经济管理专业函授大专教材

管理数学基础

黄荣璋　杨俊兰　陈会峰　主编

辽宁教育出版社

管理数学基础

主　编　黄荣璋　杨俊兰　陈会峰

副主编　商大伟　温桂琴

辽 宁 教 育 出 版 社

1991年·沈阳

管理数学基础

黄荣璋　杨俊兰　陈会峰　主编

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行
（沈阳市北一马路108号）　沈阳市东风印刷厂印刷

字数：324,000　开本：787×1092 1/32　印张：14.5
印数：1—17,800
1991年1月第1版　1991年1月第1次印刷

责任编辑：林　炜
封面设计：王志民　责任校对：韩　珏

ISBN　7-5382-1410-0/G.1077

定价：4.95元

前　　言

管理数学是专门介绍现代管理活动中所应用到的现代数学理论和方法的一门基础学科，是管理科学的重要组成部分。随着我国改革的全面深化和经济的稳步发展，现代化管理方法得到广泛推行，广大管理干部学习和掌握一定程度的管理数学知识和方法已成为迫切的社会需要。《管理数学基础》一书全面地、系统地、程度适宜地介绍了现代管理中需经常用到的微积分、线性代数以及概率论数理统计等方面的必备数学知识。本书主要是为省委党校主办的经济管理函授大专班编写的教材，也适用于各类成人教育院校以及各类管理干部院校的大专班教材。同时也还可以作为经济管理人员自学用书。本书的内容共分三部分：

第一篇　微积分

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

本书的特点是：基本概念、定理阐述比较详细，通俗易懂，深入浅出，并有较多的例题和习题便于自学。

本书由黄荣璋、杨俊兰、陈会峰同志担任主编，商大伟、温桂琴同志任副主编。在编写过程中，得到了中共辽宁省委党校函授部的大力支持，在此深致谢意。由于作者水平有限、时间仓促，书中不当之处在所难免，恳请批评指正。

目　　录

第一篇　微积分初步

第二篇 线性代数

第三篇 概率论与数理统计

第一篇　微积分初步

第一章　函数与极限

§1·1 数列与极限

一、数列的概念

在人类社会经济活动、科学实验及对自然界的观察研究中，往往要按时间的先后顺序或其它预先规定的顺序，将获得的经济数据、实验观测数据记录收集起来，作为经济活动分析和深入研究问题的依据。例如，某公司自1980年以来逐年实现的利税额如下：

表1—1　　　　单位：万元

1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
150	180	210	200	260	265	280	310	350	340

这里该公司在1980—1989十个年度实现的利税额按发生的年度顺序排成了一列。

特别地，将自然数由小到大依次写出得

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$$

将自然数的倒数由大到小依次写出得

$$1, 1/2, 1/3, 1/4, \cdots$$

象上面诸例所述，按一定的次序排列的一列实数叫做**数列**。数列中的每一个实数都叫做这个数列的**项**。排在数列最前面的项叫做这个数列的**首项**或第1项，接下来是数列的第2项、第3项、…、第n项。只含有有限多个项的数列叫做**有穷数列**；含有无限多个项的数列叫做**无穷数列**。上面的三个例子中，第一个例子是一个含有10项的有穷数列。现实的统计资料中多见的是这种有穷数列。后两个例子则是无穷数列。无穷数列多见于对规律性的探索和对数据变化趋势的分析研究中。

一个数列，如果从第2项起，每一项都大于它前面的一项，则这个数列叫做**递增数列**；如果从第2项起，每一项都小于它前面的一项，则这个数列叫做**递减数列**。若数列的各项均相等，则称其为**常数列**。容易看出，上面的第2个例子是递增数列；第3个例子是递减数列。

抽象地研究数列时，可将数列写成

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots.$$

a_1表示数列的第1项（首项），a_2表示数列的第2项，…，a_n表示数列的第n项。上面的数列抽象表达式还可以简记为数列$\{a_n\}$。

对于一些特殊的数列，如果数列中的每一项都可以用项标n的统一表达式来给出，则称这个表达式为该数列的**通项公式**。记作

$$a_n = f(n).$$

例如，数列

$$1, 3, 5, 7, \cdots$$

的通项公式为

$$a_n=2n-1;$$

数列

$$1/2,\ 2/3,\ 3/4,\ 4/5,\ \cdots$$

的通项公式为

$$a_n=n/(n+1);$$

数列

$$1,\ -2,\ 4,\ -8,\ \cdots$$

的通项公式为

$$a_n=(-2)^{n-1}.$$

要强调指出的是，并不是所有的数列都具有通项公式。

如果已经知道了一个数列的通项公式，那么它的作用一是可以较方便地算出数列中的任何一项的值；二是易于分析判断数列的变化趋势。例如，已知一数列的通项公式为

$$a_n=n/(2n+1),$$

那么容易算出该数列的第101项是

$$a_{101}=101/(2\times101+1)=101/203;$$

第300项是

$$a_{300}=300/(2\times300+1)=300/601.$$

此外，还可运用这一通项公式分析判断出该数列的逐项变化发展趋势是越往后面的项就越接近常数1/2。上述分析判断过程，避免了逐一地写出数列的各项或很多的项。显然，这是由于运用了数列的通项公式的结果。

