0$ 且 $b>0$ 时，z 所对应的点在第二象限.

解： $z=\dfrac{(m+2)(m-3)}{m+3}+(m+3)(m-5)i$，

(1) 要使 z 为实数，则 $\begin{cases} (m+3)(m-5)=0, \\ m+3\neq 0 \end{cases}\Rightarrow m=5$，$\therefore$ $m=5$ 时，z 是实数.

(2) 要使 z 是纯虚数，则 $\begin{cases} \dfrac{(m+2)(m-3)}{m+3}=0, \\ (m+3)(m-5)\neq 0 \end{cases}\Rightarrow m=-2$ 或 $m=3$. $\therefore$ 当 $m=-2$ 或 $m=3$ 时，z 是纯虚数.

(3) 复数 z 所对应的点在复平面上第二象限的充要条件是

$\begin{cases} \dfrac{(m+2)(m-3)}{m+3}<0, \\ (m+3)(m-5)>0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} m<-3 \text{ 或 } -2<m<3, \\ m>5 \text{ 或 } m<-3. \end{cases}$ $\therefore$ $m<-3$，

$\therefore$ 当 $m<-3$ 时，z 所对应的点在第二象限.

例 4 (1) 计算：$\dfrac{(-1+\sqrt{3}i)^3}{(1+i)^6}+\dfrac{-2+i}{1+2i}$；

(2) 已知复数 z 满足 $z+|z|=2+8i$，求 $|z|^2$.

策略点击： 对于(1)，可用 i、w 的性质解题，运算变得简洁；对于(2)，常规解法为设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$. 代入等式后，可利用复数相等的充要条件求 a,b，也可把等式变为 $z=2-|z|+8i$，两边取模求解.

解： (1) $\dfrac{(-1+\sqrt{3}i)^3}{(1+i)^6}=\dfrac{2^3\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3}{(2i)^3}=i$，$\dfrac{-2+i}{1+2i}=\dfrac{(-2+i)(1-2i)}{5}=i$，

$\therefore$ 原式$=2i$.

(2) **解法一：** 设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，代入原方程，得

$a+\sqrt{a^2+b^2}+b\mathrm{i}=2+8\mathrm{i}$，∴ $\begin{cases}a+\sqrt{a^2+b^2}=2,\\ b=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-15,\\ b=8.\end{cases}$

∴ $|z|^2=a^2+b^2=289$.

解法二：原式可化为 $z=2-|z|+8\mathrm{i}$，两边取模，得 $|z|=\sqrt{(2-|z|)^2+8^2}$，
即 $|z|^2=68-4|z|+|z|^2$，∴ $|z|=17$.
∴ $|z|^2=289$.

例 5　(1) 已知 z 是复数，$z+2\mathrm{i}$，$\dfrac{z}{2-\mathrm{i}}$ 均为实数，且 $(z+a\mathrm{i})^2$ 在复平面上对应的点在第一象限，求实数 a 的取值范围；

(2) 是否存在同时满足下列条件的复数 z：① $z+\dfrac{10}{z}$ 是实数，且 $1<z+\dfrac{10}{z}\leqslant 6$；② z 的实部和虚部都是整数；

(3) 设复数 z 满足 $|z|=5$ 且 $(3+4\mathrm{i})z$ 在复平面上对应的点在第二、四象限的角平分线上，$|\sqrt{2}z-m|=5\sqrt{2}(m\in\mathbf{R})$，求 z 和 m 的值.

策略点击：设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，再用复数相等的充要条件转化为实数问题. 即“化虚为实”，这是常用的方法. 但不同的题设条件要有不同的处理手段. 要学会从整体的角度出发去分析和求解，这就是整体思想，它贯穿整个复数内容.

解：(1) 设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，$z+2\mathrm{i}=x+(y+2)\mathrm{i}$ 为实数，故 $y=-2$.
则 $\dfrac{z}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{x-2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{1}{5}(2x+2)+\dfrac{1}{5}(x-4)\mathrm{i}$ 为实数，故 $x=4$.
从而 $z=4-2\mathrm{i}$，则 $(z+a\mathrm{i})^2=(12+4a-a^2)+8(a-2)\mathrm{i}$，由条件得
$\begin{cases}12+4a-a^2>0,\\ 8(a-2)>0,\end{cases}$ 解得 $2<a<6$，即为所求 a 的取值范围.

