全国技工学校通用教材

数学

（上册）

劳动和社会保障部培训就业司认定

（第三版）

劳动出版社

全国技工学校通用教材

数　学

SHU　XUE

上册

(第三版)

劳动和社会保障部教材办公室组织编写

中国劳动出版社

·北　京·

图书在版编目（CIP）数据

数学（上）/丛日明主编．-3版．-北京：
中国劳动出版社，1999
ISBN 7-5045-0446-7

Ⅰ．数…
Ⅱ．丛…
Ⅲ．数学-技工学校-教材
Ⅳ．012

中国版本图书馆CIP数据核字（1999）第12270号

中国劳动出版社出版发行
（北京市惠新东街1号　邮政编码：100029）
出 版 人：唐云岐
*
新华书店经销
北京地质印刷厂印刷　北京密云青云装订厂装订
850毫米×1168毫米　32开本　5.625印张　145千字
1999年5月第3版　2004年8月第18次印刷
印数：100000册
定价：9.00元
读者服务部电话：010-64929211
发行部电话：010-64911190
出版社网址：http://www.class.com.cn

简　介

本书是根据劳动和社会保障部培训就业司颁发的《数学教学大纲》(1999)编写，供技工学校各专业使用的通用教材。

本书分上、下两册。本册内容包括：集合与函数，三角函数，复数。

本书也可作为职业高中、职工培训教材和自学用书。

本书由丛日明、王义祥编写，丛日明主编；古文卿、王乃玉、方涛审稿，古文卿主审。

说　　明

根据劳动和社会保障部培训就业司颁发的技工学校《数学教学大纲》(1999),我们组织修订了全国技工学校通用教材《数学》。新版教材的内容力求有助于提高学生的文化素质,并为学习专业理论和掌握操作技能奠定基础,注重理论与实际密切结合,培养学生观察、分析和解决问题的能力。针对技工学校学生的特点,教材内容避免偏多、偏深、偏难,注意做好与初中课程内容的衔接,准确把握重点和难点。为适应不同专业的需要,增强了教材的通用性。同时,教材中贯彻了有关的现行国家标准。

《数学》(第三版)分上、下两册,共六章。学校可根据专业需要,按照《数学教学大纲》的有关要求,确定其中的教学内容和教学顺序。书中习题主要用于课堂练习。另外,还组织编写了与教材配套的习题册,供课外作业使用,其中标有 * 号的题难度略大,可以选做。

教材的修订工作得到江苏、北京、河南、浙江、四川、山东、湖南、天津、广西等省、市、自治区劳动厅(局),以及南通市中等专业学校、郑州电缆(集团)公司技工学校、浙江省金华市技工学校、山东烟台市高级技工学校的大力支持和协助,我们表示衷心感谢。

劳动和社会保障部教材办公室

一九九九年

目　录

第一章　集合与函数 …………………………………… (1)
§1.1　集合的概念 …………………………………… (1)
§1.2　集合的运算 …………………………………… (6)
§1.3　简单的不等式与区间 ……………………… (10)
§1.4　函数 …………………………………………… (16)
§1.5　反函数 ………………………………………… (25)
§1.6　幂函数 ………………………………………… (28)
§1.7　指数 …………………………………………… (31)
§1.8　指数函数 ……………………………………… (35)
§1.9　对数 …………………………………………… (39)
§1.10　对数函数 …………………………………… (42)
小　结 …………………………………………………… (46)
第二章　三角函数 …………………………………… (51)
§2.1　角的概念的推广 …………………………… (51)
§2.2　弧度制 ………………………………………… (55)
§2.3　任意角的三角函数 ………………………… (61)
§2.4　诱导公式 ……………………………………… (70)
§2.5　正弦定理和余弦定理 ……………………… (80)
§2.6　两角和与差的三角函数 …………………… (94)
§2.7　三角函数的积化和差与和差化积 ……… (104)

