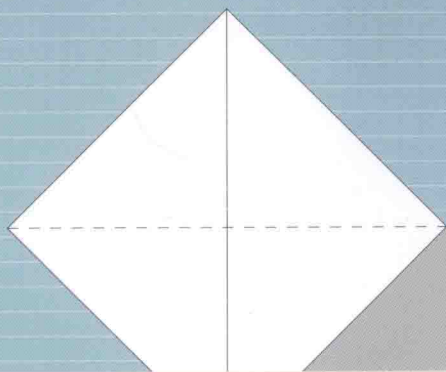
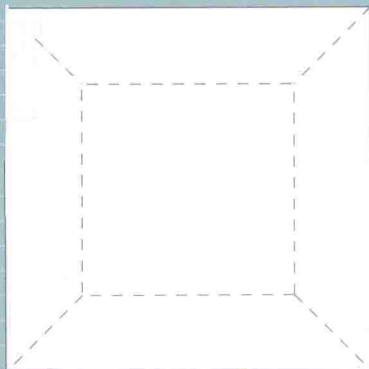
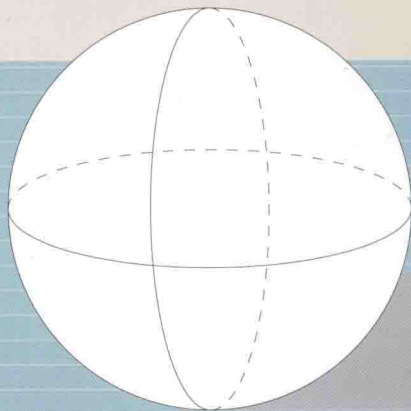




全国大学生数学建模竞赛 广西赛区2003—2013年 获奖论文选集

全国大学生数学建模竞赛广西赛区组委会 编
吕跃进 主编



全国大学生数学建模竞赛 广西赛区2003—2013年 获奖论文选集

全国大学生数学建模竞赛广西赛区组委会 编
吕跃进 主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书收集了全国大学生数学建模竞赛广西赛区各高校 2003—2013 年获全国奖的 43 篇优秀论文(本科组 22 篇,专科组 21 篇),每年每题一篇,其中获全国一等奖 37 篇,全国二等奖 6 篇。题目内容涉及社会、经济、工业、医学、天气、管理等各个领域,可供各高等院校广大师生学习数学模型和参加数学建模竞赛参考,也可供各个领域的科研人员、工程技术人员和管理人员参考。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

全国大学生数学建模竞赛广西赛区 2003—2013 年获奖论文选集/吕跃进主编;全国大学生数学建模竞赛广西赛区组委会编.--北京:清华大学出版社,2014

ISBN 978-7-302-38664-3

I. ①全… II. ①吕… ②全… III. ①数学模型—文集 IV. ①O22-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 283717 号

责任编辑:陈 明 赵从棉

封面设计:傅瑞学

责任校对:王淑云

责任印制:刘海龙

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:清华大学印刷厂

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:31.5 字 数:763 千字

版 次:2014 年 12 月第 1 版 印 次:2014 年 12 月第 1 次印刷

印 数:1~2000

定 价:68.00 元

产品编号:058208-01

前言

世界是现实的,世界是数学的。21 世纪是数学工程技术的时代,数学已经渗透到从自然到社会的各个领域,高技术本质上是数学技术,人类社会的进步也越来越依赖于数学的应用。因此,起源于 20 世纪末的大学生数学建模竞赛,受到了越来越多国家高校的重视,特别是我国,每年参赛学生人数已经达到了 6、7 万人之众。该项赛事不仅可以提高大学生数学应用能力与综合素质,也促进了高校数学教育的改革与进步。

广西赛区自 1994 年起组织本地高校参加大学生数学建模竞赛,至今已经整整 20 年。20 年来广西各高校的师生将参赛与教学改革相结合,参赛队数也从 1994 年的 16 个队增长到 2013 年的 610 个队,每年获全国奖的队从 1994 年的仅 1 个增长到 2013 年的 50 个。为纪念广西赛区参赛 20 周年,也为了学习与交流,我们从广西赛区各高校 2003—2013 年获全国奖的 386 篇论文(其中一等奖 59 篇)中,根据题型、建模方法、来自学校等因素精心挑选了 43 篇论文(本科组 22 篇,专科组 21 篇),每年每题一篇,其中获全国一等奖 37 篇,全国二等奖 6 篇,编辑成获奖论文选集。这是学生们刻苦学习数学建模的结晶,为保持原有风貌,编辑时仅作了必要的压缩与调整。

本书内容涉及社会、经济、工业、医学、天气、管理等各个领域的数学建模问题,可供各高等院校广大师生学习数学模型和参加数学建模竞赛参考,也可供各个领域的科研人员、工程技术人员以及管理人员参考。

