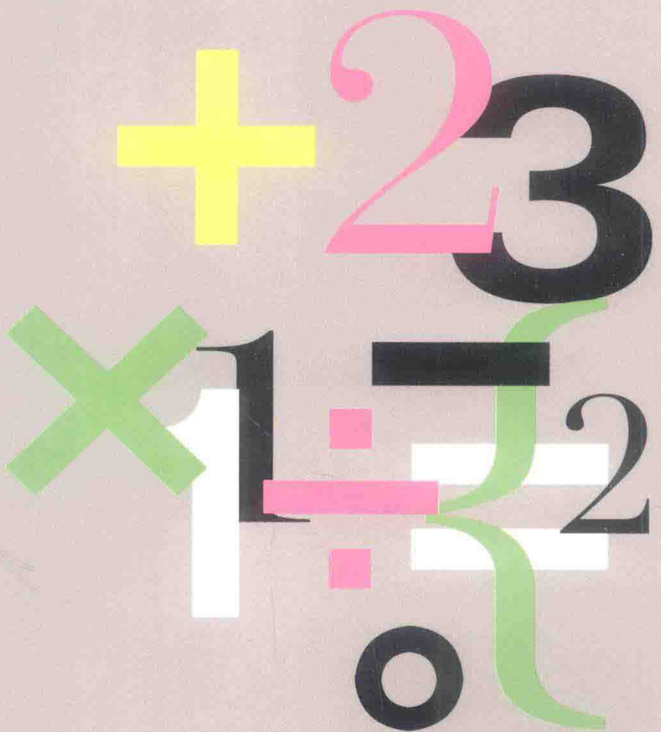


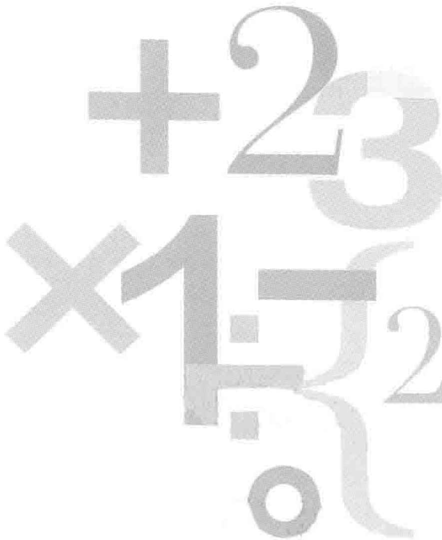
One,Two, Three: Absolutely Elementary Mathematics

123和＋－×÷的数学旅行:

25段抽丝剥茧的数学探索

[美]大卫·伯林斯基 著　甘锡安 译

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社



One,Two, Three: Absolutely Elementary Mathematics

123和＋－×÷的数学旅行:

25段抽丝剥茧的数学探索

［美］大卫·伯林斯基 著　甘锡安 译

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

123 和＋－×÷的数学旅行：25 段抽丝剥茧的数学探索／（美）伯林斯基著；甘锡安译．— 杭州：浙江大学出版社，2014.12

书名原文：One, Two, Three：Absolutely Elementary Mathematics

ISBN 978-7-308-14105-5

Ⅰ．①1… Ⅱ．①伯… ②甘… Ⅲ．①数学－普及读物 Ⅳ．①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 280776 号