§2.8 正弦函数的图像和性质 …………………………（110）
§2.9 正弦型函数的图像 ………………………………（117）
§2.10 余弦函数、正切函数的图像和性质 …………（123）
§2.11 反三角函数的概念 ………………………………（128）
小 结 …………………………………………………（134）
第三章 复数 …………………………………………（139）
§3.1 复数的概念 ………………………………………（139）
§3.2 复数的三角形式 …………………………………（145）
§3.3 复数的指数形式和极坐标形式 ………………（149）
§3.4 复数的四则运算 …………………………………（154）
§3.5 复数三角形式的乘除运算 ………………………（158）
§3.6 复数指数形式和极坐标形式的乘除运算 ……（163）
§3.7 复数在电学中的应用举例 ………………………（167）
小 结 …………………………………………………（169）

第一章　集合与函数

§1.1　集合的概念

一、集合与元素

引例　我们先考察下列几组对象：(1) 我们学校的全体学生；(2) 某个工厂所有的机床；(3) 2,4,6,8；(4) 所有的等腰三角形；(5) 直线 $y=2x+1$ 上所有的点.

它们分别是由一些人、物、数、图形和点组成的整体，且每个整体中的对象都具有某种共同属性.

一般地，具有某种共同属性的不同对象的全体称为**集合**（简称**集**）. 集合里的各个不同对象称为这个集合的**元素**. 例如，(3)是由 2、4、6、8 这四个数组成的集合，其中的对象 2、4、6、8 都是这个集合的元素，这些元素的共同属性是“小于 10 的正偶数”.

尽管集合中的元素可以是各种各样具体的或抽象的事物，但我们在本章中主要研究数的集合（简称**数集**）和点的集合（简称**点集**）.

通常,集合用大写拉丁字母表示,元素用小写拉丁字母表示.下面是一些常用的数集及其记法:

全体非负整数的集合简称为**自然数集**,记作 $\mathbf{N}$;

自然数集内排除 0 的集称为**正整数集**,记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$;

全体整数的集合简称为**整数集**,记作 $\mathbf{Z}$;

全体有理数的集合简称为**有理数集**,记作 $\mathbf{Q}$;

全体实数的集合简称为**实数集**,记作 $\mathbf{R}$.

一般地,若 x 是集合 A 的元素,则称 x **属于** A,记作 $x\in A$;若 x 不是集合 A 的元素,则称 x **不属于** A,记作 $x\notin A$ 或 $x\overline{\in} A$.例如,$2\in\mathbf{N}$,$\sqrt{3}\notin\mathbf{Q}$.

含有无限多个元素的集合称为**无限集**.如上面引例中的(4)、(5)都是无限集.含有有限个元素的集合称为**有限集**.如上面引例中的(1)、(2)、(3)都是有限集.特别地,只含一个元素的集合称为**单元素集**.如方程 $x-5=0$ 的解组成的集合(简称**解集**)就是一个单元素集.不含任何元素的集合称为**空集**,记作 $\varnothing$.如方程 $x^2+1=0$ 在实数集 $\mathbf{R}$ 内的解集就是空集 $\varnothing$.

集合中的元素必须是确定的.这就是说,给定一个集合,任何一个对象是或不是这个集合的元素也就确定了.如给出小于 10 的正偶数集,它只有 2、4、6、8 这四个元素,其他对象都不是它的元素.

集合中的元素又是互异的.这就是说,集合中的元素不能重复出现,任何两个相同的对象归入同一个集合时,只能算作这个集合的一个元素.

二、集合的表示法

表示集合的方法,常用列举法和描述法两种.

把集合中的元素一一列举出来,写在大括号内,彼此用逗号分开,这种表示集合的方法称为**列举法**.

例 1 绝对值小于3的整数组成的集合,可以表示为:

$$\{-2,-1,0,1,2\}.$$

注 1 由 a 这一个元素组成的集合记作$\{a\}$,它与 a 是不同的: a 表示一个元素,$\{a\}$表示一个集合——单元素集.

注 2 用列举法表示集合时,可以不考虑元素的排列顺序.如例 1 中的集合,也可以表示为$\{0,1,-1,2,-2\}$等.

一般地,列举法多用于表示元素个数较少的集合.当元素的个数很多或无限多时,可以在列举出有代表性的元素后,用省略号表示那些被省略的元素.

例 2 不超过 100的自然数组成的集合,可以表示为:

$$\{0,1,2,3,\cdots,99,100\}.$$

把集合中元素的共同属性描述出来,写在大括号内,这种表示集合的方法称为**描述法**.

