

21世纪 民航高等教育规划教材

# 电磁场与微波技术

DIANCICHANG YU WEIBO JISHU

© 孙俊卿 李强 许明妍 编著

中国民航出版社

# 电磁场与微波技术

孙俊卿 李强 许明妍 编著

中国民航出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

电磁场与微波技术/孙俊卿编著. —北京: 中国  
民航出版社, 2013. 7  
ISBN 978-7-5128-0123-3

I. ①电… II. ①孙… III. ①电磁场-高等学校-教  
材②微波技术-高等学校-教材 IV. ①0441.4②TN015

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 135691 号

责任编辑: 姚祖梁 韩景峰

电磁场与微波技术

孙俊卿 李强 许明妍 编著

---

出版 中国民航出版社  
地址 北京市朝阳区光熙门北里甲 31 号楼 (100028)  
排版 中国民航出版社照排室  
印刷 中国电影出版社印刷厂  
发行 中国民航出版社 (010) 64297307 64290477  
开本 787×1092 1/16  
印张 17.5  
字数 396 千字  
版本 2013 年 7 月第 1 版 2013 年 7 月第 1 次印刷

---

书号 ISBN 978-7-5128-0123-3  
定价 36.00 元

(如有印装错误, 本社负责调换)

# 前 言

本书是作者根据高等院校课程体系改革需要，在多年本科教学的基础上参考兄弟院校的相关教材编写而成的。

在本书的编写过程中，作者遵循以下三个原则：①内容涉及面宽，适合当今宽口径和少学时的教学需求。本书内容包括微波工程领域的电磁场理论、微波技术、微波网络、微波天线和电波传播及光纤技术。②内容连贯，便于使用。书中各章内容的衔接以及选修课程普通物理和高等数学的内容的衔接既避免内容的重复，又消除了拼接的痕迹。使用本书不需要预先开设矢量分析、电磁场与电磁波。③简化推导过程，注重概念的解释与应用。因学时的限制和工科人才培养目标的需要，本书不追求基本规律和定律推导的系统性和完整性，而是强调分析问题的方法和思路，加强对基本概念的解释和应用。

本书的参考学时为 50~70 学时，共分为 7 章。第 1 章为矢量分析，介绍研究场的数学方法，重点研究了矢量场的散度、环流以及标量场的梯度，并简要介绍了亥姆霍兹定理。第 2 章为电磁场理论基础，主要介绍电磁场的基本物理量、基本方程、边界条件，均匀平面波在理想介质中的传播特性及在不同媒质分界面的反射与折射。第 3 章为传输线理论，用“路”的分析方法分析了双导体传输线的传输特性，建立了分布参数、输入阻抗、特性阻抗、反射系数、驻波比、阻抗匹配的概念。第 4 章为微波传输线，主要介绍了用“场”的分析方法分析金属波导传输线的特性。第 5 章为微波网络基础，介绍了微波网络的特性参量和工作特性参量。第 6 章为微波元件，主要介绍常用微波无源元件的结构、特性及工作原理。第 7 章为天线与电波传播，主要介绍天线的主要特性参量，电基本振子、磁基本振子及常用线天线和面天线的辐射特性，最后简单介绍了电波传播的规律和特点。

本书由中国民航大学孙俊卿主持编写，李强编写了第 1 章和第 2 章，许明妍编写了第 7 章，其余内容由孙俊卿编写并统编全书。天津大学金杰教授、中国民航大学耿宏教授审阅了全书。在编写过程中，罗云林教授、韩萍教授给予了大力支持和帮助，在此对他们致以诚挚的谢意。

由于编者水平有限，书中难免存在错误和不当之处，希望广大读者批评指正。

编者

2012 年 6 月于中国民航大学

# 内 容 提 要

本书系统介绍了电磁场与电磁波、微波技术与天线的基本概念、基本理论与基本分析方法。全书分为7章，内容包括矢量分析、电磁场理论基础、传输线理论、微波传输线、微波网络基础、微波元件及天线与电波传播。每章附有一定数量的例题和习题，以帮助读者对基本概念和基本理论进行掌握与理解。

