



国防科技图书出版基金

弯曲厚矩形板的 互等定理及其应用

The Reciprocal Theorem of
Bending of Thick Rectangular Plates
and Its Applications

付宝连 著



国防工业出版社
National Defense Industry Press



国防科技图书出版基金

弯曲厚矩形板功的 互等定理及其应用

The Reciprocal Theorem of Bending of
Thick Rectangular Plates and Its Applications

付宝连 著

國防工業出版社

· 北京 ·

图书在版编目(CIP)数据

弯曲厚矩形板功的互等定理及其应用 / 付宝连著.
—北京:国防工业出版社,2014.12
ISBN 978-7-118-09807-5

I. ①弯... II. ①付... III. ①弯曲-厚板-矩形板-
互等原理 IV. ①TU33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 266564 号

※

国防工业出版社 出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)
北京嘉恒彩色印刷有限责任公司
新华书店经售

*

开本 710×1000 1/16 印张 19 字数 360 千字
2014 年 12 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—2000 册 定价 76.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777
发行传真:(010)88540755

发行邮购:(010)88540776
发行业务:(010)88540717

致 读 者

本书由国防科技图书出版基金资助出版。

国防科技图书出版工作是国防科技事业的一个重要方面。优秀的国防科技图书既是国防科技成果的一部分,又是国防科技水平的重要标志。为了促进国防科技和武器装备建设事业的发展,加强社会主义物质文明和精神文明建设,培养优秀科技人才,确保国防科技优秀图书的出版,原国防科工委于1988年初决定每年拨出专款,设立国防科技图书出版基金,成立评审委员会,扶持、审定出版国防科技优秀图书。

国防科技图书出版基金资助的对象是:

1. 在国防科学技术领域中,学术水平高,内容有创见,在学科上居领先地位的基础科学理论图书;在工程技术理论方面有突破的应用科学专著。
2. 学术思想新颖,内容具体、实用,对国防科技和武器装备发展具有较大推动作用的专著;密切结合国防现代化和武器装备现代化需要的高新技术内容的专著。
3. 有重要发展前景和有重大开拓使用价值,密切结合国防现代化和武器装备现代化需要的新工艺、新材料内容的专著。
4. 填补目前我国科技领域空白并具有军事应用前景的薄弱学科和边缘学科的科技图书。

国防科技图书出版基金评审委员会在总装备部的领导下开展工作,负责掌握出版基金的使用方向,评审受理的图书选题,决定资助的图书选题和资助金额,以及决定中断或取消资助等。经评审给予资助的图书,由总装备部国防工业出版社列选出版。

国防科技事业已经取得了举世瞩目的成就。国防科技图书承担着记载和弘扬这些成就,积累和传播科技知识的使命。在改革开放的新形势下,原国防科工委率先设立出版基金,扶持出版科技图书,这是一项具有深远意义的创举。此举势必促使国防科技图书的出版随着国防科技事业的发展更加兴旺。

设立出版基金是一件新生事物,是对出版工作的一项改革。因而,评审工作需

要不断地摸索、认真地总结和及时地改进,这样,才能使有限的基金发挥出巨大的效能。评审工作更需要国防科技和武器装备建设战线广大科技工作者、专家、教授,以及社会各界朋友的热情支持。

让我们携起手来,为祖国昌盛、科技腾飞、出版繁荣而共同奋斗!

国防科技图书出版基金
评审委员会

国防科技图书出版基金 第七届评审委员会组成人员

主任委员	潘银喜			
副主任委员	吴有生	傅兴男	杨崇新	
秘书长	杨崇新			
副秘书长	邢海鹰	谢晓阳		
委员	才鸿年	马伟明	王小谟	王群书
(按姓氏笔画排序)	甘茂治	甘晓华	卢秉恒	巩水利
	刘泽金	孙秀冬	芮筱亭	李言荣
	李德仁	李德毅	杨伟	肖志力
	吴宏鑫	张文栋	张信威	陆军
	陈良惠	房建成	赵万生	赵凤起
	郭云飞	唐志共	陶西平	韩祖南
	傅惠民	魏炳波		