编 者

2014 年 4 月

目 录

2003 年获奖论文	1
A 题 SARS 传播的数学模型	1
B 题 露天矿生产的车辆安排	13
D 题 抢渡长江模型	22
2004 年获奖论文	33
A 题 奥运会临时超市网点设计	33
B 题 电力市场的输电阻塞管理	47
C 题 酒精在人体内的分布与排出优化模型	62
D 题 公务员招聘模型	74
2005 年获奖论文	81
A 题 长江水质的评价和预测模型	81
B 题 DVD 在线租赁	94
C 题 雨量预报方法的评价	104
D 题 DVD 在线租赁	111
2006 年获奖论文	121
A 题 出版社的资源配置	121
B 题 艾滋病疗法的评价及疗效的预测	135
C 题 易拉罐形状和尺寸的最优设计	147
D 题 煤矿瓦斯和煤尘的监测与控制模型	154
2007 年获奖论文	161
A 题 中国人口增长预测	161
B 题 乘公交,看奥运	176
C 题 手机套餐资费评价	185
D 题 关于体能测试的优化模型	198
2008 年获奖论文	206
A 题 数码相机定位	206

B 题	高等教育学费标准的探讨	216
C 题	地面搜索的优化方案设计	230
D 题	NBA 赛程的分析与评价	238
2009 年获奖论文		250
A 题	制动器试验台的控制方法分析	250
B 题	眼科病床的合理安排	262
C 题	跟踪测控模型	273
D 题	会议筹备	280
2010 年获奖论文		290
A 题	储油罐的变位识别与罐容表标定	290
B 题	2010 年上海世博会影响力的定量评估	302
C 题	输油管线布置的最优设计	319
D 题	基于多属性决策的学生宿舍设计方案的评价	329
2011 年获奖论文		338
A 题	城市表层土壤重金属污染分析	338
B 题	交巡警服务平台的设置与调度	356
C 题	企业退休职工养老金	367
D 题	天然肠衣搭配模型	378
2012 年获奖论文		387
A 题	葡萄酒质量的评价研究	387
B 题	太阳能小屋的设计	399
C 题	脑卒中发病环境因素分析及干预	414
D 题	机器人避障问题	427
2013 年获奖论文		438
A 题	车道被占用对城市道路通行能力的影响	438
B 题	碎纸片的拼接复原数学模型	454
C 题	古塔变形的研究	468
D 题	公共自行车服务系统模型	481
致谢		496

2003 年获奖论文

2003 年 A 题全国一等奖

SARS 传播的数学模型

(广西师范大学, 参赛学生: 赵新芳、郑彬、李荣, 指导教师: 钟祥贵)

摘要

2003 年, SARS(传染性非典型肺炎)在我国的部分地区(香港、广州、北京等地区)爆发与蔓延, 严重威胁着人民的身体健康与生命安全, 给我国的经济发展和人民生活带来了很大影响。定量地研究传染病的传播规律可以为预测和控制传染病蔓延创造条件。建立 SARS 流行过程的数学模型, 可以预测一定地区、一定时期内的发病趋势及程度。本文做了以下工作。

(1) 对题目中包含的附录 1 所提供的的一个早期的模型进行评价, 阐述了其合理性和实用性。

(2) 对 SARS 的传播建立了微分方程数学模型, 恰当说明了为什么此模型优于附录 1 中的模型; 分析了怎样才能建立一个真正能够预测以及能为预防和控制提供可靠、足够信息的模型, 并指出这样做的主要困难。文章对于卫生部门所采取的措施做出了评论, 如提前或延后 5 天采取严格的隔离措施, 对疫情传播所造成的影响做出了理论分析和定量估计。

(3) 利用题目附录给出的 SARS 对旅游方面影响的数据, 建立了相应的数学模型并进行预测。

(4) 最后, 我们通过一段通俗短文, 说明建立传染病数学模型的重要性。

关键词: SARS 传播; 影响因子; 微分方程; 定量评估; 数学模型

一、问题重述

SARS(传染性非典型肺炎)在我国的部分地区(香港、广州、北京等地区)爆发与蔓延, 严重威胁着人民的身体健康与生命安全, 给我国的经济发展和人民生活带来了很大影响。我们认识到定量地研究传染病的传播规律, 为预测和控制传染病蔓延创造条件是非常重要的。而建立 SARS 流行过程的数学模型, 恰恰可以预测一定地区、一定时期内的发病趋势及程度。题目的具体要求如下:

(1) 对附录 1 提供的的一个早期的模型进行评价, 阐述其合理性和实用性。

(2) 对 SARS 的传播建立数学模型, 并说明为什么此模型优于附录 1 中的模型; 特别要说明怎样才能建立一个真正能够预测以及能为预防和控制提供可靠、足够信息的模型, 这样做

的困难在哪里?对于卫生部门所采取的措施做出评论,如:提前或延后5天采取严格的隔离措施,对疫情传播所造成的影响做出估计。

(3) 收集 SARS 对经济某个方面影响的数据,建立相应的数学模型并进行预测。

(4) 给当地报刊写一篇通俗短文,说明建立传染病数学模型的重要性。

二、对早期模型的评价

在附录1的模型中,通过分析香港和广州的具体情况,从而获得比较合理的参数,来初步预测北京的疫情走势,在北京 SARS 流行前期有关数据不足或不够准确的情况下,以此来预测北京前期疫情是比较合理的。