本书可作为电子与通信类专业本科生教材，也可作为有关工程技术人员的参考书。

# 目 录

## 前言

第 1 章 矢量分析	1
1.1 场的概念	1
1.2 矢量场的通量与散度	5
1.3 矢量场的环流与旋度	9
1.4 标量场的梯度	13
1.5 亥姆霍兹定理	17
第 2 章 电磁场理论基础	19
2.1 电磁场中的基本物理量	19
2.2 电磁场中的基本方程	23
2.3 电磁场的边界条件	33
2.4 交变电磁场的能量及能流	37
2.5 时谐电磁场	39
2.6 平面电磁波	42
2.7 均匀平面波在不同媒质分界面上的垂直入射	52
2.8 均匀平面波在不同媒质分界面上的斜入射	57
2.9 电磁波的色散与群速	64
第 3 章 传输线理论	69
3.1 引言	69
3.2 传输线方程及其解	72
3.3 传输线的特性参数	76
3.4 均匀无耗传输线的输入阻抗与反射系数	79
3.5 均匀无耗传输线工作状态的 analysis	85

3.6 阻抗圆图及其应用 .....	94
3.7 传输线的阻抗匹配 .....	101
<b>第4章 微波传输线</b> .....	<b>112</b>
4.1 理想导波系统的一般理论 .....	112
4.2 矩形波导 .....	115
4.3 圆波导 .....	129
4.4 同轴线 .....	136
4.5 带状线 .....	138
4.6 微带线 .....	140
4.7 耦合微带线 .....	143
4.8 光纤 .....	146
<b>第5章 微波网络基础</b> .....	<b>152</b>
5.1 引言 .....	152
5.2 波导等效为双线 .....	152
5.3 微波元件等效为微波网络 .....	155
5.4 二端口微波网络 .....	158
5.5 二端口微波网络的工作特性参量 .....	170
<b>第6章 微波元件</b> .....	<b>176</b>
6.1 波导中的电抗元件 .....	176
6.2 连接元件和终端元件 .....	179
6.3 衰减器和移相器 .....	184
6.4 定向耦合器 .....	185
6.5 微带功分器 .....	189
6.6 波导匹配双 T .....	191
6.7 微波谐振器 .....	195
6.8 微波铁氧体元件 .....	205
<b>第7章 天线与电波传播</b> .....	<b>214</b>
7.1 引言 .....	214
7.2 基本振子的辐射 .....	216

7.3 发射天线的电参数 .....	221
7.4 接收天线与发射天线的互易性 .....	230
7.5 对称振子天线 .....	231
7.6 天线阵的方向性 .....	236
7.7 直立振子天线与水平振子天线 .....	244
7.8 引向天线 .....	252
7.9 缝隙天线 .....	253
7.10 面天线 .....	254
7.11 无线电波的传播 .....	257
附录一 矩形截面波导参数表 .....	267
附录二 常用硬同轴线特性参数 .....	268
附录三 常用射频同轴电缆线特性参数 .....	269
附录四 史密斯圆图 .....	270
参考文献 .....	271



# 第1章 矢量分析

电场和磁场都是矢量场，因此在研究电磁场与电磁波之前，我们先介绍一下用于分析矢量场和标量场问题的数学工具——矢量分析。本章将重点讨论标量场的梯度、矢量场的通量和散度以及矢量场的环流与旋度。

## 1.1 场的概念

### 1.1.1 场的定义

如果某个物理量在某区域中的每一点处，在每一时刻都有确定的值，就说在该区域中存在该物理量的场 (field)。比如，锅炉内的温度分布就形成了温度场，河流中的水流速度分布就形成了流速场。

### 1.1.2 场的分类

若物理量为标量，则场称为标量场 (scalar field)，如温度场、电位场、密度场等；若物理量为矢量，则场称为矢量场 (vector field)，如流速场、电场、磁场等。

若场中各点对应的物理量不随时间变化，则该场称为静态场 (static field)，否则为时变场 (time-varying-field)，如电场分为静电场和时变电场。

### 1.1.3 场的数学表示

可以用数学表达式定量地表示场在空间的分布和随时间的变化。

#### 1. 标量场

一个标量场  $u$  可以用一个标量函数来表示。在直角坐标系中，可将  $u$  表示为

$$u = u(x, y, z) \quad (1.1.1)$$

若  $u$  为时变场, 则可表示为

$$u = u(x, y, z, t) \quad (1.1.2)$$

一般都假设函数  $u$  连续且具有一阶偏导数。

## 2. 矢量场

矢量场空间中任意一点  $P$  处的矢量可以用一个矢性函数  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(P)$  来表示。当选定了直角坐标系后, 它就可以写成如下形式:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z) \quad (1.1.3)$$