前 言

克希霍夫直法线假设促进了薄壁结构力学及应用弹性理论的快速发展,并对现代科学技术的进步起到了推动作用。但是,这种理论只适用于厚跨比较小的均质材料。随着科学技术的进一步发展,某些防护工程和原子能工程需要厚壁结构;航空和航天工程为提高强度、减轻重量而采用夹层结构;舰艇甲板、坦克及军车的装甲也需要厚壁结构;飞机跑道和港口路面经常承受较大的动荷而需要厚板路面;房屋建筑也多有采用深梁或厚板结构的;矿山开采中也需要对岩石板层进行评估计算。凡此种种都涉及到弯曲厚板的强度和刚度计算。

作者涉足于弯曲厚矩形板的科研与教学工作始于 20 世纪 80 年代末,时至今日,未曾间断。本书便是这一时期科研与教学成果的总结。

第 1 章介绍了弯曲厚板的赖思纳理论及弯曲厚矩形板的边界条件,其中包括弯曲厚矩形板的角点静力条件。角点静力条件的导出,使得求解具有悬空角点的弯曲厚矩形板成为可能。同时还介绍了弯曲厚矩形板的拟基本系统、拟基本解及其相应的边界值。拟基本系统的建立对于求解弯曲厚矩形板的赖思纳方程具有决定性的意义。给出了在均载、静水压力和一集中载荷作用下四边简支弯曲厚矩形板的封闭解析解和有限元数值解。

第 2 章到第 4 章分别介绍了在上述三种载荷作用下,四边固定、三边固定和两边固定弯曲厚矩形板的封闭解析解和有限元的数值解。

第 5 章介绍了在上述三种载荷作用下具有角点简支边界条件弯曲厚矩形板的封闭解析解及有限元数值解。

本书定义具有悬空角点的弯曲厚矩形板为复杂边界条件的弯曲厚矩形板。第 6 章介绍了复杂边界条件(包括悬臂厚矩形板)弯曲厚矩形板的封闭解析解及有限元数值解。

上述 6 章所有问题都给出了两种解的相应力学量的数值比较和图像比较。

第 7 章介绍了弯曲厚矩形板的广义位移解,根据该广义位移解可以得到多种载荷及各种具体边界条件弯曲厚矩形板的封闭解析解。

第 8 章介绍了在均载及一集中载荷作用下四边简支及四边自由的弹性地基弯曲厚矩形板的封闭解析解。

本书所有问题的封闭解析解都是应用功的互等法得到的。

本书是关于弯曲厚矩形板理论的学术著作,其中包括大量的理论推导及数值计算,疏漏及错误之处在所难免,敬请各位专家及广大读者不吝指正。

目 录

第 0 章 绪论	1
第 1 章 弯曲厚板的基本理论及四边简支弯曲厚矩形板	4
1.1 弯曲厚板的赖思纳理论	4
1.2 弯曲厚矩形板的边界条件及角点静力条件	12
1.2.1 弯曲厚矩形板的边界条件	12
1.2.2 弯曲厚矩形板的角点静力条件	13
1.3 弯曲厚矩形板的拟基本解	17
1.4 均载作用下的简支弯曲厚矩形板	21
1.4.1 功的互等法	21
1.4.2 解析解的数值计算	27
1.4.3 有限元计算	29
1.5 静水压力作用下的简支弯曲厚矩形板	30
1.5.1 功的互等法	30
1.5.2 解析解的数值计算	34
1.5.3 有限元计算	36
1.6 一集中载荷作用下简支弯曲厚矩形板	36
1.6.1 功的互等法	36
1.6.2 解析解的数值计算	41
1.6.3 有限元计算	42
第 2 章 四边固定及四角点简支的弯曲厚矩形板	44
2.1 均载作用下四边固定的弯曲厚矩形板	44
2.1.1 功的互等法	44
2.1.2 解析解的数值计算	47
2.1.3 有限元计算	49
2.2 静水压力作用下四边固定的弯曲厚矩形板	50
2.2.1 功的互等法	50
2.2.2 解析解的数值计算	52