在此模型中,考虑到了参数 K 和参数 L 。参数 K 代表某种社会环境下一个病人传染他人的平均概率,它与全社会的警觉程度、政府和公众采取的各种措施有关。此参数按照某种规律动态地变化,并非为一成不变的固定值。附录1的模型采取将 K 从 0.162 04 逐步调整到 0.027 3,然后保持 0.027 3 的情况下算出后面控制期的结果。由于 K 值与政府的措施等诸多因素有关,还由于北京采取的措施与香港等地的差异,我们认为此模型对北京的实用性是有限的。事实上,这样估计出的北京最终累积病人数为 3 100 多,与实际累积病例数 2 521 的绝对误差为 $3\,100 - 2\,521 = 579$ (人)。相对于估计值的估计误差为 $\frac{3\,100 - 2\,521}{3\,100} \approx 0.187$,相对于实

际值的估计误差为 $\frac{3\,100 - 2\,521}{2\,521} \approx 0.230$ 。对附录1所提供的模型,即在 L 天之内,病例数目的增长随时间的关系是: $N(t) = N_0(1+K)^t, 0 \leq t \leq L$ 。

仔细分析附录1提出的半模拟循环计算方法可推出如下递推关系:

$$N(t+rL) = (1+K)N(t+rL-1) - KN[t+(r-1)L-1]$$

其中 r 是非负整数, t 为正整数(天数)。

从开始至高峰期间均采用同样的 K 值(从拟合这一阶段的数据定出),到达高峰期后,在 10 天的范围内逐步调整 K 值到比较小,然后保持不变,拟合其后在控制阶段的全部数据,即认为社会在经过短期的剧烈调整之后,进入一个对疫情控制较好的常态。

而参数 L 为平均每个病人在被发现前后可以造成直接传染的期限,在此期限后他失去传染作用,可能的原因是被严格隔离、病愈不再传染或死去,等等,并且通过分析广州、香港、北京现有的数据后可以得出,不论在疫情的爆发阶段,还是疫情的控制阶段,此参数都不能取得太小,否则无法拟合好各阶段的数据。这两个参数的选用及确定都比较合理。但该模型未能考虑到疑似病人数、治愈人数和因 SARS 死亡的人数,模型显得简单、片面,有待于作进一步的优化。

三、对问题2的解答

1. 模型假设

- (1) 假定在诊断病人的过程中不会出现误诊现象;
- (2) 已治愈出院病人具有免疫力,即不会再感染 SARS 病毒,也不会再去传染其他人;
- (3) 每天每人被 SARS 病毒感染而被诊断为 SARS 病人或疑似病人的概率相等;
- (4) SARS 流行期间不考虑人口的流动以及自然出生率、自然死亡率,人口单位为万人。

2. 问题分析

针对问题 2,我们要建立一个能真正预测以及能为预防和控制提供足够信息的模型,关键是能够正确地刻画 SARS 病人人数随时间的变化状况,找出能影响该状况的各种参数。

我们认为,通过建立模型,要能提供正常人感染 SARS 的概率、疑似病人向正常人的转化率、疑似病人向确诊病人的转化率、确诊病人向治愈病人的转化率等参数的可靠数据,以便真正能够预测并能政府部门提供可靠、足够的信息。利用它们的关系,可建立起适当的微分方程进行求解。

3. 模型假设及符号说明

m : 正常人向疑似病人的转化率;

k : 正常人向 SARS 病人的转化率,即当天正常人群中发现确诊病人的概率,以 1 人/10 万人为“单位”;

p : 疑似病人向正常人的转化率;

q : 疑似病人向确诊病人的转化率;

c_1 : 确诊病人向治愈病人的转化率,即治愈率;

c_2 : 确诊病人向死亡人的转化率,即死亡率;

c : SARS 病人向治愈病人和死亡人的转化率;

$S(t)$: 正常人在 t 时刻的人数,以 10 万人为单位;

$U(t)$: 疑似病人在 t 时刻的人数,以人为单位;

$N(t)$: SARS 病人在 t 时刻的人数,以人为单位;

t : 时间,以天为单位;

$Z(t)$: 治愈人数在 t 时刻的数值,以人为单位;

$B(t)$: 死亡人数在 t 时刻的数值,以人为单位。

4. 模型建立

为了更好地考虑问题中的各种量之间的关系,我们综合分析了传染病模型和房室模型。将所有的人分为五个房室,即正常且可被感染的人群(即正常人)、症状疑似人群(即疑似病人)、SARS 患病人群(即确诊病人)、治愈人群及死亡人群(我们假设治愈出院的病人具有免疫力,且不再受感染,因此在计算中可以和死亡人群合在一起考虑),直观地得到图 1。

由图 1 可以得出 $S(t)$ 、 $U(t)$ 、 $N(t)$ 的微分方程模型:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = (-m - k)S(t) + pU(t) & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dU(t)}{dt} = S(t)m - (p + q)U(t) & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = U(t)q + S(t)k - cN(t) & (3) \end{cases}$$

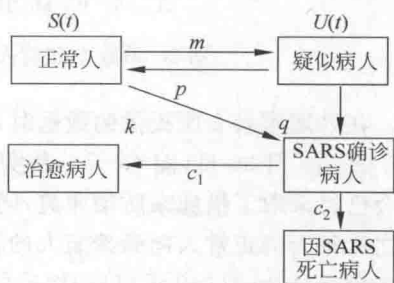


图 1 SARS 传染病房室模型

模型中共采用了 5 个参数,每个参数都体现着不同方面的数量的变化。各个参数的数量在不同时期会受到不同因素的影响,其变化曲线是不同的。因此,我们考虑用分时段讨论的思想和方法建立各个房室中的量与时间的关系,同时,对模型中的参数作出了分析和处理。