例 3 不等式 $x+1>3$ 的解集,可以表示为:

$$\{x\in\mathbf{R} \mid x+1>3\}.$$

注 我们约定,如果从上下文看,$x\in\mathbf{R}$ 是明确的,那么,在描述集合时,$x\in\mathbf{R}$ 可以省略不写.如例 3 中的集合也可以表示为$\{x \mid x+1>3\}$.

例 4 直线 $y=2x+1$ 上所有点的坐标组成的集合(也称为点集),可以表示为:

$$\{(x,y) \mid y=2x+1\}.$$

描述法的另一种表达形式是把集合中元素的共同属性直接写在大括号内.如所有等腰三角形的集合,可以表示为:

{等腰三角形}.

有时,为了形象地表示集合,我们还可以画一条封闭的曲线,用它的内部来表示一个集合. 如图 1-1 表示任意一个不是空集(简称**非空集**)的集合 A.

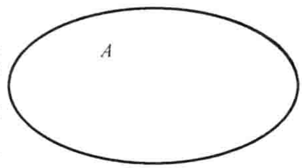

图 1-1

三、子集与真子集

定义 设 A、B 是两个集合. 若 A 的每一个元素都是 B 的元素,则称 A 是 B 的**子集**,记作 $A \subseteq B$(或 $B \supseteq A$),读作 A 包含于 B(或 B 包含 A).

对于任何一个集合 A,由于它的任何一个元素都属于 A 本身,所以 $A \subseteq A$,即**任何一个集合是它本身的子集**.

当 A 不是 B 的子集(即至少有一个元素 $x \in A$,但 $x \notin B$)时,记作 $A \nsubseteq B$(或 $B \nsupseteq A$).

注 符号 $\in$ 与 $\subseteq$ 不同: $\in$ 用于表示元素与集合之间的关系, $\subseteq$ 用于表示集合与集合之间的关系.

定义 设 A、B 是两个集合.若 A 是 B 的子集,且至少有一个元素 $x \in B$ 但 $x \notin A$,则称 A 是 B 的**真子集**,记作 $A \subsetneqq B$(或 $B \supsetneqq A$),读作 A 真包含于 B(或 B 真包含 A).

当 A 是 B 的真子集时,可用图 1-2表示.

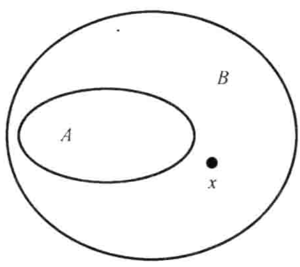

图 1-2

我们规定,**空集是任何集合的子集**. 显然,空集是任何非空集的真子集.

例 5　写出集合$\{a,b\}$的所有子集,并指出其中哪些是真子集.

解:$\{a,b\}$的所有子集为:$\varnothing$、$\{a\}$、$\{b\}$、$\{a,b\}$. 其中,$\varnothing$、$\{a\}$、$\{b\}$是$\{a,b\}$的真子集.

定义　设 A、B 是两个集合. 若 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$,则称这两个**集合相等**,记作 $A=B$,读作 A 等于B.

由集合相等的定义知,两个集合相等时,它们是由完全相同的元素组成的.

例如,设 $A=\{2,3\}$,$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$,则 $A=B$.

课堂练习 1.1

1. 用列举法表示下列各集合:

(1) 绝对值不超过 3 的整数组成的集合;

(2) 14 的正约数集;

(3) 小于 50 的自然数组成的集合;

(4) 不超过 100 的整数组成的集合;

(5) 方程 $x^2-7x+12=0$ 的解集;

(6) $\{x\in\mathbf{Z}\mid -10\leqslant x\leqslant 10\}$;

(7) $\{k\in\mathbf{Z}\mid x=2k+1\}$;

(8) $\{k\in\mathbf{Z}\mid x=2k\}$;

2. 设 $A=\{a,b,c\}$,$B=\{a,b,c,d,e,f\}$,用适当符号($\in$,$\notin$,$\subseteq$,$\not\subseteq$,$\subsetneqq$,$\supsetneqq$,$=$)填空:

(1) a ____ A;　　(2) b ____ $\{b\}$;

(3) d ____ A;　　(4) a ____ $\{b\}$;

(5) $\{b,c,a\}$ ____ A;　(6) 0 ____ A;

(7) $\{0\}$____ B;　　(8) $\varnothing$ ____ B;

(9) A ____ B;　　(10) 0 ____ $\{0\}$;

(11) 0 ____ $\varnothing$;　　(12) $\varnothing$ ____ A.

