SHU XUE

数学

中　册

ZHONG GUO SHANG
YE CHU BAN SHE

中國商业出版社

数学

（中册）

主　编　邓春光　王勋昌

副主编　吴昌高

中国商业出版社

数　　学（中册）

邓春光　王勋昌　主 编

•

中国商业出版社出版
中国商业出版社中南书社发行
湖南省长沙市华中印刷厂印刷

•

787×1092毫米　1/32　6.875印张　154千字
1989年1月第1版　1989年5月湖南第一次印刷
印　数：1—10000册　　定　价：7.40元（全套价）

ISBN 7—5044—0193—5/F·120

目 录

第一章　极限与连续

§1.1数列的极限

（一）数列

定义1.1以自然数集合为定义域的函数，将函数值按自变量增大顺序排列起来的一列数，叫做数列，表为

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_n,\ \cdots \tag{1}$$

（1）中的每一个数y_n叫做数列的项。y_n表示当自变量是自然数n时所对应的函数值，可写为

$y_n=f(n)$（$n=1,2,3,\cdots$），第n项y_n也叫做数列的**通项**。

数列（1）可以简单地表为$\{y_n\}$。

例如：

（1）$y_n=\frac{1}{n}$：$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$，即$\{\frac{1}{n}\}$，

（2）$y_n=\frac{n}{n+1}$：$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1}$，$\cdots$；即$\{\frac{n}{n+1}\}$

（3）$y_n=\frac{(-1)^n}{n}$：$-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\cdots$，$\frac{(-1)^n}{n},\cdots$；即$\{\frac{(-1)^n}{n}\}$；

（4）$y_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$：$1,0,1,0,\cdots$，

$$y_n=\begin{cases}1, & 当n为奇数,\\ 0, & 当n为偶数,\end{cases} 即 \left\{\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\right\};$$

(5) $y_n=n!$：$1!$，$2!$，…，$n!$，…即$\{n!\}$。

由这些例子可以看出：随着n逐渐增大时，它们有着各自变化的趋势。下面，我们先对几个具体数列的变化趋势做些分析，并由此引出数列极限的概念和定义。

（二）数列的极限

观察下面几个数列：

(1) $y_n=1+\frac{1}{n}$：$2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\cdots$

(2) $y_n=1-\frac{1}{n}$：$0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\cdots$

(3) $y_n=1+(-1)^n\frac{1}{n}$：$0,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{4},\cdots$

显然，这三个数列当n无限增大（$n\to\infty$）时，y_n都无限地接近于1，即"当n无限增大时，y_n与1的差无限地接近于0"。事实上就是$|y_n-1|$可以任意小，这就是说：不论事先指定一个多么小的正数，在n无限增大的变化过程中，总有那么一个时刻，在那个时刻之后，$|y_n-1|$小于事先指定的小正数。

下面以数列（1）为例，来说明"当n无限增大时，$|y_n-1|$可以任意小。"

$$|y_n-1|=\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right|=\left|\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}$$

如果指定一个小正数，例如$\frac{1}{10}$，要使$|y_n-1|<\frac{1}{10}$，

即$\frac{1}{n}<\frac{1}{10}$，则只要取$n>10$就可以了；也就是说，从数列

的第11项开始，以后各项都满足$|y_n-1|<\frac{1}{10}$。

如果指定一个更小的正数，例如$\frac{1}{100}$，要使$|y_n-1|<\frac{1}{100}$，即$\frac{1}{n}<\frac{1}{100}$，则只要取$n>100$就可以了；也就是说，从数列的第101项开始，以后各项都满足$|y_n-1|<\frac{1}{100}$。

由此可见，对于数列（1），不论事先指定一个多么小的正数ε，在n无限增大的变化过程中，总有那么一个时刻，在那个时刻之后，总有$|y_n-1|<\varepsilon$成立。此时，我们说数列（1）以1为极限。

定义1.2　设A是一确定的数，如果对于任意给定的正数ε（不论多么小），总存在一个正整数N，当$n>N$时，

$$|y_n-A|<\varepsilon$$

恒成立，则称当n趋于无穷大时，数列y_n以常数A为极限。记作

$$\lim_{n\to\infty}y_n=A\text{或}y_n\to A\quad(n\to\infty)$$

如果一个数列有极限，我们称此数列是收敛的，否则就称它是发散的。y_n以A为极限，亦称y_n收敛于A。

例如，当$n\to\infty$时，$y_n=\frac{1}{n}$收敛于0；$y_n=1+\frac{1}{n}$收敛于1。

但不是所有数列都有极限。例如，当$n\to\infty$时，$y_n=2n$无极限，所以是发散的。$y_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$时而取0，时而取1，我们说它振荡无极限，因此也是发散的。