5. 参数的处理

模型中采用的5个参数中,人们关注的往往是正常人向确诊病人的转化率 k ,疑似病人向确诊病人的转化率 q ,以及确诊病人的治愈率 c 三个参数,因此,我们用数据拟合和方差分析方法重点处理参数 k, q, c_1 ,得出 k, q, c_1 随时间 t 的变化规律。特别是,我们给出了这些参数的解析表达式。

(1) 对参数 k 的处理

$$k = k(t) = \frac{\text{第 } t \text{ 天增长病人人数}}{\text{人口数}}$$

其中人口数采用北京市的总人口数138.2(单位:10万)(此数据采自网站 <http://www.stats.gov.cn/tjgb/rkpcgb/>),每天增长病人人数单位为人,以此来减少小数点后的位数,简化计算,提高计算的效度和精度。利用附录2中提供的数据,经过多次拟合比较,得到 k 对时间的5阶拟合表达式

$$k = \begin{cases} 0.000\,000\,367\,574\,23t^5 + 0.000\,370\,008\,030\,0t^4 - \\ 0.001\,274\,418\,688\,65t^3 + 0.017\,211\,646\,167\,81t^2 - \\ 0.101\,819\,322\,038\,90t + 0.983\,558\,322\,350\,35, & t \in (1, 39) \\ 0, & t \in (40, 64) \end{cases} \quad (4)$$

及曲线图2。

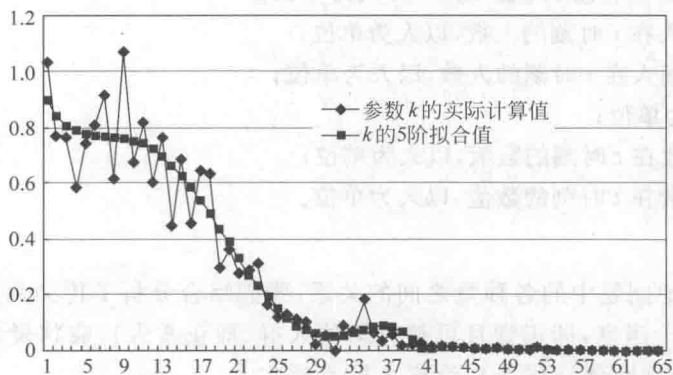


图2 参数 k (正常人向确诊病人的转化率)的曲线及5阶拟合曲线

在处理附录2所提供的数据时,我们采取了分段的办法。总体数据分为两段,第一段为4月1日到5月30日(前40天),从实际情况可以知道,4月20日时,已经达到了非典的高峰期,社会已经采取了措施来防治非典,同时人们的心理上也警惕起来,所以,由图中可以看出,在5天之后每天的正常人向确诊病人的转化率其总体趋势是减小的,最后趋向零,并保持为零,即第二段5月30日(40天以后)以后的情况。

(2) 对参数 c 的处理

对于我们的房室模型来说,由于治愈出院的人和死亡的人,根据模型假设其结果都是跳出系统,不再参与房室之间的转化,故我们将治愈率 c_1 和死亡率 c_2 相加,作为 c 来考虑。同时,由于治愈和死亡的总人数对于总人口数来说,非常小,因此在计算总比率时不考虑这部分人对总人数的影响,即

$$c = \frac{\text{每天治愈人数} + \text{每天死亡人数}}{\text{确诊病人累计}} \quad (\text{单位: 人/人})$$

利用附录 2 中提供的数据,经过多次拟合比较,得到 c 对时间的 4 阶拟合表达式:

$$c = 0.000\,000\,246\,558\,172t^4 + 0.000\,026\,952\,536\,06t^3 - 0.000\,530\,128\,192\,66t^2 + 0.001\,225\,941\,798\,63t + 0.136\,632\,911\,392\,46; \quad (5)$$

但是,显然治愈率 c_1 和死亡率 c_2 才可以更明显且准确地反映社会采取措施的有效性。现在分别考虑计算治愈率 c_1 和死亡率 c_2 :