3. 回答下列问题:

(1) 所有胖人能不能构成一个集合? 为什么?

(2) 到一个定点的距离等于定长的点集是什么?

(3) 到一条线段两个端点的距离相等的点集是什么?

(4) 空集 $\varnothing$ 有多少个子集? 有没有真子集?

(5) 空集 $\varnothing$ 与单元素集$\{0\}$的区别是什么?

4. 设 $A=\{0,1,2,3\}$,试写出 A 的所有子集和真子集.

§1.2 集合的运算

一、交集

引例 已知 6 的正约数集 $A=\{1,2,3,6\}$,8 的正约数集 $B=\{1,2,4,8\}$,于是 6 与 8 的正公约数集是$\{1,2\}$.

容易看出,$\{1,2\}$是由 A、B 的所有公共元素组成的集合.

定义 设 A、B 是两个集合. 由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的**交集**(简称**交**),记作 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\},$$

读作 A 交 B.

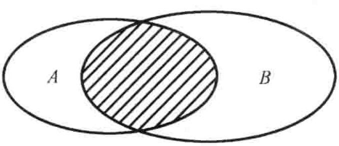

图 1-3

图 1-3 中的阴影部分表示 A 与 B 的交集 $A\cap B$.

若 $A\cap B\neq\varnothing$,则称 A 与 B **相交**;若 $A\cap B=\varnothing$,则称 A 与 B **不相交**.

由交的定义易得,对于任何集合 A 与 B,有 $A\cap A=A$,$A\cap\varnothing=\varnothing$,$A\cap B=B\cap A$.

例 1　设 $A=\{12$ 的正约数$\}$,$B=\{18$ 的正约数$\}$,用列举法写出 12 与 18 的正公约数集.

解:因为　$A=\{1,2,3,4,6,12\}$,

$B=\{1,2,3,6,9,18\}$,

由交的定义知,12 与 18 的正公约数集是

$A\cap B=\{1,2,3,4,6,12\}\cap\{1,2,3,6,9,18\}=\{1,2,3,6\}$.

例 2　设 $A=\{x\mid x\geqslant -3\}$,$B=\{x\mid x<2\}$,求 $A\cap B$.

解:$A\cap B=\{x\mid x\geqslant -3\}\cap\{x\mid x<2\}=\{x\mid -3\leqslant x<2\}$.

其几何意义如图 1-4 所示.

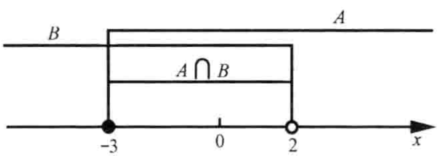

图 1-4

例 3　设 $A=\{(x,y)\mid y=-4x+6\}$,$B=\{(x,y)\mid y=5x-3\}$,求 $A\cap B$.

解:$A\cap B=\{(x,y)\mid y=-4x+6\}\cap\{(x,y)\mid y=5x-3\}=$

$$\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}y=-4x+6,\\ y=5x-3.\end{cases}\right\}=\{(1,2)\}.$$

这是一个单元素集,其几何意义如图 1-5 所示,是两条直线的交点.

二、并集

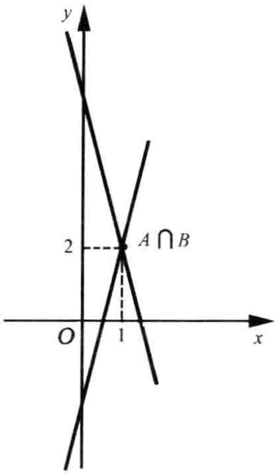

图 1-5

引例 已知方程 $x^2-1=0$ 的解集 $A=\{1,-1\}$，方程 $x^2-4=0$ 的解集 $B=\{2,-2\}$，于是方程 $(x^2-1)(x^2-4)=0$ 的解集是

$$\{1,-1,2,-2\}.$$

容易看出，该集合是由属于 A 或者属于 B 的所有元素组成的集合.