(2) ∵ $z+\dfrac{10}{z}\in\mathbf{R}$，设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，则 $z+\dfrac{10}{z}=x+y\mathrm{i}+\dfrac{10}{x+y\mathrm{i}}=x+y\mathrm{i}+\dfrac{10(x-y\mathrm{i})}{x^2+y^2}=x+\dfrac{10x}{x^2+y^2}+\dfrac{(x^2+y^2-10)y}{x^2+y^2}\mathrm{i}\in\mathbf{R}$. ∴ $y=0$ 或 $x^2+y^2=10$.

若 $y=0$，∵ $z+\dfrac{10}{z}>0$，∴ $z=x>0$，此时 $z+\dfrac{10}{z}=x+\dfrac{10}{x}\geqslant 2\sqrt{10}>6$，这与 $z+\dfrac{10}{z}\leqslant 6$ 矛盾.

∴ $y\neq 0$，∴ $x^2+y^2=10$. ∴ $z+\dfrac{10}{z}=2x$，即 $1<2x\leqslant 6$，得 $\dfrac{1}{2}<x\leqslant 3$.
∵ x、y 为整数，∴ $x=1$ 时，$y=\pm 3$；$x=3$ 时，$y=\pm 1$.
即这样的复数 z 存在，且 $z=1\pm 3\mathrm{i}$ 或 $z=3\pm\mathrm{i}$.
(3) 设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，又 $|z|=5$，∴ $x^2+y^2=25$.　①
∵ $(3+4\mathrm{i})z=(3+4\mathrm{i})(x+y\mathrm{i})=(3x-4y)+(4x+3y)\mathrm{i}$ 在复平面上对应的点在第二、四象限角平分线上，∴ 它的实部与虚部互为相反数.

∴ $3x-4y+4x+3y=0$，化简得 $y=7x$，代入①得 $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$y=\pm\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore z=\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{7\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)$.

当 $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{7\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$ 时，$|\sqrt{2}z-m|=|1+7\mathrm{i}-m|=5\sqrt{2}$，即 $(1-m)^2+7^2=50$. $\therefore m=0$ 或 2；当 $z=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{7\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)$ 时，同理可得 $m=0$ 或 -2.

$\therefore$ 当 $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{7\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$ 时，$m=0$ 或 2；当 $z=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{7\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)$ 时，$m=0$ 或 -2.

例 6 已知 $w=z+\mathrm{i}(z\in\mathbf{C})$，若 $\frac{z-2}{z+2}$ 是纯虚数，且 $|w+1|^2+|w-1|^2=16$，求 w.

策略点击：一般情况下，求复数实质是求出它的实部和虚部，但这样做往往比较繁琐，若能注意观察本题给出的条件，考虑整体运用复数的性质，可望简化解题过程，这是整体思想在解题中的体现. 整体思想一般具体体现为“整体代入”、“整体变形”和“整体运用性质”等多种形式.

解：$\because \frac{z-2}{z+2}$ 是纯虚数，

$\therefore \frac{z-2}{z+2}+\left(\overline{\frac{z-2}{z+2}}\right)=0$，即 $(z-2)(\overline{z+2})+(z+2)(\overline{z-2})=0$.

$\therefore z\bar{z}+2z-2\bar{z}-4+z\bar{z}-2z+2\bar{z}-4=0$. $\therefore z\bar{z}=4$. 即 $|z|=2$.

又 $|w+1|^2+|w-1|^2=16$，$\therefore (w+1)(\overline{w+1})+(w-1)(\overline{w-1})=16$.

$\therefore 2|w|^2+2=16$，$\therefore |w|=\sqrt{7}$.

令 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，则 $x^2+y^2=4$ 且 $x^2+(y+1)^2=7$.

解得 $\begin{cases}x=\pm\sqrt{3},\\ y=1.\end{cases}$

$\therefore w=\pm\sqrt{3}+2\mathrm{i}$.