设  $A_x, A_y, A_z$  为矢性函数  $\mathbf{A}$  在直角坐标系中的三个坐标分量, 且假定它们都具有一阶连续偏导数, 则  $\mathbf{A}$  又可以表示为

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \mathbf{e}_x A_x(x, y, z) + \mathbf{e}_y A_y(x, y, z) + \mathbf{e}_z A_z(x, y, z) \quad (1.1.4)$$

若  $\mathbf{A}$  为时变场, 则可表示为

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \mathbf{e}_x A_x(x, y, z, t) + \mathbf{e}_y A_y(x, y, z, t) + \mathbf{e}_z A_z(x, y, z, t) \quad (1.1.5)$$

### 1.1.4 场的场图表示

研究标量场和矢量场时, 以“场图”表示场变量在空间逐点分布的情况具有重要的意义。对于标量场, 用“等值面”或“等值线”图。空间内标量值相等的点集合形成的曲面称为等值面 (equivalence surface), 若标量场只与两个变量有关, 则等值面变为等值线 (isoline)。例如气象图上的等压线、地图上的等高线等。图 1.1.1 为某地区的等高线。

标量场  $u$  的等值面方程为

$$u = u(x, y, z) = c \quad (c \text{ 为常数}) \quad (1.1.6)$$

式中,  $c$  取不同的值可以得到不同的等值面。例如, 无界自由空间中, 位于原点电量为  $q$  的点电荷在空间一点  $(x, y, z)$  的电位为

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (\epsilon_0 \text{ 为真空中的介电常数})$$

等位面方程  $x^2 + y^2 + z^2 = C$  所描述的曲面是一簇以原点为球心的同心球面。如图 1.1.2 所示。

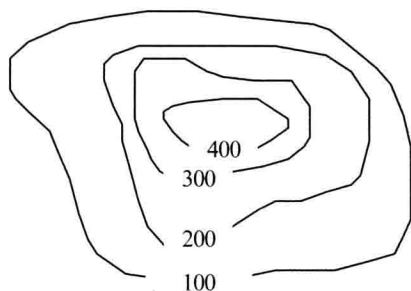


图 1.1.1 标量场的等值面图形

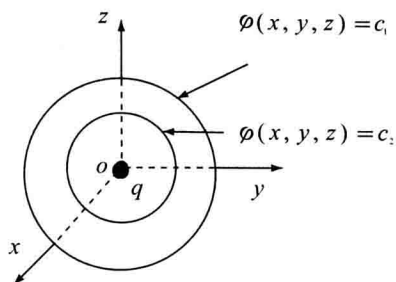


图 1.1.2 坐标原点处点电荷的等位面

对于矢量场，则用一些有向曲线形象地表示矢量在空间的分布，称为矢量线 (streamline)，如图 1.1.3 所示。矢量线是有向曲线，其上任意点的切线方向与该点处场矢量的方向相同，流速场的流线、电场的电力线和磁场的磁力线都是矢量线的例子。

下面我们来讨论矢量线方程的表达式。设  $P$  为矢量线上任一点，其矢径为  $\mathbf{r}$ ，则根据矢量线的定义，必有

$$\mathbf{A} \times d\mathbf{r} = 0 \quad (1.1.7)$$

其中  $d\mathbf{r}$  为矢量线切向的一段矢量，在直角坐标系中， $d\mathbf{r}$  的表达式为

$$d\mathbf{r} = e_x dx + e_y dy + e_z dz \quad (1.1.8)$$

将其代入式 (1.1.7) 即得矢量场的矢量线满足的微分方程为

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z} \quad (1.1.9)$$

求解该微分方程就可得到空间中的矢量线簇。

**例 1.1.1** 设点电荷  $q$  位于坐标原点，它在空间任一点  $P(x, y, z)$  处所产生的电场强度矢量为

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (e_x x + e_y y + e_z z)$$

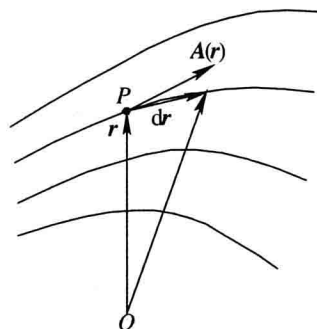


图 1.1.3 矢量线

式中,  $q$ 、 $\epsilon_0$  均为常数,  $\mathbf{r} = e_x x + e_y y + e_z z$  为  $P$  点的位置矢量。求  $\mathbf{E}$  的矢量线方程并画出矢量线图。