注意：1^0定义中的ε可以任意小，这很重要，因为只有

任意小，不等式$|y_n-A|<\varepsilon$才能表达出y_n与A无限接近的意思。

2^0定义中的正整数N是与预先指定的正数ε有关，当ε减小时，一般地说，N将会相应地增大。

3^0常数C的极限是它本身。事实上，$|y_n-C|=|C-C|=0<\varepsilon$，不论$\varepsilon>0$怎样小，也不论N如何，上面的不等式恒成立。

例1　证明数列$y_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$的极限是零（即$A=0$）

证：对于任意给定的$\varepsilon>0$，要使

$$|y_n-0|=\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

只要取$n>\frac{1}{\varepsilon}$就可以了。因此，对于任意给定的$\varepsilon>0$，取正整数$N\geq\frac{1}{\varepsilon}$，则当$n>N$时，$|y_n-0|<\varepsilon$恒成立。所以$y_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$以0为极限，即

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=0$$

例2　证明数列$y_n=\frac{n}{n+1}$的极限是1（即$A=1$）

证：对于任意给定的$\varepsilon>0$要使$|y_n-1|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\left|\frac{-1}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon$

只要取$n+1>\frac{1}{\varepsilon}$，即$n>\frac{1}{\varepsilon}-1$就可以了。故可取正整数$N\geq\frac{1}{\varepsilon}-1$，当$n>N$时，$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$恒成立。所以

$y_n=\frac{n}{n+1}$ 以1为极限，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

数列极限的几何意义：

因为$|y_n-A|<\varepsilon$与不等式$A-\varepsilon<y_n<A+\varepsilon$等价。所以数列$y_n$有极限A，也就是说，不论给定$\varepsilon>0$怎样小，总存在一个正整数N，使数列$y_n$从$N+1$项起，以后的一切项$y_{N+1}$，$y_{N+2}$，…都落在点A（y轴上）ε邻域（$A-\varepsilon$，$A+\varepsilon$）以内。如图1—1。因此，如果$y_n$收敛于A，则不论$\varepsilon>0$多么小，即不论区间（$A-\varepsilon$，$A+\varepsilon$）多么小，（$A-\varepsilon$，$A+\varepsilon$）内总包含$y_n$的无穷多项，即$(A-\varepsilon$，$A+\varepsilon)$之外最多含有$y_n$的有项个项。

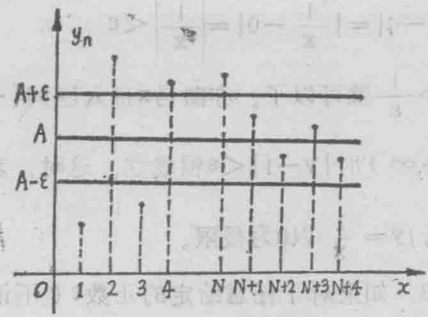

图1—1

§1.2函数的极限

数列是定义于正整数集合上的函数，它的极限只是一种

特殊函数（即整标函数）的极限。现在，我们讨论定义于实数集合上的函数$y=f(x)$的极限。

（一）当$x\to\infty$时，函数$f(x)$的极限。

例如：函数$y=\frac{1}{x}$（$x\neq0$），当$|x|$无限增大时，y无限接近于0，如图1—2。和数列极限一样，“当$|x|$无限增大时，y无限接近于0”，是指“当$|x|$无限增大时，$|y-0|$可以任意地小”。

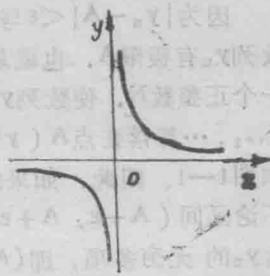

图1—2

即对于任意给定的$\varepsilon>0$，要使

$$|y-0|=\left|\frac{1}{x}-0\right|=\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$$

只要取$|x|>\frac{1}{\varepsilon}$就可以了。亦即当x进入区间$(-\infty,-\frac{1}{\varepsilon})$或$(\frac{1}{\varepsilon},+\infty)$时$|y-1|<\varepsilon$恒成立。这时，我们就称x趋于无穷大时，$y=\frac{1}{x}$以0为极限。

定义1.3 如果对于任意给定的正数ε（不论多么小），总存在一个正数M，使得当一切$|x|>M$时，

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

恒成立，则称当$x\to\infty$时，函数$f(x)$以常数A为极限。记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\text{或}f(x)\to A(x\to\infty)$$