$$c_1 = \frac{\text{治愈人数}}{\text{确诊病人累计}}$$

$$c_2 = \frac{\text{死亡人数}}{\text{确诊病人累计}}$$

为了反映其发展趋势,我们利用附录 2 的数据,经多次拟合比较,得到治愈、死亡人数的累计分别对时间的 2 阶拟合表达式及拟合曲线图 3。

$$B(t) = -0.055\,638t^2 + 6.300\,1t + 11.702 \quad (6)$$

$$Z(t) = 0.684\,92t^2 - 5.800\,1t + 38.178 \quad (7)$$

由图 3 中曲线可以看出死亡人数趋向平缓,有少量增加,但增长率较小,治愈出院累计人数在不断上升,增长率较大,说明了社会采取的措施相当有效。

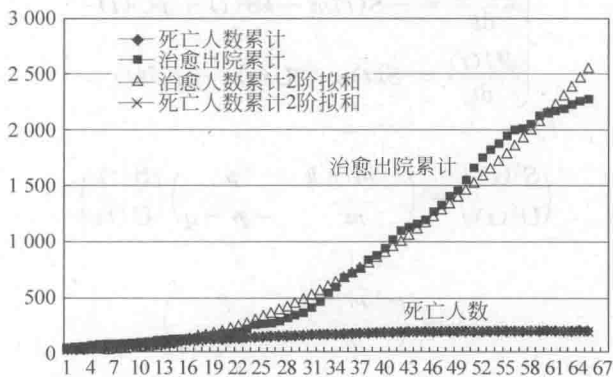


图 3 治愈人数累计和死亡人数累计的曲线及 2 阶拟合曲线

(3) 对参数 q 的处理

对前面(3)式利用差分方法有

$$\frac{N(t+1) - N(t)}{h} = U(t)q + S(t)k - N(t)c \quad (8)$$

取步长 $h=1$ 天,据 $N(t)$ 、 $U(t)$ 、 $S(t)$ (由于正常人口基数比较大,故可以认为 $S(t)$ 变化不大,在此可以把它看作常数,采用北京市人口 138.2(10 万)的数据)拟合 q 值得

$$q = 0.000\,026\,91t^3 - 0.000\,552\,36t^2 + 0.432\,850\,00t + 0.108\,770\,00 \quad (9)$$

(4) 对参数 p 、 m 的处理

对于参数 p 、 m ,我们用方差来分析微分方程的表达式(1)、(2)后,通过数据拟合,取其平均值,可以得到 p 、 m 的关系

$$p = 0.001\,971\,5m^2 - 0.095\,043m + 0.032\,906 \quad (10)$$

据此可以得出 p 、 m 的一个数值估计(期望)为

$$p = 0.031\,785, m = 0.064\,119$$

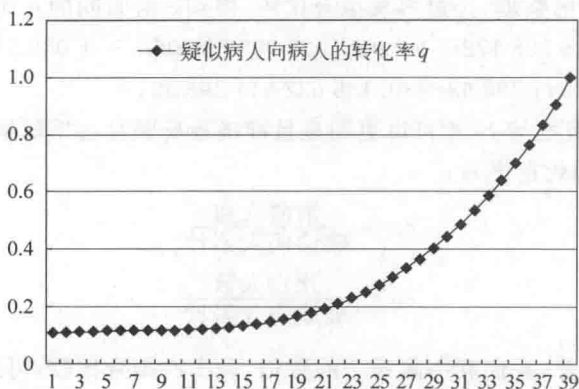


图4 疑似病人向确诊病人的转化率曲线及2阶拟合曲线

6. 模型的简化过程以及简化结果

对由(1)、(2)组成的方程组

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -S(t)m - kS(t) + pU(t) \\ \frac{dU(t)}{dt} = S(t)m - U(t)q - pU(t) \end{cases} \quad (11)$$

(12)

进行简化,求解:

$$\begin{pmatrix} S'(t) \\ U'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m-k & p \\ m & -p-q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(t) \\ U(t) \end{pmatrix} \quad (13)$$

记

$$A = \begin{pmatrix} -m-k & p \\ m & -p-q \end{pmatrix}$$

A 的特征多项式为

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda + m + k & -p \\ -m & \lambda + p + q \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 + (m + k + p + q)\lambda + (m + k)(p + q) - mp \end{aligned}$$

特征值为: $\lambda_{1,2} = \frac{-(m+k+p+q) \pm \sqrt{\Delta}}{2}$, 其中

$$\begin{aligned} \Delta &= (m + k + p + q)^2 - 4[-mp + (m + k)(p + q)] \\ &= (m + k - p - q)^2 + 4mp > 0 \end{aligned}$$

对应于 λ_1, λ_2 的特征向量分别为 $(p, \lambda_1 + m + k), (p, \lambda_2 + m + k)$ 。

微分方程组的基解矩阵:

$$\Phi(t) = \left(e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} p \\ \lambda_1 + m + k \end{pmatrix}, e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} p \\ \lambda_2 + m + k \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} pe^{\lambda_1 t} & pe^{\lambda_2 t} \\ (\lambda_1 + m + k)e^{\lambda_1 t} & (\lambda_2 + m + k)e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \quad (14)$$

于是

$$\begin{pmatrix} S(t) \\ U(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pe^{\lambda_1 t} & pe^{\lambda_2 t} \\ (\lambda_1 + m + k)e^{\lambda_1 t} & (\lambda_2 + m + k)e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

从而

$$S(t) = c_1 p e^{\lambda_1 t} + c_2 p e^{\lambda_2 t} \quad (16)$$

$$\Rightarrow \frac{S(t)}{p} = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$U(t) = c_1 (\lambda_1 + m + k) e^{\lambda_1 t} + c_2 (\lambda_2 + m + k) e^{\lambda_2 t} \quad (17)$$

其中 c_1, c_2 可以由 $S(t), U(t), t$ 的初值 $S(t_0), U(t_0), t_0$ 与相关参数表示。即

$$c_1 = \frac{S(t_0)(\lambda_2 + m + k) - pU(t_0)}{(\lambda_2 - \lambda_1) e^{\lambda_1 t_0} p} \quad (18)$$

$$c_2 = \frac{pU(t_0) - S(t_0)(\lambda_1 + m + k)}{(\lambda_2 - \lambda_1) e^{\lambda_2 t_0} p} \quad (19)$$