解: 由式 (1.1.9) 求得该电场强度的矢量线 (即电力线) 方程为

$$\frac{dx}{qx/4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{dy}{qy/4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{dz}{qz/4\pi\epsilon_0 r^3}$$

从而得到三个联立方程

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}, \quad \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}$$

解之, 得  $x = c_1 y$ ,  $y = c_2 z$ ,  $z = c_3 x$ 。其图形为一簇经过坐标原点的直线, 若电荷为正电荷, 则电力线如图 1.1.4 所示。

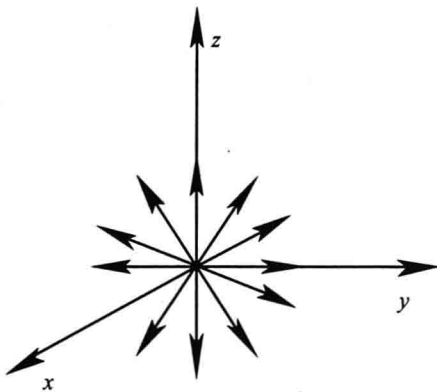


图 1.1.4 点电荷的电场矢量线

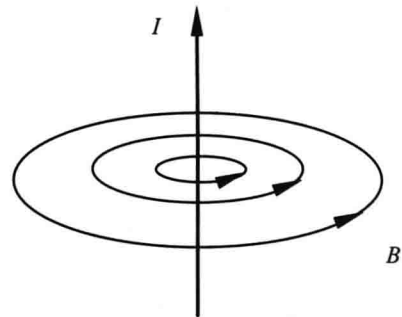


图 1.1.5 直线电流周围的磁场

若矢量线为有起点、有终点的曲线, 则矢量场称为有源场。发出矢量线的点和吸收矢量线的点分别称为矢量场的正源和负源, 二者统称为通量源。若矢量线是无头无尾的闭合曲线并形成漩涡, 这种矢量场称为有旋场。有旋场由穿过矢量线漩涡的漩涡源激发。以磁场为例, 由电磁学可知, 直线电流  $I$  产生的磁感应强度  $\mathbf{B}$  的方向环绕该电流, 磁力线是环绕电流的闭合线, 如图 1.1.5 所示, 因此电流是有旋磁场的漩涡源。

矢量线的形态和方向体现了场中各点处矢量的方向, 还可以利用矢量线的疏密来体现场中各点处矢量的强度。通常规定, 场中每一点的矢量线密度 (即穿过与矢量线垂直的单位面积的矢量线数) 在数值上等于该点场矢量的模。按照这个规定画出的矢量线, 其疏密程度体现了场矢量的强弱。在图 1.1.4 中, 原点附近的电场强度较强, 矢量线较密; 远离原点的地方电场强度较弱, 矢量线较疏。

## 1.2 矢量场的通量与散度

### 1.2.1 矢量场的通量

如图 1.2.1 所示, 在矢量场  $\mathbf{A}$  中, 取一个面元  $dS$ , 因面元在空间有一定的取向, 故可用一个矢量来表示面元。取一个与面元相垂直的单位矢量  $\mathbf{n}$ , 则面元矢量为

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS \quad (1.2.1)$$

$\mathbf{n}$  的取法有两种情形: 一是  $dS$  为一个开表面上的面元, 这个开表面由一条闭合曲线  $C$  围成, 如图 1.2.2 所示, 选择闭合环  $C$  的环行方向后, 按右手螺旋法则, 螺旋前进的方向为  $\mathbf{n}$  的方向; 另一情形是  $dS$  为一个闭合面的外法线方向, 则一般  $\mathbf{n}$  取闭合面的外法线方向。