2.2.3	有限元计算	54
2.3	一集中载荷作用下四边固定的弯曲厚矩形板	55
2.3.1	功的互等法	55
2.3.2	解析解的数值计算	60
2.3.3	有限元计算	61
2.4	均载作用下四角点简支的弯曲厚矩形板	63
2.4.1	功的互等法	63
2.4.2	解析解的数值计算	68
第3章	三边固定的弯曲厚矩形板	72
3.1	均载作用下三边固定一边自由的弯曲厚矩形板	72
3.1.1	功的互等法	72
3.1.2	解析解的数值计算	77
3.2	静水压力作用下三边固定一边自由的弯曲厚矩形板	80
3.2.1	功的互等法	80
3.2.2	解析解的数值计算及有限元计算	83
3.3	一集中载荷作用下三边固定一边自由的弯曲厚矩形板	85
3.3.1	功的互等法	85
3.3.2	解析解的数值计算及有限元计算	89
第4章	两边固定的弯曲厚矩形板	91
4.1	均载作用下两对边固定另两对边自由的弯曲厚矩形板	91
4.1.1	功的互等法	91
4.1.2	解析解的数值计算	94
4.1.3	有限元计算	96
4.2	静水压力作用下两对边固定另两对边自由的弯曲厚矩形板	96
4.2.1	功的互等法	96
4.2.2	解析解的数值计算	100
4.2.3	有限元计算	103
4.3	一集中载荷作用下两对边固定另两对边自由的弯曲厚矩形板	104
4.3.1	功的互等法	104
4.3.2	解析解的数值计算	108
4.3.3	有限元计算	110
第5章	有角点简支的弯曲厚矩形板	112
5.1	均载作用下两邻边固定另两邻边自由且角点简支的弯曲厚	

矩形板	112
5.1.1 功的互等法	112
5.1.2 解析解的数值计算	118
5.1.3 有限元计算	121
5.2 静水压力作用下两邻边固定另两邻边自由且角点简支的弯曲厚矩形板	121
5.2.1 功的互等法	121
5.2.2 解析解的数值计算	123
5.2.3 有限元计算	126
5.3 一集中载荷作用下两邻边固定另两邻边自由且角点简支的弯曲厚矩形板	128
5.3.1 功的互等法	128
5.3.2 解析解的数值计算	130
5.3.3 有限元计算	133
5.4 均载作用下两邻边简支另两邻边自由且角点简支的弯曲厚矩形板	134
5.4.1 功的互等法	134
5.4.2 解析解的数值计算	139
5.4.3 有限元计算	141
5.5 静水压力作用下两邻边简支另两邻边自由且角点简支的弯曲厚矩形板	142
5.6 一集中载荷作用下两邻边简支另两邻边自由且角点简支的弯曲厚矩形板	145
第6章 复杂边界条件的弯曲厚矩形板	149
6.1 均载作用下两邻边简支另两邻边自由且角点悬空的弯曲厚矩形板	149
6.1.1 功的互等法	149
6.1.2 解析解的数值计算	155
6.1.3 有限元计算	156
6.2 静水压力作用下两邻边简支另两邻边自由且角点悬空的弯曲厚矩形板	157
6.2.1 功的互等法	157
6.2.2 解析解的数值计算	159
6.2.3 有限元计算	160
6.3 一集中载荷作用下两邻边简支另两邻边自由且角点悬空的弯曲厚矩形板	

矩形板	160
6.3.1 功的互等法	160
6.3.2 解析解的数值计算	163
6.3.3 有限元计算	164
6.4 均载作用下两邻边固定另两邻边自由且角点悬空的弯曲厚	
矩形板	165
6.4.1 功的互等法	165
6.4.2 解析解的数值计算及有限元计算	173
6.5 静水压力作用下两邻边固定另两邻边自由且角点悬空的弯曲厚	
矩形板	174
6.5.1 功的互等法	174
6.5.2 解析解的数值计算和有限元计算	177
6.6 一集中载荷作用下两邻边固定另两邻边自由且角点悬空的弯曲厚	
矩形板	178
6.6.1 功的互等法	178
6.6.2 解析解的数值计算	181
6.6.3 有限元计算	181
6.7 均载作用下悬臂弯曲厚矩形板	183
第7章 弯曲厚矩形板的广义位移理论	192
7.1 弯曲厚矩形板的广义位移解	192
7.1.1 广义支承边的弯曲厚矩形板	192
7.1.2 弯曲厚矩形板的广义位移解	193
7.1.3 弯曲厚矩形板的广义应力函数	196
7.1.4 广义位移解及广义应力函数是真实解的证明	200
7.2 弯曲厚矩形板的广义实用边界条件	201
7.2.1 广义实用切力边条件	201
7.2.2 广义实用转角边界条件	205
7.2.3 广义实用扭矩边界条件	210
7.2.4 广义实用角点静力条件	218
7.3 广义位移解的应用	224
7.3.1 广义位移解应用于较简单边界条件的弯曲厚矩形板	224
7.3.2 广义位移解应用于悬臂弯曲厚矩形板	225
第8章 弹性基弯曲厚矩形板	227
8.1 弹性基弯曲厚矩形板的拟基本解	227