把各参数代入(1)、(2)可以得到 $S(t)$ 与 $U(t)$ 的表达式,从而建立起 $S(t)$ 与 $t, U(t)$ 与 t 的关系。把 $S(t), U(t)$ 及各参数的 t 表达式代入到(3)式,然后两边积分即可得到 $N(t)$ 与 t 的关系式。

7. 模型的结果分析

本模型的思想易于理解,模型的可操作性强,能较好地预测传染病的发展趋势,并能为有关部门提供有关疑似病例、SARS 确诊病例率以及治愈率、死亡率等预测数据,使其决策具有一定的理论依据。我们可以把 k, q, c 的关系图综合起来考察和检验一下社会的防 SRAS 措施(图 5)。

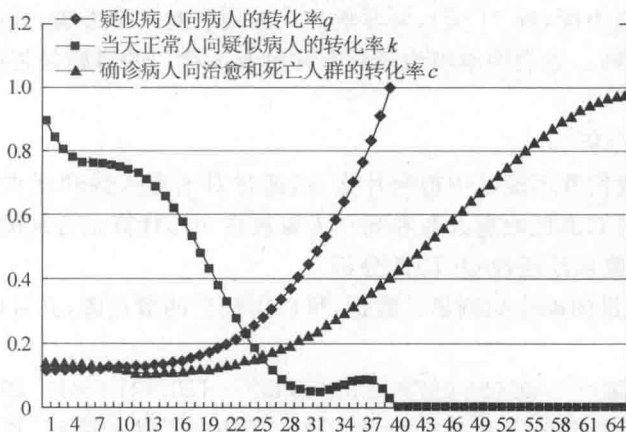


图 5 疑似病人向确诊病人的转化率 q 、当天正常人向疑似病人的转化率 k 、确诊病人向治愈和死亡人群的转化率 c

图中横坐标中的 1 表示的时间是 4 月 20 日。

(1) 对 k 曲线的分析

k 是分段拟合出来的,从 1~39 为一段,40~64 为一段。从实际情况来看,4 月 20 日时,政府和卫生部门已经开始采取措施。而从我们的 k 曲线图可以看出:

① 1~4 天时我们可以看到 k 是迅速下降的,显然此时有关部门是采取了一项措施控制病情的恶化;

② 5~10 天时又可以看出 k 的变化是平缓的,可以知道此时采取的措施暂时不能控制疫情的蔓延;

③ 自 10 天以后 k 又是迅速下降的, 此时, 可以知道有关部门的措施已经取得了很好的效果;

④ 总体上看, k 值在短暂的 4 天内有明显下降, 而第 5~10 天又趋向平缓, 甚至没有变化, 继而才有大幅的下降, 说明有关部门采取的措施 5 天后才发挥比较有效的作用。

因此, 比较 4 月 20 日这一天, 如果有关部门提前 5 天采取严格的隔离等措施, 则第 5~10 天的 k 曲线将不会平缓, 而是像图中第 10 天以后的情况一样大幅下降, 在这 5 天内正常人发病的人数将大约减少 $S(t)(1+k)^5 = 119$ 人; 如果有关部门延后 5 天采取严格的隔离等措施的话, 则第 11~16 天也将不会有迅速的下降, 而是平缓, 甚至无变化, 则发病人数将会增加大约 $S(t)[(1+k)^{10} - (1+k)^5] = 180$ 个人。

因为在不同的日期有不同的变化趋势, 再针对不同的日期比较提前和延后采取严格的隔离措施, 将会得到不同的人数值, 但其趋势是相同的, 即提前采取措施就会减少发病人数, 延后采取措施就会增加发病人数。

在实际情况下, 在政府和有关部门采取一定的措施来防治并取得了一定效果之后, 出现了一定程度的反弹, 即 k 值在迅速下降之后, 又有了一定的回升, 之后才趋向一个固定值 0, 正好吻合图 2 中 k 值的变化趋势, 说明此图基本吻合实际正常人发病的转化率的趋势, 具有一定的现实意义, 可以模拟现实, 并预测未来的情况。

(2) 对 q 曲线的分析

从 q 的曲线图可以看出随着人们对非典的研究的深入(事实上, 开始时病人被隔离的天数为 7 天, 后来增加隔离力度, 到 21 天), 对非典病人的判断越来越准确, 最终导致疑似病人向确诊病人的转化率的增高。这表明本模型还具有评价有关部门的措施是否得当和人们对传染病认识程度的功能。