例1 运用数列的通项公式，写出它的前五项：

（1）$a_n=(-1)^n\ 2n/(n^2+1)$；

（2）$a_n=1-1/2^n$。

解 （1）依次将 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ 代入通项公式 $a_n=(-1)^n\ 2n/(n^2+1)$，得出数列的前五项为

$$a_1=(-1)^1 2\times 1/(1^2+1)=-1;$$
$$a_2=(-1)^2 2\times 2/(2^2+1)=4/5;$$
$$a_3=-3/5;\ a_4=8/17;\ a_5=-5/13.$$

（2）依次将 $n=1$，2，3，4，5 代入通项公式 $a_n=1-1/2^n$，得出数列的前五项为

$$a_1=1-1/2^1=1/2;\ a_2=1-1/2^2=3/4;$$
$$a_3=7/8;\ a_4=15/16;\ a_5=31/32.$$

例2 写出下列各数列的通项公式：

（1）-1，$1/3$，$-1/5$，$1/7$，…；

（2）$(2^2+1)/2,(3^2+1)/3,(4^2+1)/4,(5^2+1)/5,\cdots$.

解 （1）注意到数列的奇数项为负，偶数项为正；各项的分子均为1；分母是项数的2倍与1的差，所以它的通项公式为

$$a_n=(-1)^n\ 1/(2n-1);$$

（2）容易看出该数列的各项均为正数；它们的分母均为项数与1的和；分子则是分母的平方与1之和，由此可写出其通项公式为

$$a_n=[(n+1)^2+1]/(n+1)=(n^2+2n+2)/(n+1).$$

例3 观察下面的通项公式，试分析判断各数列项值的变化趋势：

（1）$a_n=n/(n+5)$；

（2）$a_n=4-3/n$.

解 （1）观察通项公式 $a_n=n/(n+5)$，发现该数列各项的分母总比分子大5，但随着项数 n 的增大，分子与分母的相对差值会越来越小，即其比值越发接近常数1，也就是说，该数列项值的变化趋势是趋向于1的。

（2）观察通项公式 $a_n=4-3/n$，不难看出，随着

项数 n 的增大，通项公式中的 $3/n$ 部分的值越来越小地趋向于零，因此该数列的项值的变化趋势是趋向于 4 的.

当然，并不是所有的无穷数列项值的变化趋势，都可以由观察其通项公式而直接得出.

二、等差数列与等比数列

等差数列和等比数列是两种常用的特殊数列。先看下面的问题：

某公司以1989年度产值1000万元为基数，制定其后五年发展规划，备选方案有两种：

（1）每年产值增长1989年产值基数的 5 %；

（2）每年产值增长上一年的 5 %

相对应地得到两组不同的规划数值：

表1—2　　　　单位：万元

规划值 \ 年 方案	1989	1990	1991	1992	1993	1994
（1）	1000	1050	1100	1150	1200	1250
（2）	1000	1050	1102.5	1157.63	1215.51	1276.28

不难看出，第一组规划值数列，从第 2 项起，每项总比前一项多50；第二组规划值数列，从第 2 项起，每项与前一项之比总是1.05，它们分别呈现出数列的项差相同和项比相同的两个特点。