8.2 均载作用下四边简支弹性基弯曲厚矩形板	233
8.3 一集中载荷作用下四边简支弹性基弯曲厚矩形板	239
8.4 均载作用下四边自由弹性基弯曲厚矩形板	248
8.5 一集中载荷作用下四边自由弹性基弯曲厚矩形板	264
附录	278
参考文献	282

Contents

Chapter 0	Foreword	1
Chapter 1	Fundamental theory of bending of thick plates and Bending of thick rectangular plates with four simply supported edges	4
1.1	Ressner's theory of bending of thick plates	4
1.2	Boundary conditions and static conditions at corner points of bending of thick rectangular plates	12
1.2.1	Boundary conditions of bending of thick rectangular plates	12
1.2.2	Static conditions at corner points of bending of thick rectangular plates	13
1.3	Imitatively fundamental solution of bending of thick rectangular plates	17
1.4	Bending of thick rectangular plate with four simply supported edges under uniformly distributed load	21
1.4.1	Reciprocal method of works	21
1.4.2	Numerical calculation of analytical solution	27
1.4.3	Calculation of finite element method	29
1.5	Bending of thick rectangular plate with four simply supported edges under hydropressure	30
1.5.1	Reciprocal method of works	30
1.5.2	Numerical calculation of analytical solution	34
1.5.3	Calculation of finite element method	36
1.6	Bending of thick rectangular plate with four simply supported edges under a concentrated load	36
1.6.1	Reciprocal method of works	36
1.6.2	Numerical calculation of analytical solution	41
1.6.3	Calculation of finite element method	42

Chapter 2	Bending of thick rectangular plates with four clamped edges and that with four corner points simply supported	44
2. 1	Bending of thick rectangular plate with four clamped edges under uniformly distributed load	44
2. 1. 1	Reciprocal method of works	44
2. 1. 2	Numerical calculation of analytical solution	47
2. 1. 3	Calculation of finite element method	49
2. 2	Bending of thick rectangular plate with four clamped edges under hydropressure	50
2. 2. 1	Reciprocal method of works	50
2. 2. 2	Numerical calculation of analytical solution	52
2. 2. 3	Calculation of finite element method	54
2. 3	Bending of thick rectangular plate with four clamped edges under a concentrated load	55
2. 3. 1	Reciprocal method of works	55
2. 3. 2	Numerical calculation of analytical solution	60
2. 3. 3	Calculation of finite element method	61
2. 4	Bending of thick rectangular plate with four corner points simply supported under uniformly distributed load	63
2. 4. 1	Reciprocal method of works	63
2. 4. 2	Numerical calculation of analytical solution	68
Chapter 3	Bending of thick rectangular plates with three clamped edges	72
3. 1	Bending of thick rectangular plate with three clamped edges and one free edge under uniformly distributed load	72
3. 1. 1	Reciprocal method of works	72
3. 1. 2	Numerical calculation of analytical solution	77
3. 2	Bending of thick rectangular plate with three clamped edges and one free edge under hydropressure	80
3. 2. 1	Reciprocal method of works	80
3. 2. 2	Numerical calculation of analytical solution and calculation of finite element method	83
3. 3	Bending of thick rectangular plate with three clamped edges and one free edge under a concentrated load	85

3. 3. 1	Reciprocal method of works	85
3. 3. 2	Numerical calculation of analytical solution and calculation of finite element method	89

Chapter 4 Bending of thick rectangular plates with two clamped edges 91

4. 1	Bending of thick rectangular plate with two opposite edges clamped and the other two opposite edges free under uniformly distributed load	91
4. 1. 1	Reciprocal method of works	91
4. 1. 2	Numerical calculation of analytical solution	94
4. 1. 3	Calculation of finite element method	96
4. 2	Bending of thick rectangular plate with two opposite edges clamped and the other two opposite edges free under hydropressure	96
4. 2. 1	Reciprocal method of works	96
4. 2. 2	Numerical calculation of analytical solution	100
4. 2. 3	Calculation of finite element method	103
4. 3	Bending of thick rectangular plate with two opposite edges clamped and the other two opposite edges free under a concentrated load ...	104
4. 3. 1	Reciprocal method of works	104
4. 3. 2	Numerical calculation of analytical solution	108
4. 3. 3	Calculation of finite element method	110