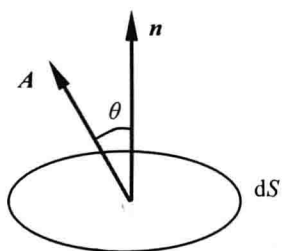


图 1.2.1 面元矢量

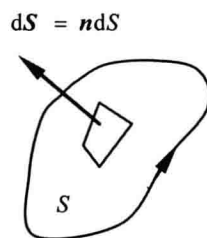


图 1.2.2 开表面

由于所取的面元  $dS$  很小, 因此可认为在面元上各点矢量场  $\mathbf{A}$  的值相同,  $\mathbf{A}$  与面元  $dS$  的标量积称为矢量场  $\mathbf{A}$  穿过  $dS$  的通量 (flux), 记作

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = A \cos \theta dS \quad (1.2.2)$$

其中  $\theta$  为矢量  $\mathbf{A}$  与面元矢量  $d\mathbf{S}$  的夹角。

在分析和描绘矢量场的性质时, 矢量穿过一个曲面的通量是一个很重要的基本概念。矢量  $\mathbf{A}$  沿有向曲面  $S$  的面积分

$$\Phi = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_S A \cos \theta dS \quad (1.2.3)$$

称为矢量  $\mathbf{A}$  穿过曲面  $S$  的通量。

若  $S$  为闭合曲面, 则穿出闭合面的总通量可表示为

$$\Phi = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S A \cos \theta dS \quad (1.2.4)$$

通量的意义可以流体场为例进行研究：如果穿过闭合面  $S$  的  $\mathbf{v}$  通量不等于零，则表示闭合面包围的体积内有净流量流出或流入。若  $\Phi = \oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} > 0$ ，则表示每秒有净流量流出，说明体积内存在流体的“源”；反之，若  $\Phi = \oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} < 0$ ，则表示每秒有净流量流入，说明体积内存在流体的“沟”（或称负源）；若  $\Phi = \oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ，则流入体积内和从体积内流出的流量相等，即体积内“源”和“沟”的总和为零或体积内既无源也无沟。

## 1.2.2 矢量场的散度

### 1. 散度的定义

上述通量是一个大范围上的积分量，它反映了在某一空间内场源总的特性，但它没有反映出场源分布特性。为了研究矢量场  $\mathbf{A}$  在某点附近的通量特性，我们把包围点的封闭曲面向该点无限收缩，使包含这个点在内的体积元  $\Delta v$  趋于零，取如下极限

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v}$$

称此极限为矢量场  $\mathbf{A}$  在该点的散度 (divergence)，记为  $\text{div}\mathbf{A}$ ，即散度的定义式为

$$\text{div}\mathbf{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} \quad (1.2.5)$$

此式表明，矢量场  $\mathbf{A}$  的散度是一个标量，它表示从该点单位体积内散发出来的矢量  $\mathbf{A}$  的通量。

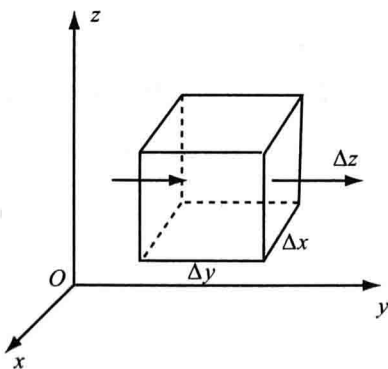


图 1.2.3 直角坐标内计算  $\text{div}\mathbf{A}$

### 2. 散度的计算

由散度的定义可以知道， $\text{div}\mathbf{A}$  与所取体积元  $\Delta v$  的形状无关，只要在取极限时，所有的尺寸都趋于零即可。现在在直角坐标内来推导  $\text{div}\mathbf{A}$  的计算式。

以所研究的点  $(x, y, z)$  为顶点作一个平行六面体，如图 1.2.3 所示，图中三个边分别为  $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 、 $\Delta z$ ，分别计算三对表面穿出的  $\mathbf{A}$  的通量。左

右一对表面穿出的净通量为

$$-A_y \Delta z \Delta x + \left( A_y + \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta y \right) \Delta z \Delta x = \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

同理可得, 从上一对表面和前后一对表面穿出的净通量分别为  $\frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$  和  $\frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$ 。

又因  $\Delta v = \Delta x \Delta y \Delta z$ , 所以根据式 (1.2.5) 得

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

因此

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.2.6)$$

为了方便, 我们引入一个矢性微分算子, 在直角坐标系中有:

$$\nabla = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.2.7)$$

式 (1.2.7) 称作哈密顿算子, 记号  $\nabla$  (读作“del”或“纳布拉”) 是一个微分符号, 同时又要当作矢量看待。哈密顿算子  $\nabla$  与矢性函数  $\mathbf{A}$  的点积为一标量函数。