一般地说，如果一个数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

从第2项起，每项与它的前一项的差等于同一个常数，这个数列叫做**等差数列**，相差的共同常数叫做等差数列的**公差**，记作d。

等差数列的通项公式为

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

等差数列的前n项加总和称为数列的前n项和，记作S_n。等差数列前n项和公式为

$$S_n = n(a_1 + a_n)/2 \quad 或$$

$$S_n = n \cdot a_1 + n \cdot (n-1)d/2.$$

如果一个数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

从第2项起，每一项与它前一项的比值都等于同一个常数，这个数列叫做**等比数列**。这个常数叫做等比数列的**公比**，记作q。

等比数列的通项公式为

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

等比数列前n项加总和称为数列的前n项和，记作S_n。等比数列前n项和公式为

$$S_n = a_1 \cdot (1-q^n)/(1-q) \qquad (q \neq 1)，或$$

$$S_n = (a_1 - a_n q)/(1-q) \qquad (q \neq 1).$$

很明显，当$q = 1$时，

$$S_n = n \cdot a_1.$$

由于等差数列和等比数列是一种特殊的、规则性的实数排列，项与项之间存在着确定性的必然联系，因此，对于等差数列的五个值：

a_1（首项），a_n（第n项），n（项数），

d（公差），S_n（前 n 项和），

只要知道其中任何三个，即可解出另外两个．

对于等比数列的五个值，亦有类似的计算题目（与上不同的是公差 d 换为公比 q）．

例4　已知等差数列的 $a_1=10$，$a_n=80$，$S_n=450$，求公差 d 与项数 n．

解　将 $a_1=10$，$a_n=80$，$S_n=450$ 代入等差数列前 n 项和公式得

$$450=n(10+80)/2.$$

由此解出　$n=10$；再由于等差数列通项公式有

$$a_{10}=a_1+(10-1)d,$$

$$80=10+9\cdot d,\qquad d=\frac{70}{9}.$$

例5　已知等比数列$\{a_n\}$中的$a_3=4$，$a_5=9$，求a_1和a_8。

解　由于

$$\begin{cases} a_3=a_1\cdot q^2=4, \\ a_5=a_1\cdot q^4=9, \end{cases}$$

解得

$$q=\pm 3/2,\ a_1=16/9,$$

$$a_8=a_1\cdot q^{8-1}=a_1\cdot q^7=a_1\cdot q^4q^3=a_5\cdot q^3$$

$$=9\times(\pm 27/8)=\pm 30\frac{3}{8}.$$

例6　现值100万元现金，在社会平均年利率为 10% 的条件下，三年后的值是多少？

解　这一问题中的现值与后三年的现金值成等比数列且

$$a_1=100,\ q=1+10\%=1.1,\ n=4,$$

由等比数列的通项公式可求得

$$a_4=a_1\cdot q^{4-1}=100\times 1.1^3=133.1.$$

即现值100万元的现金，三年后的值为133.1万元。

一般地，以PV表示现金现值。以FV_n表示现金在n年期后的值，即n期将来值，以i表示平均利率，n表示年期，则

$$FV_n = PV \cdot (1+i)^n$$

此公式称为折将来值公式或复利公式，容易得出，根据n期将来值求现金现值的所谓折现公式

$$PV = FV_n/(1+i)^n$$

其中，$(1+i)^n$和$1/(1+i)^n$分别称为**折将来值因子**和**折现因子**.

三、数列的极限

上述例3已经根据数列的通项公式，直观地分析判断过无穷数列的项值变化趋势，同时也指出了它不是一个普遍适用的判别方法，它仅限于通项公式比较简单的无穷数列。在直观判断变化趋势时，我们也没有对"趋向"等用语给出较明确的数学描述。因此，直观判别法具有一定的局限性，为此需引入数列极限的概念。

定义1·1 对于给定的无穷数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots,$$

如果当项数n无限增大时，项值a_n无限地接近于一个确定的常数A，称A是数列$\{a_n\}$的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad 或 \quad a_n \to A(n\to\infty).$$

读作"n趋向于无穷大时，a_n的极限等于A"。符号"→"表示"趋向于"，"∞"读作"无穷大"。数列$\{a_n\}$的极限是A，也叫做数列$\{a_n\}$收敛于A。lim为极限符号。

如果当$n\to\infty$时，a_n不趋向任何一个确定的常数，则说

数列$\{a_n\}$无极限或数列$\{a_n\}$发散。

例3中的两个无穷数列的变化趋势可记作

$$\lim_{n\to\infty} n/(n+5)=1 \quad 或 \quad n/(n+5)\to 1 \quad (n\to\infty);$$

$$\lim_{n\to\infty} (4-3/n)=4 \quad 或 \quad 4-3/n\to 4 \quad (n\to\infty).$$

特殊地，常数列的极限就是这个常数本身，例如

$$\lim_{n\to\infty} 5=5; \qquad \lim_{n\to\infty} \pi=\pi.$$

由数列极限的定义也只能分析判定一些较为简单的数列变化趋向，对于较复杂的数列则要分析它们是由哪些简单的数列经过怎样的运算结合而成的，进而运用有关的求极限法则，把复杂数列的极限计算问题转化为简单数列的极限计算问题。数列极限的运算法则有：

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=B$，那么

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty} b_n=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty} b_n=A\cdot B$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}=\dfrac{A}{B}$ $(B\neq 0)$.

特别地，$\lim\limits_{n\to\infty} c\cdot a_n=\lim\limits_{n\to\infty} c\cdot\lim\limits_{n\to\infty} a_n=c\cdot\lim\limits_{n\to\infty} a_n=c\cdot A$ (c为常数).即在求极限的运算中，常数因子可以提到极限符号外面来。

上述法则表明，如果两个数列都有已知的有限极限，那么由这两个数列的各对应项的和、差、积、商组成的数列也