123和＋－×÷的数学旅行：25段抽丝剥茧的数学探索

［美］伯林斯基 著 甘锡安 译

责任编辑 杨苏晓

装帧设计 罗 洪

出版发行 浙江大学出版社

（杭州天目山路 148 号 邮政编码 310007）

（网址：http:// www.zjupress.com）

排 版 北京大观世纪文化传媒有限公司

印 刷 北京中科印刷有限公司

开 本 880mm×1230mm 1/32

印 张 9.75

字 数 183千

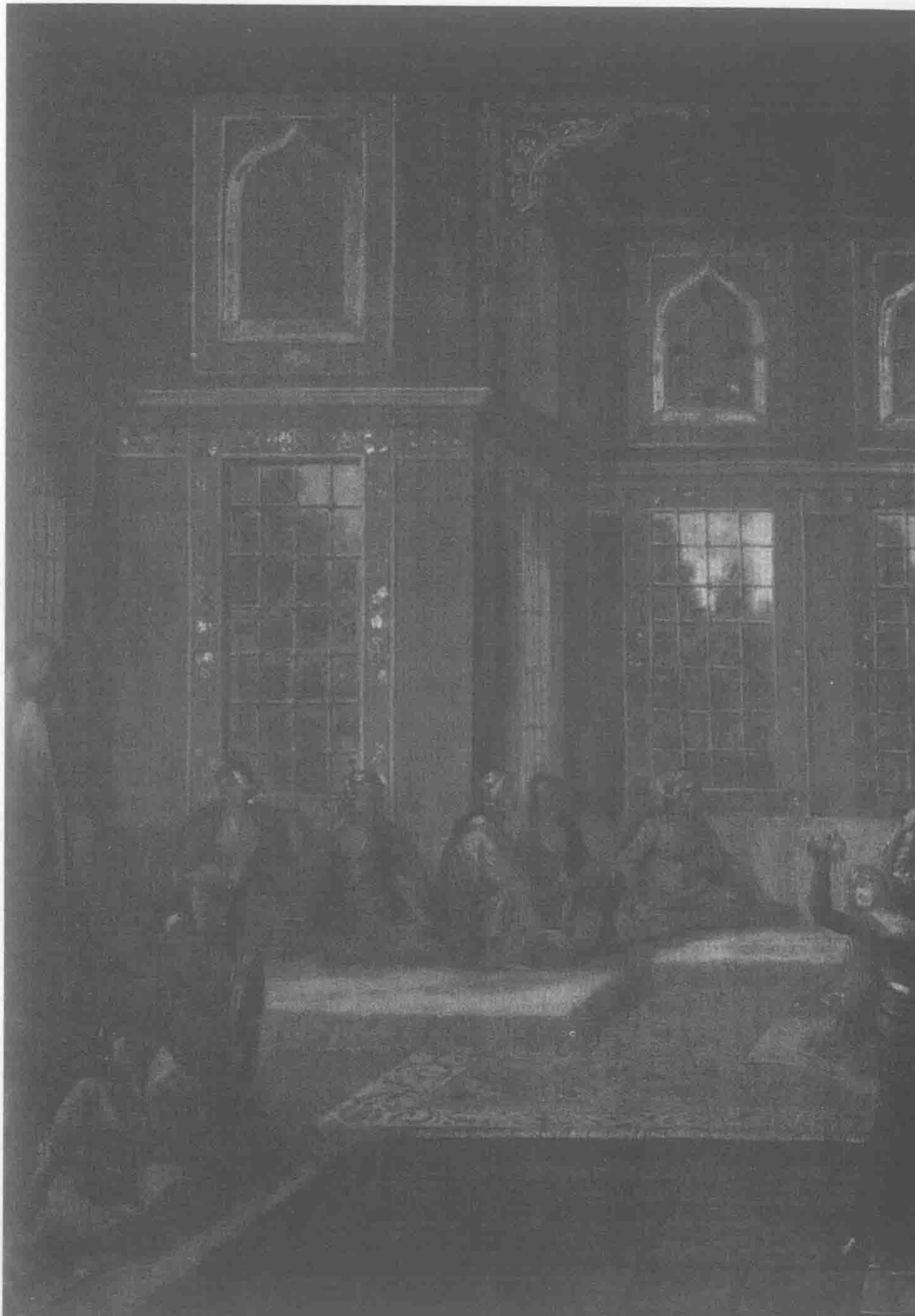
版 印 次 2014年12月第1版 2014年12月第1次印刷

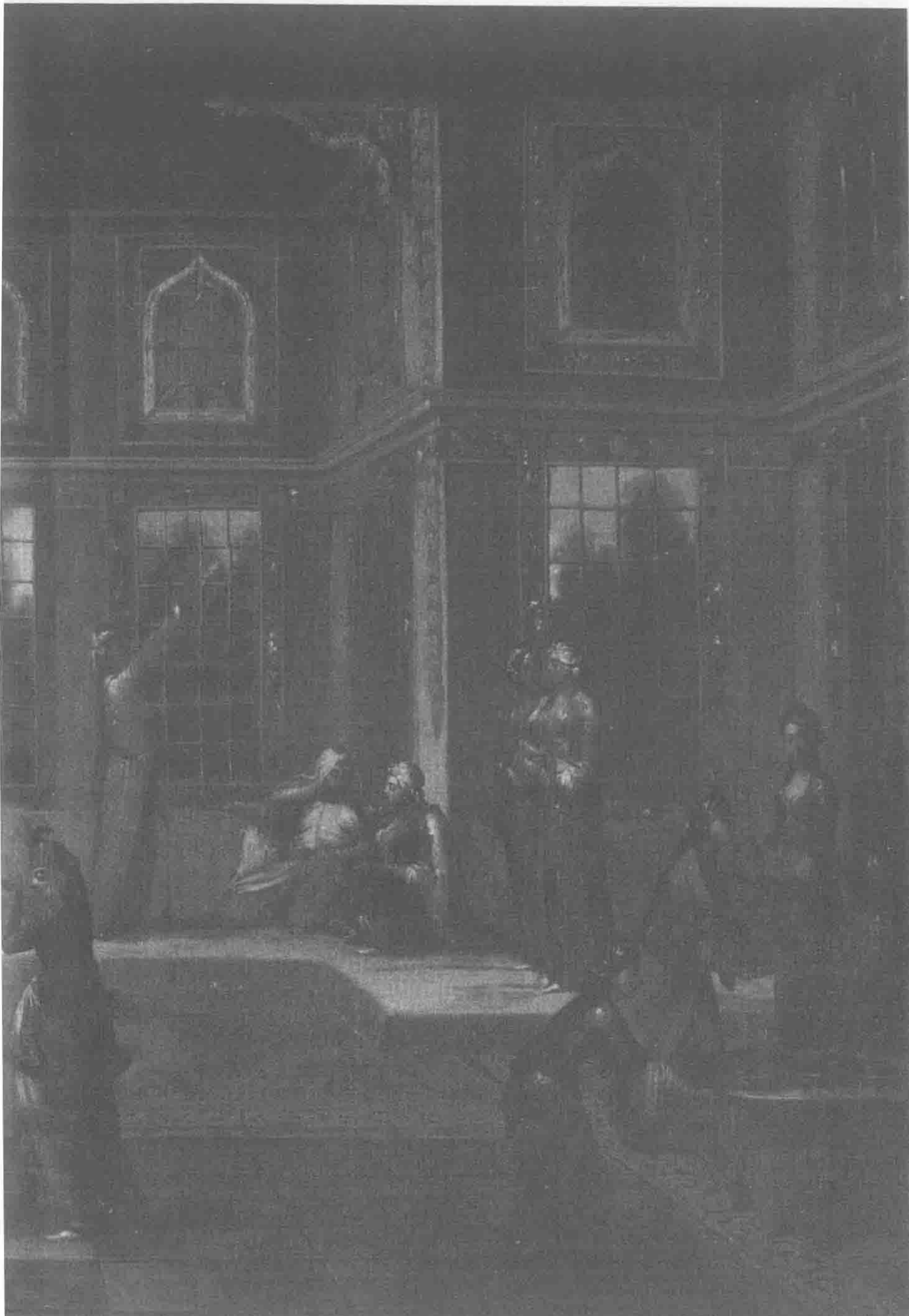
书 号 ISBN 978-7-308-14105-5

定 价 38.00元

启真馆 出品

献给尼尔·柯佐迪（Neal Kozody）





目录

绪论

这本小书的主题是“超基础数学”（absolutely elementary mathematics，AEM）；也就是说，本书谈的是自然数、0、负数和分数。这不是一本教科书，不是专门论著，也非参考书。我希望以这本书作为我其他数学书籍的支柱。

数学家向来设想数学就像一个城市，城市天际线矗立着三座雄伟的高塔，如同一个强大智识文化各领域的掌管者——恰如我们现在的文化一样。这三座雄伟的建物分别致力于“几何”、“分析”和“代数”，探究的对象各是空间、时间及符号和结构。

这些建物就像巴比伦塔，散发出神圣的氛围。