注意：1^0 定义中ε刻划$f(x)$与A的接近程度，M刻划$|x|$

充分大的程度，ε是任意给定的正数．M是随ε而确定的。

2° 有时我们还需要区分x趋于无穷大的符号，如果x从某一时刻起，往后总是取正值且无限增大，则称x趋于正无穷大，记作$x\to+\infty$，此时定义中$|x|>M$可改写为$x>M$；如果x从某一时刻起，往后总取负值且$|x|$无限增大，则称x趋于负无穷大，记作$x\to-\infty$，此时定义中的$|x|>M$．可改写成为$x<-M$。

例：用定义证明

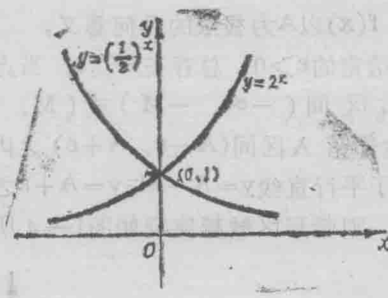

图1—3

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$

下面证明（1）（(2)留作练习）

证：设$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，对于任意给定的$\varepsilon>0$，要使

$$|f(x)-0|=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x-0\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^x<\varepsilon$$

只要$2^x>\frac{1}{\varepsilon}$，即$x>\frac{\lg\frac{1}{\varepsilon}}{\lg 2}$（设$\varepsilon<1$）就可以了。因此，对于任意给的$\varepsilon>0$，取$M=\frac{\lg\frac{1}{\varepsilon}}{\lg 2}$，则当$x>M$时，

$|f(x)-0|=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x-0\right|<\varepsilon$恒成立。所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$$

$x\to\infty$时，$f(x)$以A为极限的几何意义：

对于任意给定的$\varepsilon>0$，总存在$M>0$，当点$(x, f(x))$的横坐标x进入区间$(-\infty, -M)$或$(M, +\infty)$时，纵坐标$y=f(x)$全部落入区间$(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$之内。此时，$y=f(x)$的图象介于平行直线$y=A-\varepsilon$与$y=A+\varepsilon$之间的带形区域之内。$\varepsilon$越小，则带形区域越狭窄如图1—4所示。

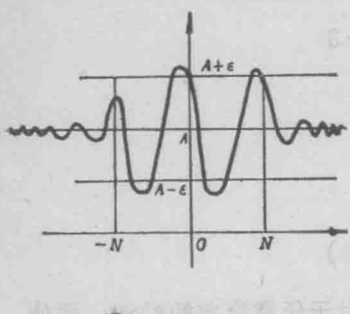

图1—4

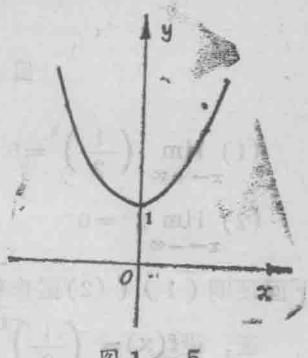

图1—5

（二）当$x\to x_0$时 函数$f(x)$的极限

对于函数$y=f(x)$除研究$x\to\infty$时$f(x)$的极限以外，还需

要研究x趋于某个常数x_0时$f(x)$的变化趋势。

首先考虑函数$f(x)=1+x^2$当自变量$x\to 0$时的变化状态。

从函数$y=1+x^2$的图形（图1—5）可明显看到，不论自变量x沿横轴自任何一方趋向0时，函数$f(x)$的对应值都渐渐趋近于1。也就是说当x充分接近0时，$|f(x)-1|$可以任意小。因此，对于任意给定的$\varepsilon>0$，要使$|f(x)-1|=|(1+x^2)-1|=|x^2|<\varepsilon$，只要取$|x|<\sqrt{\varepsilon}$就可以了。这就是说，当x进入邻域$(-\sqrt{\varepsilon},\sqrt{\varepsilon})$时，

$$|f(x)-1|<\varepsilon$$

恒成立。这时我们称当$x\to 0$时，$y=f(x)=1+x^2$以1为极限。

定义1.4 设函数$f(x)$在点x_0的某一个邻域内有定义（但在x_0可以没有定义），A为一确定的数。如果对于任意给定的正数ε（不论多么小），当x无限趋近x_0时（但始终不等于x_0），所对应的函数值$f(x)$都满足

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则常数A就叫做函数$y=f(x)$当$x\to x_0$时的极限。记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{或} f(x)\to A\ (\text{当}x\to x_0\text{时})$$