例 7 如图 1-3 所示，平行四边形 $OABC$，顶点 O、A、C 分别表示 0，$3+2\mathrm{i}$，$-2+4\mathrm{i}$，试求：

(1) $\overrightarrow{AO}$ 表示的复数，$\overrightarrow{BC}$ 表示的复数；

(2) 对角线 $\overrightarrow{CA}$ 表示的复数；

(3) B 点所对应的复数.

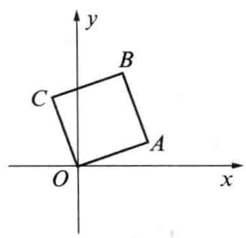

图 1-3

策略点击：复数的向量表示把数与形结合起来了，在复数学习中抓住数形结合，即抓住复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$、复平面上的点 $Z(a,b)$ 和向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的一一对应关系，许多问题就很容易解决.

解：(1) $\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{OA}$，$\therefore \overrightarrow{AO}$ 所表示的复数为 $-3-2\mathrm{i}$.

$\because \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}$，$\therefore \overrightarrow{BC}$ 所表示的复数为 $-3-2\mathrm{i}$.

(2) $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$，$\therefore \overrightarrow{CA}$ 所表示的复数为 $(3+2\mathrm{i})-(-2+4\mathrm{i})=5-2\mathrm{i}$.

(3) $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$，∴ $\overrightarrow{OB}$表示的复数为$(3+2i)+(-2+4i)=1+6i$.
即 B 点对应的复数为 $1+6i$.

例 8 已知复数 $z_1=\sin2x+\lambda i$，$z_2=m+(m-\sqrt{3}\cos2x)i(\lambda,m,x\in\mathbf{R})$，且 $z_1=z_2$.
(1) 若 $\lambda=0$ 且 $0<x<\pi$，求 x 的值；
(2) 设 $\lambda=f(x)$，求 $f(x)$ 的最小正周期和单调减区间.

策略点击： 本题是复数与三角知识相结合，看似毫不相关的知识都能融为一体，这是高考试卷中在知识的交汇点处命题的体现，学生应当从中学会分析这种看似不熟悉的题型，只要把概念搞清楚，是不难入手的.

解： (1) ∵ $z_1=\sin2x+\lambda i$，$z_2=m+(m-\sqrt{3}\cos2x)i$，$z_1=z_2$，

∴ 两复数实部、虚部对应相等，即$\begin{cases}\sin2x=m,\\ \lambda=m-\sqrt{3}\cos2x.\end{cases}$ 消去 m 得

$\lambda=\sin2x-\sqrt{3}\cos2x$，当 $\lambda=0$ 时，即得 $\sin2x-\sqrt{3}\cos2x=0$. 变形得 $\tan2x=\sqrt{3}$. 注意到角的变化范围 $0<x<\pi$，∴ $0<2x<2\pi$. ∴ $2x=\frac{\pi}{3}$ 或 $2x=\frac{4\pi}{3}$，得 $x=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$.

(2) 由 $\lambda=f(x)=\sin2x-\sqrt{3}\cos2x=2\left(\frac{1}{2}\sin2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2x\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

由 $y=f(x)$ 的解析式得最小正周期为 π.

$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$ 时 $y=f(x)$ 单调递减.

解得函数的单调减区间为$\left[k\pi+\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{11\pi}{12}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

四、易错警示

例 1 已知复数 x 满足 $x+|x|=1-2i$，则 $2x-i$ 的虚部为________.

错解： 由 $x+|x|=1-2i$，得 $|x|=1-2i-x$，两边平方，得 $x^2=1-4+x^2-4i-2x+4xi$，∴ $x=\frac{3+4i}{2(2i-1)}=\frac{1}{2}-i$. ∴ $2x-i=2\left(\frac{1}{2}-i\right)-i=1-2i-i=1-3i$，故虚部为 -3.

评析及正解： 对于复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，只有当虚部 $b=0$ 时，其模 $|z|=\sqrt{a^2}=|a|$ 的意义才与实数绝对值的意义相同，错解混淆了这一点，用去掉实数绝对值的方法去掉复数的模.