它们所立足的共同基础一样很神圣，因为人类足迹杂沓而显得神圣。

这就是“超基础数学”的领域。

数学中有许多领域散发着迷人的光彩，这些领域都很奇特。基础数学一方面让我们想到寻常可见的日常事物，例如支付账单、标记生日、划分债务、切割面包和测量距离，都是些再实际不过

的事。假设明天教科书都没了，书中的珍贵知识也随之消失，微积分大概要过几百年才会重新被发现，但我们的债务只要几天就会再度被提到，而用来表示债务的数字也会跟着出现。

研究经常会学到且有时会用到的基础数学，必须沉浸在混杂之中。耐心是必备条件，乐趣则不会那么快出现。小数点似乎会游走，负数变成正数，分数还会突然上下倒转过来。

$\frac{3}{4}$ 除以 $\frac{7}{8}$ 是多少？

电子计算机让几乎所有人都以漫不经心、无关紧要的态度处理这类问题。计算机计算得快速、正确又轻松，而且比百年前的人大费周章得出的答案更好。认为自己已经很熟悉基础数学（尽管是记得一半而忘了一半）的想法让人欣慰，准确得近乎过分的计算机也是如此。然而，记忆和科技的必然性却带来一个显而易见的问题：为什么要花力气去学我们已经知道，或者至少我们认为自己知道的事？

这个问题体现一种混淆的情况。基础数学的技巧是一回事，但**解释**基础数学完全是另一回事。每个人都知道如何将两个单纯的自然数相加，例如 2+2。要说明加法的意义，以及证明它确实可行，是一件很困难的工作。数学能解释加法的意义，也能提出理由来证明它确实可行。因此而得出的理论必须兼具的精巧和细致，与所有伟大智识努力的特质完全相同。