注意：1^0 根据定义显然有：

$$\lim_{x\to x_0} x=x_0$$

$$\lim_{x\to x_0} C=C$$

2^0 因为$x\neq x_0$，所以当$x\to x_0$时，函数$f(x)$有没有极限与$f(x)$在点x_0处是否有定义并无关系。

例如 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$

这里函数在$x=1$处没有定义，但

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|=|x+1-2|$$

$$=|x-1|,$$

显然，当$x\to1$时$|x-1|$可以任意小，即对于给定的任意小的$\varepsilon>0$，$|x-1|<\varepsilon$，即

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$$

恒成立。这就说明了$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

3^0 左、右极限概念：当x从左侧趋近x_0时（$x<x_0$），如果函数$f(x)$的极限存在，这极限就叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的左极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^{-0}} f(x) \quad 或 \quad f(x_0-0)$$

当x从右侧趋近于x_0时（$x>x_0$），如果函数$f(x)$的极限存在，这极限就叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的右极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^{+0}} f(x) \quad 或 \quad f(x_0+0)$$

根据左、右极限的定义，容易证明：函数$f(x)$，当$x\to x_0$时极限存在的必要且充分条件是左极限及右极限各自存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0^{-0}} f(x)=\lim_{x\to x_0^{+0}} f(x)$$

因此，即使函数$f(x)$的左极限和右极限都存在，但不相等，则函数$f(x)$的极限不存在。

如：函数

$$f(x)=\begin{cases}|x| & 当x\neq0时\\ 1 & 当x=0时\end{cases}$$

在原点左右极限存在，且相等，即

$$\lim_{x\to -0} f(x)=\lim_{x\to +0} f(x)$$

$$=0$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

但 $f(0)=1$。

如图1—6

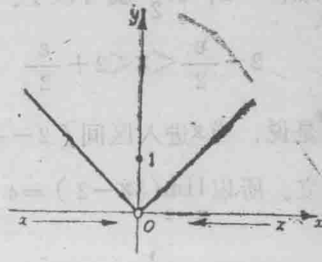

图1—6

再如：函数

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & 当x<0, \\ x-1, & 当x>0, \\ 0, & 当x=0, \end{cases}$$

当$x\to 0$时极限不存在。

因为函数的左极限是

$$\lim_{x\to -0} f(x)=\lim_{x\to -0}(x+1)=1$$

而函数的右极限是

$$\lim_{x\to +0} f(x)=\lim_{x\to +0}(x-1)$$

$$=-1$$

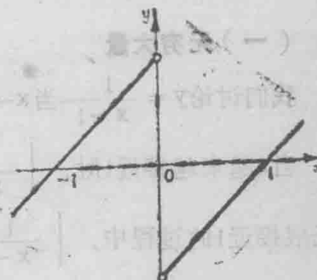

图1—7

函数的左右极限存在但不相等，所以函数极限$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在。如图1—7。

例：利用定义证明

$$\lim_{x\to 2}(3x-2)=4$$

证：对于任意给定的$\varepsilon>0$，要使

$$|f(x)-4|=|(3x-2)-4|=$$

$$|3x-6|=3|x-2|<\varepsilon$$

只要取$|x-2|<\frac{\varepsilon}{2}$就可以了。即

$$2-\frac{\varepsilon}{2}<x<2+\frac{\varepsilon}{2}$$

这就是说，当x进入区间$(2-\frac{\varepsilon}{2},2+\frac{\varepsilon}{2})$时，$|f(x)-4|<\varepsilon$恒成立。所以$\lim\limits_{x\to 2}(3x-2)=4$

§1.3 无穷大量与无穷小量

（一）无穷大量

我们讨论$y=\frac{1}{x-1}$当$x\to 1$时的变化趋势。

当x越来越接近1时，$\left|\frac{1}{x-1}\right|$就越来越大。因此，当x无限接近1的过程中，$\left|\frac{1}{x-1}\right|$就可以任意大。“任意大”就是不论事先指定一个多么大的正数，总有那么一个时刻，在那个时刻以后，变量的绝对值可以大于那个事先指定的大正数。

显然，对任给的大正数E（无论多么大），要使$\left|\frac{1}{x-1}\right|>E$，只要$|x-1|<\frac{1}{E}$就可以了。此时，我们称当$x\to 1$时，$y=\frac{1}{x-1}$是一个无穷大量。

定义1.5 如果对于任意给定的正数E（无论多么大），变量y在其变化过程中，总有那么一个时刻，在那个时刻以