正确的解法如下：

由 $x+2i=1-|x|\in\mathbf{R}$ 知 $x+2i\in\mathbf{R}$. 设 $x=a-2i(a\in\mathbf{R})$.

代入原方程，得 $a=1-|x|$. 即 $a=1-\sqrt{a^2+4}$，解得 $a=-\frac{3}{2}$，

∴ $x=-\frac{3}{2}-2i$.

∴ $2x-i=(-3-4i)-i=-3-5i$，故虚部为 -5.

例 2 判断下列命题是否正确：

(1) 若 $z\in\mathbf{C}$，则 $z^2\geqslant 0$；

(2) 若 $z_1,z_2\in\mathbf{C}$，且 $z_1-z_2>0$，则 $z_1>z_2$；

(3) 若 $a>b$，则 $a+\mathrm{i}>b+\mathrm{i}$.

错解： (1) 任何一个数的平方都大于等于零，从而知(1)正确.

(2)“两数之差大于零”等价于“前一个数大于后一个数”，从而知(2)正确.

(3) $\because a>b$，$\therefore$ 在不等式两边同时加上 i，得 $a+\mathrm{i}>b+\mathrm{i}$，从而知(3)正确.

评析及正解： 上述解法把不等式的性质错误地推广到复数中，忽略了不等式的性质是在实数中才能成立的前提条件.

正确的解法如下：

(1) 假命题. 举反例：设 $z=\mathrm{i}$，则 $z^2=\mathrm{i}^2=-1<0$，从而知(1)错误.

(2) 假命题. 举反例：设 $z_1=2+\mathrm{i}$，$z_2=1+\mathrm{i}$，满足 $z_1-z_2=1>0$，但 z_1 和 z_2 不能比较大小，从而知(2)错误.

(3) 假命题. $\because a>0$，$\therefore a,b\in\mathbf{R}$，故 $a+\mathrm{i}$ 和 $b+\mathrm{i}$ 都是虚数.

而虚数不能比较大小，从而知(3)错误.

五、链接高考

例 1 设 $f(n)=\left(\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}\right)^n+\left(\dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}\right)^n$，则集合 $\{x|x=f(n),n\in\mathbf{Z}$ 的元素个数为________.

方法探究： 利用 $w\left(w=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$ 的性质可以简化解题过程，因而这些性质（如 $w^3=1,\overline{w}^3=1,1+w+w^2=0,1+\overline{w}+\overline{w}^2=0,w^2=\overline{w},\overline{w}^2=w,w\cdot\overline{w}=1$）是高考命题的热点，而这里，题目没有直接给出运用 i 及 w 的性质解题的“题眼”，需要解题者自己去挖掘，这正是本题的新颖所在.

解本题可先化简 $\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}$ 和 $\dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$，即直接计算，也可用 w 的性质来解题. 还可以将分子用分母表示出来直接约分，再讨论 n 取整数时 $f(n)$ 的取值情况即可.

解： $\because \dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}(1-\sqrt{3}\mathrm{i})}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}=\mathrm{i}$，$\dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}=\dfrac{-\mathrm{i}(\sqrt{3}+\mathrm{i})}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$.

$\therefore f(n)=\mathrm{i}^n+(-\mathrm{i})^n(n\in\mathbf{Z})$. 又 $\mathrm{i}^{4k+r}=\mathrm{i}^r(k,r\in\mathbf{Z})$，$\therefore f(n+4)=f(n)$.

而 $f(1)=\mathrm{i}+(-\mathrm{i})^1=0$，$f(2)=\mathrm{i}^2+(-\mathrm{i})^2=-2$. $f(3)=\mathrm{i}^3+(-\mathrm{i})^3=0$.

$f(4)=\mathrm{i}^4+(-\mathrm{i})^4=2$.

$\therefore \{x|x=f(n),n\in\mathbf{Z}\}=\{0,2,-2\}$，故填 3.

例 2 对于任意两个复数 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i}$，$z_2=x_2+y_2\mathrm{i}(x_1,y_1,x_2,y_2\in\mathbf{R})$.

定义运算“$\odot$”为：$z_1\odot z_2=x_1x_2+y_1y_2$. 设非零复数 w_1、w_2 在复平面内对应的点分别