定义 设 A、B 是两个集合. 由属于 A 或者属于 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的**并集**（简称**并**），记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}，\text{读作 } A \text{ 并 } B.$$

图 1-6 中的阴影部分表示 A 与 B 的并集 $A\cup B$，其中包括 A 与 B 相交和不相交两种情形.

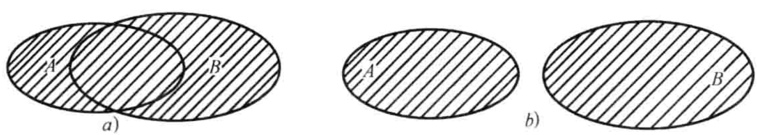

图 1-6

由并的定义易得，对于任何集合 A 与 B，有 $A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup B=B\cup A$.

例 4 设 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{1,2,3\}$，求 $A\cup B$.

解：$A\cup B=\{-2,-1,0,1,2\}\cup\{1,2,3\}=$

$\{-2,-1,0,1,2,3\}$.

注 因为集合中的元素必须是互异的，所以在两个集合的并集中，原来两个集合的公共元素只能出现一次. 因此，不要把例 4 中的 $A\cup B$ 写成 $\{-2,-1,0,1,1,2,2,3\}$.

例 5 设 $A=\{x\mid -2<x<3\}$，$B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 5\}$，求 $A\cup B$.

解： $A\cup B=\{x\mid -2<x<3\}\cup\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 5\}=$
$\{x\mid -2<x\leqslant 5\}$.

其几何意义如图 1－7 所示.

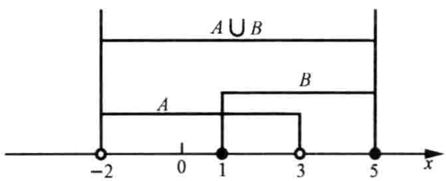

图 1－7

例 6 设 $A=\{x\mid x\leqslant -3\}$，$B=\{x\mid x>2\}$，求 $A\cup B$、$A\cap B$.

解： $A\cup B=\{x\mid x\leqslant -3\}\cup\{x\mid x>2\}=$
$\{x\mid x\leqslant -3$ 或 $x>2\}$.

其几何意义如图 1－8 所示；

$A\cap B=\{x\mid x\leqslant -3\}\cap\{x\mid x>2\}=\varnothing$.

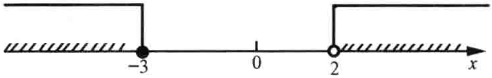

图 1－8

课堂练习 1.2

1. 设 $A=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$，

$B=\{4,3,2,1,0,-1,-2\}$,

$C=\{-4,-3,-2,-1,0,1,5\}$,

求 $A\cap B$、$A\cup B$、$A\cup C$、$B\cap C$.

2. 设 $A=\{x\mid x+2=2\}$,$B=\{x\mid x^2-2x=0\}$,求 $A\cap B$、$A\cup B$.

3. 设 $A=\{x\mid -2<x<4\}$,$B=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 3\}$,求 $A\cap B$、$A\cup B$.

4. 设 $A=\{(x,y)\mid 3x+y=3\}$,$B=\{(x,y)\mid 2x-y=1\}$,求 $A\cap B$、$A\cup B$.

5. 设 A 为奇数集,B 为偶数集,$\mathbf{Z}$ 为整数集,求 $A\cap\mathbf{Z}$、$A\cap B$、$B\cap\mathbf{Z}$、$A\cup B$、$A\cup\mathbf{Z}$、$B\cup\mathbf{Z}$.

6. 设 $A=\{$等腰三角形$\}$,$B=\{$直角三角形$\}$,求 $A\cap B$.

7. 设 $A=\{$锐角三角形$\}$,$B=\{$钝角三角形$\}$,求 $A\cup B$.

§1.3 简单的不等式与区间

一、绝对值不等式的解法

绝对值符号里面含有未知数的不等式,称为**绝对值不等式**.由实数的绝对值的定义

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0;\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

知,绝对值不等式的解法可以归结为下述两种基本类型:

设 $a\in\mathbf{R}$,$a>0$,则

(1) $|x|\leqslant a$ 的解为 $-a\leqslant x\leqslant a$;