在直角坐标系中, 散度的表达式可以写为

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \left( e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned}$$

可见, 矢量场  $\mathbf{A}$  的散度可表示为哈密顿微分算子  $\nabla$  与矢量  $\mathbf{A}$  的标量积, 即

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (1.2.8)$$

矢量函数  $\mathbf{A}$  在圆柱坐标系和球坐标系中的散度表达式分别为

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.2.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \quad (1.2.10)$$

在矢量场中，若  $\nabla \cdot \mathbf{A} = \rho \neq 0$ ，称之为有源场， $\rho$  称为（通量）源密度，其矢量线有起点和终点，例如我们在第 1.1 节中分析的点电荷的电场就是有源场；若矢量场中处处  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ，称之为无源场，其矢量线为无头无尾的闭合曲线，例如在第 1.1 节中分析的直线电流的磁场就属于无源场。

### 3. 散度运算的基本公式

$$\nabla \cdot \mathbf{C} = 0 (\mathbf{C} \text{ 为常矢量}) \quad (1.2.11a)$$

$$\nabla \cdot (c\mathbf{A}) = c \nabla \cdot \mathbf{A} (c \text{ 为常矢量}) \quad (1.2.11b)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} \pm \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (1.2.11c)$$

## 1.2.3 散度定理（高斯定理）

在矢量分析中，一个重要的定理是

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV \quad (1.2.12)$$

上式称为散度定理（或高斯定理）。式中， $V$  是闭合曲面  $S$  所包围的体积。证明这个定理时，将闭合面  $S$  包围的体积  $V$  分成许多体积元： $dV_1, dV_2, \dots$ ，计算每个体积元的小闭合面上穿出的  $\mathbf{A}$  的通量，然后叠加。由式（1.2.5）得

$$\oint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV_1, \quad \oint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV_2, \quad \dots$$

由于相邻两体积元有一个公共表面，这个公共表面上的通量对这两个体积元来说恰好等值异号，求和时就互相抵消了。除了临近  $S$  面的那些体积元，它们有部分表面是  $S$  面上的面元  $d\mathbf{S}$ ，这部分表面的通量没有被抵消，其总和刚好等于从闭合面  $S$  穿出的通量。因此有

$$\oint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \dots = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

故得到

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta V_n \rightarrow 0}} \sum_{n=1}^{\infty} \nabla \cdot \mathbf{A} dV_n = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV$$



**例 1.2.1** 矢量场  $\mathbf{r} = e_x x + e_y y + e_z z$ 。计算  $\mathbf{r}$  穿过球心在原点、半径为  $a$  的球面的通量  $\oint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$ ，并计算此矢量的散度  $\nabla \cdot \mathbf{r}$ ，验证散度定理。

**解：**由于在球坐标内， $\mathbf{r} = e_r r$  在球面上的大小均为  $a$ ，方向与球面上的面元矢量  $d\mathbf{S}$  的方向相同，因此

$$\oint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S a e_r \cdot e_r dS = a \oint_S dS = a \times 4\pi a^2 = 4\pi a^3$$

而  $\mathbf{r}$  的散度为

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

若在球坐标内计算，则

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3) = 3$$

所以

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{r} dV = \int_V 3 dV = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 = 4\pi a^3 = \oint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$$

## 1.3 矢量场的环流与旋度

### 1.3.1 矢量场的环流

矢量场  $\mathbf{A}$  沿空间有向闭合曲线  $L$  的线积分

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L A \cos\theta dl \quad (1.3.1)$$

称为矢量场  $\mathbf{A}$  沿曲线  $L$  的环流 (circulation)，其中， $\theta$  为  $\mathbf{A}$  与  $d\mathbf{l}$  之间的夹角。

矢量场的环流与矢量场的通量一样都是描述矢量场特性的重要参量。我们知道，若矢量场穿过封闭曲面的通量不为零，则表示该封闭曲面内存在通量源。同样，矢量沿闭合曲线的环流不为零，则表示该封闭曲线内存在另一种源——漩涡源。例如对于流速场，若  $\Gamma = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0$ ，则表示流体不作漩涡状流动；若  $\Gamma = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$ ，则表示流体作漩涡状流动。