(3) 对 c 曲线的分析

对于 c 曲线图, 我们并不能从中得到什么, 但通过对治愈人数和死亡人数数据的分析, 结合 c 曲线图, 我们可以知道把治愈人数和死亡人数放在一起计算是合理的。

(4) 对确诊病人人数累计函数 $Q(T)$ 的分析

根据附录 2 中提供的确诊病例累计数据, 可以得到它的散点图, 并可以用 MATLAB 拟合出其函数(3 阶)为

$$Q(t) = 0.023\ 667t^3 - 3.405\ 8t^2 + 120.14t + 413.29 \quad (20)$$

由图 6 可以看出, 确诊病人累计函数为先增长后趋向平缓的曲线, 说明在 4 月 20 日后非

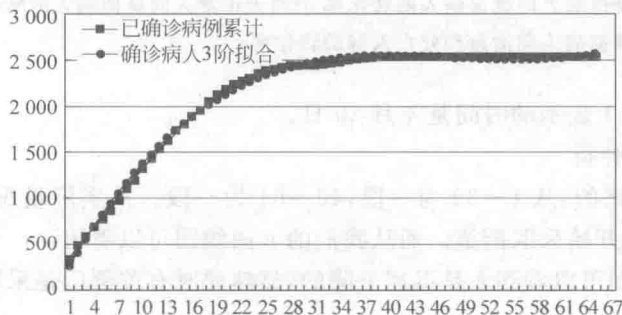


图 6 已确诊病例累计曲线及其 3 阶拟合曲线

典病人在持续增加,且增长率较大,但其增长率虽大,却在不断地减小,末期曲线趋于平缓,说明发病的增长率为0,且保持在0,即不会再有人感染SARS。

(5) 对疑似病人人数累计函数 $Y(t)$ 的分析

同样根据附录2中提供的疑似病人累计数据,可以得到它的散点图,并可以用MATLAB拟合出其函数(3阶)为

$$Y(t) = 0.031782t^3 - 3.9783t^2 + 120.14t + 413.29 \quad (21)$$

从图7中明显可以看出疑似病人总数先增后减,“增”反映了传染病初期人们对非典的认识不是很清楚,“减”反映了人们对非典认识的深入,对“非典”的诊断水平的提高。这一“增”一“减”刚好反映了人们对新事物的适应过程,因此,加强研究宣传力度,使人们及早清楚了解传染病的性质,又是预防、控制传染病的又一举措。

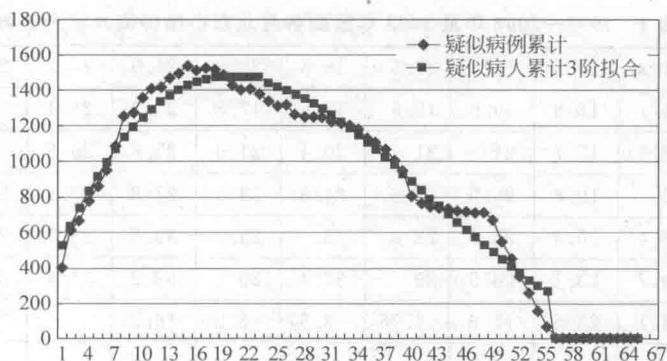


图7 疑似病人累计曲线及其3阶拟合曲线

8. 模型的改进

由于模型是采用北京市的数据(包括北京市人口总数)进行计算的,故在其他地区使用这一模型时,还须利用该地区人口进行重新的计算,这样的计算量比较大。因此,若能使该模型更上一个层次,则要在本模型的基础上考虑更多的参数,我们才能建立一个真正能够预测以及能为预防和控制提高可靠信息的模型。这样的模型改进的困难就在于对于参数的确定和求解。

四、对问题3的解答

1. 对第三问的回答

根据附录3(北京市接待海外旅游人数)中提供的1997—2002年每月的人数数据,可以利用MATLAB软件非线性回归出各月接待人数的函数,从而可以预测出2003年北京市若没有非典影响应该接待的人数。继而可以比较2003年前8个月的具体数据,分析出各月的减少人数,并预测出以后的趋势。

图8为1997—2002年的海外旅游人数的实际值,由于2月份和11月份曲线曲折比较多,其他月份为平缓上升趋势,因此对北京2003年旅游人数的预测中,其他各月份采取2阶拟合,2月和11月采取3阶拟合,用MATLAB可以得出预测值如表1所示。

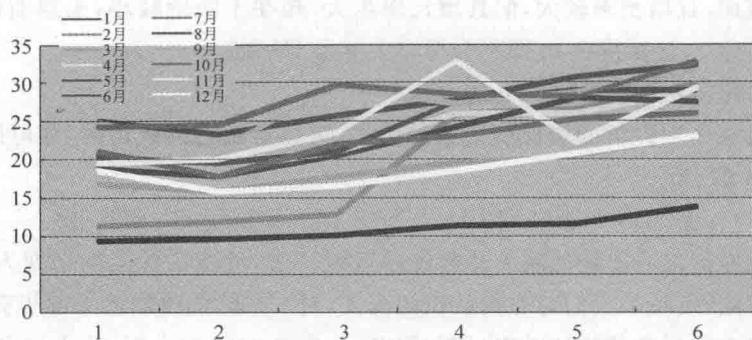


图8 1997—2002年各月北京市接待海外旅游人数(单位:万人)

表1 1997—2002年及2003年预测各月北京市接待海外旅游人数

万人

年份	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
1997年	9.4	11.3	16.8	19.8	20.3	18.8	20.9	24.9	24.7	24.3	19.4	18.6
1998年	9.6	11.7	15.8	19.9	19.5	17.8	17.8	23.3	21.4	24.5	20.1	15.9
1999年	10.1	12.9	17.7	21	21	20.4	21.9	25.8	29.3	29.8	23.6	16.5
2000年	11.4	26	19.6	25.9	27.6	24.3	23	27.8	27.3	28.5	32.8	18.5
2001年	11.5	26.4	20.4	26.1	28.9	28	25.2	30.8	28.7	28.1	22.2	20.7
2002年	13.7	29.7	23.1	28.9	29	27.4	26	32.2	31.4	32.6	29.2	22.9
2003年	15.4	17.1	23.5	11.6	1.78	2.61	8.8	16.2				
2003年预测	16.61	21.7	25.97	32.15	32.83	31.60	29.33	36.40	33.14	32.85	26.27	27.79