原本情况很可能完全不是这么回事。尽管基础数学十分重要，

却可能与它的理论不连贯，以致展开后就像一张地图，地图上的路不是毫无理由地分叉，就是通往绝望的一团乱中不知所终。不过，可以用来解释基础数学及证明相关技巧确实可行的理论，在智识上具有连贯性。它效用强大，十分合理，而且毫不违反直觉，因此适用于它的学科。如果说最简单的数学运算——还是加法——还有些我们不了解的东西，那只是因为在自然（或生命）中没有什么是如我们所希望的那样全然了解的。

尽管如此，得出的理论是十分根本的。不要怀疑这一点。初期教育的主要内容已经消失无踪。有一个观念仍然存在，因此这个观念成了主流：**超基础数学的计算和概念，受一个人的单一计数行为控制**。这个分析有一种经济效益，并且将经验化约为一些要点，引人注目的程度与在自然科学中所见的一切不相上下。

19 世纪末之前，没有人了解这一点；一个世纪之后，依然没有被广泛了解。学校教学没有太大帮助。德国数学家兰道（Edmund Landau）在其著作《分析之基础》（*Foundations of Analysis*）中写道："请忘记你在学校学过的东西，你根本没有学会。"

有时候，我会要求读者自己忘记某些东西。

现在必须透露一个秘密。它是所有撰写数学作品（或教数学）的人都很熟悉的秘密：没有人非常喜欢这门学科。这句话最好立

刻说出来。数学就像国际象棋一样，拥有令人着迷的力量，但通常不容易让人爱上它。

为什么会这样——我的意思是，为什么大家不喜欢数学？

有两个显而易见的原因。数学让初学者感到陌生，这种陌生感与数学运用神秘艰涩符号的程度大致成正比。有一种关于数学符号使用的看法，也可以说是一种牢骚，就是当一件事需要耐心时，似乎很难从中获得乐趣。

为什么这么麻烦？

如果说数学的符号工具是使它难以广受喜爱的原因之一，论证（argument）就是另一个原因。数学攸关证明，否则什么都不是。但证明当然不会来得那么容易。即使是一个简单的数学论证，论述的详尽程度往往仍相当惊人；而更糟的是，一个证明的复杂结构与该证明意欲演示（demonstration）的简单明了之事，两者之间落差极大。0 与 1 之间没有自然数。谁会怀疑这件事？但你必须证明这一点，而且要一步步证明。这得用上一些很困难的观念。

为什么这么麻烦？

无可避免地，这个过程涉及棘手的交易。在数学中，有投入才会有收获，而收获绝不像投入那样如此显而易见。许多人不愿参与这样的交易。

真的，为什么这么麻烦？

这个问题并不可耻。它值得回答。

就数学的许多领域来说，答案是清楚明白的。几何研究的是空间，是点与点之间神秘难解的事物。对几何漠不关心，就是对物质世界漠不关心。这就是为什么高中生在学习欧几里得时，多半认为自己正被迫学习某种他们必须了解的东西，觉得不太情愿。

那么代数呢？代数符号有一种控制事物的不断变动的神奇力量，这种感觉向来能抵消这门学科（在高中）引起的反感。古代教科书的主要内容谈的是农民和肥料，但现代教科书的主要内容则是讲其中的能量和质量数字。爱因斯坦只需要高中代数就能建立他的狭义相对论，而且一定需要高中**代数**，否则他将无法建立这个理论。

数学分析以微积分的形式，受到欧洲数学家慎重关注。他们几乎立刻了解到，他们已经获赐最重要且在某些方面来说是最伟大的科学理论。怀疑分析的重要性，或者嘲弄它的主张，就是忽视人类所获取最丰富且最极度发展的知识体系。

是的，没错。这确实令人振奋，但“超基础数学”如何？不久之前，法国数学家孔恩（Alain Connes）发明**古数学**（archaic mathematics）一词，用以描述构想处于原始阶段且尚未区分为不同学科的领域。这个措辞很优雅，描述贴切。它显示出如果正确理解，基础数学绝对力量非凡的原因。它是基本的事物，而且就

像语言一样，是一种人类本能的表示。

“超基础数学”**理论**是以现代词汇，描述某种想象深处的事物。这个理论数百年来的发展，象征自我意识的一种非凡运用。

这就是需要花费这么多心力的原因。透过数学家之眼来观看一个古老而熟悉的领域，我们能够获得力量，第一次透彻了解它。

它绝对不是不重要的东西。

2010年于巴黎