Chapter 5 Bending of thick rectangular plates with corner points simply supported 112

5. 1	Bending of thick rectangular plate with two adjacent edges clamped and the other two adjacent edges free, and the corner point simply supported under uniformly distributed load	112
5. 1. 1	Reciprocal method of works	112
5. 1. 2	Numerical calculation of analytical solution	118
5. 1. 3	Calculation of finite element method	121
5. 2	Bending of thick rectangular plate with two adjacent edges clamped and the other two adjacent edges free, and the corner point simply supported under hydropressure	121
5. 2. 1	Reciprocal method of works	121
5. 2. 2	Numerical calculation of analytical solution	123

5.2.3	Calculation of finite element method	126
5.3	Bending of thick rectangular plate with two adjacent edges clamped and the other two adjacent edges free, and the corner point simply supported under a concentrated load	128
5.3.1	Reciprocal method of works	128
5.3.2	Numerical calculation of analytical solution	130
5.3.3	Calculation of finite element method	133
5.4	Bending of thick rectangular plate with two adjacent edges simply supported, the other two adjacent edges free, and corner point simply supported under uniformly distributed load	134
5.4.1	Reciprocal method of works	134
5.4.2	Numerical calculation of analytical solution	139
5.4.3	Calculation of finite element method	141
5.5	Bending of thick rectangular plate with two adjacent edges simply supported, the other two adjacent edges free, and corner point simply supported under hydropressure	142
5.6	Bending of thick rectangular plate with two adjacent edges simply supported, the other two adjacent edges free, and corner point simply supported under a concentrated load	145

Chapter 6 Bending of thick rectangular plates with complicated edge conditions 149

6.1	Bending of thick rectangular plate with two adjacent edges simply supported, the other two adjacent edges free, and corner point hang in the air under uniformly distributed load	149
6.1.1	Reciprocal method of works	149
6.1.2	Numerical calculation of analytical solution	155
6.1.3	Calculation of finite element method	156
6.2	Bending of thick rectangular plate with two adjacent edges simply supported, the other two adjacent edges free, and corner point hang in the air under hydropressure	157
6.2.1	Reciprocal method of works	157
6.2.2	Numerical calculation of analytical solution	159
6.2.3	Calculation of finite element method	160
6.3	Bending of thick rectangular plate with two adjacent edges simply supported, the other two adjacent edges free, and corner point	

hang in the air under a concentrated load	160
6.3.1 Reciprocal method of works	160
6.3.2 Numerical calculation of analytical solution	163
6.3.3 Calculation of finite element method	164
6.4 Bending of thick rectangular plate with two adjacent edges clamped, the other two adjacent edges free , and corner point hang in the air under uniformly distributed load	165
6.4.1 Reciprocal method of works	165
6.4.2 Numerical calculation of analytical solution and calculation of finite element method	173
6.5 Bending of thick rectangular plate with two adjacent edges clamped, the other two adjacent edges free , and corner point hang in the air under hydropressure	174
6.5.1 Reciprocal method of works	174
6.5.2 Numerical calculation of analytical solution and calculation of finite element method	177
6.6 Bending of thick rectangular plate with two adjacent edges clamped, the other two adjacent edges free , and corner point hang in the air under a concentrated load	178
6.6.1 Reciprocal method of works	178
6.6.2 Numerical calculation of analytical solution	181
6.6.3 Calculation of finite element method	181
6.7 Bending of cantilever thick rectangular plate under uniformly distributed load	183

Chapter 7 Generalized displacement theory of bending of thick rectangular plates 192

7.1 Generalized displacement solution of bending of thick rectangular plates	192
7.1.1 Bending of thick rectangular plate with generalized support edges	192
7.1.2 Generalized displacement solution of bending of thick rectangular plate	193
7.1.3 Generalized stress function of bending of thick rectangular plate	196
7.1.4 Proof of the generalized displacement solution and the	