并且可作散点图如图9所示。

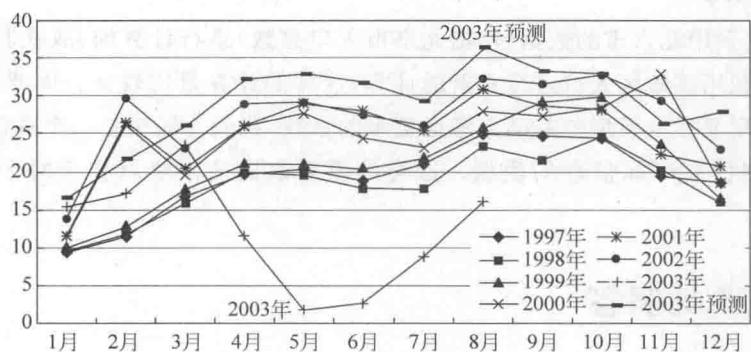


图9 1997—2002年及2003年预测各月北京市接待海外旅游人数(单位:万人)

根据图9,并结合北京2003年接待海外旅游人数的实际数字,可以计算出前8个月的减少值,同时用MATLAB可以拟合出其函数,并经过多次拟合比较,可以得出比较精确表示此减少函数的5阶函数,即游客减少函数,简称损失函数:

$$S(t) = 0.1229t^5 - 2.5897t^4 + 19.3950t^3 - 62.4940t^2 + 89.3002t - 43.4010$$

此函数可以比较真实地反映2003年北京市因非典影响而减少的海外旅游人数的走势,并可以画出散点图10。

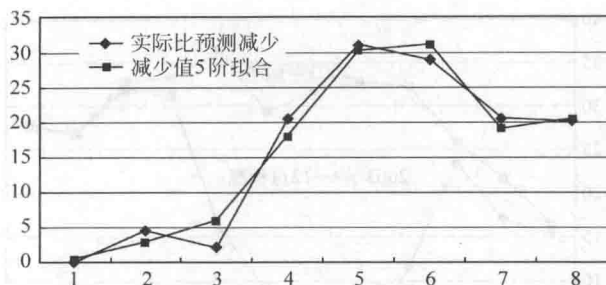


图 10 2003 年 1—8 月北京市因非典影响的海外旅游减少人数(单位: 万人)

但从一些真实数据可以显示 7 月和 8 月份北京已经几乎不再有确诊病人数的增加,但是仍然存在很大的损失,这说明人们对于非典仍然有一定的警惕性,即认为人们的心理状态对此损失函数有一定的影响。采用效用函数 $U(R) = \ln R$ 来考虑。

由此可以说明即使非典已经结束,人们对于非典的恐惧仍可能不会马上结束而会维持一段时间,旅游人数仍会减少,但减少的程度会发生改变。

根据前面的数据并结合上图可以预测出 2003 年 8 月以后人数的减少情况:

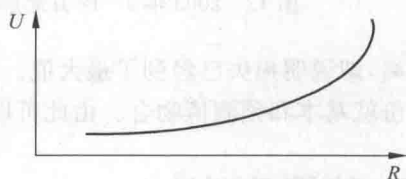


图 11 反映人们心理曲线的效用函数 $U(R) = \ln R$

由图 12 可以看出,10 月份下旬到 11 月份人数减少值即可达到零值,可以说明经济已经恢复,不再受到非典的影响。同时,根据 1—8 月各个月份的实际数据,借助前面的一些结论方法,可以预测出 2003 年 8 月份以后,9—12 月份北京市接待海外游客人数值(单位: 万人),如图 13 所示。

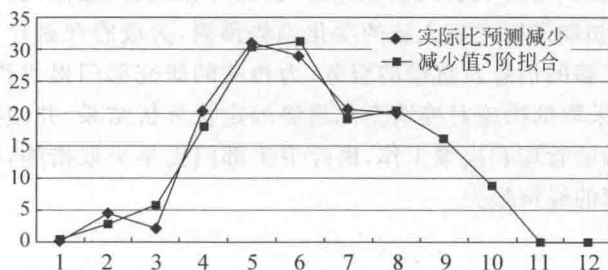


图 12 2003 年 9—12 月北京市因非典影响的海外旅游减少人数预测(单位: 万人)

从图 13 可以观察到,8 月份以后旅游人数会持续增长,继续恢复,9 月份已经恢复了很大的程度,与预测的期望值已经很相近,10 月份距离更是大大的缩减,几乎可以近似相等,而 11 月份已经可以吻合,因此,可以得知 10 月下旬旅游人数已经得到了恢复,开始了稳步的增长,达到预测的期望值,即说明已经摆脱了非典的影响。

2. 结论

从上面的模型可以看出,非典对北京来自海外的旅游业有很大的影响。2 月份的数字和期望值基本吻合,而 3 月份非典在北京蔓延了之后,在人数上极大地减少,说明受到了极大的损失,之后的 4、5、6 月份更加严重,最少时人数跌落到 1.78 万人,距离期望值有了 30 多万的