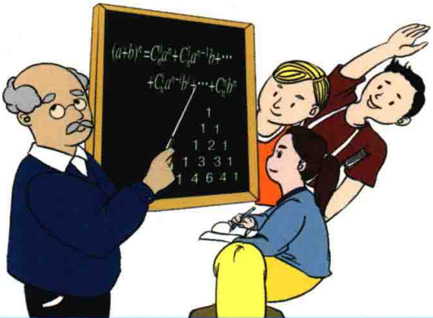
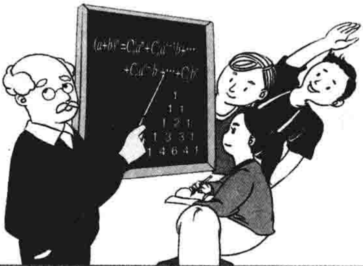


数林外传系列
跟大学名师学中学数学

国际数学奥林匹克精选240真题巧解

◎ 张运筹　编著

中国科学技术大学出版社



数林外传系列

跟大学名师学中学数学

国际数学奥林匹克精选240真题巧解

张运筹　编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书精选前53届(截至2012年)国际数学奥林匹克竞赛240道作者感兴趣的题目,尽可能简明说法,改进解法,提出新法,力图使读者尽快"入味".

本书适合广大数学爱好者和中学数学教师,特别是中学数学竞赛培训教师及其培训对象参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

国际数学奥林匹克精选240真题巧解/张运筹编著.—合肥:中国科学技术大学出版社,2014.9
(数林外传系列:跟大学名师学中学数学)
ISBN 978-7-312-03416-9

Ⅰ.国… Ⅱ.张… Ⅲ.中学数学课—题解 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第090974号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路96号,230026
http://press.ustc.edu.cn
印刷 合肥市宏基印刷有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 880 mm×1230 mm 1/32
印张 4.875
字数 105千
版次 2014年9月第1版
印次 2014年9月第1次印刷
定价 15.00元

前　言

$IMO_1 \sim IMO_{53}$中，除IMO_2和IMO_7各有7题外，各届都是6题，规定用两天中的9小时做完，每天9点做到13点半，中间不休息.

$IMO_1 \sim IMO_{53}$共320题.因$IMO_{21} \sim IMO_{53}$无立体几何题，本书将19个立体几何题全部删去了.此外，还删去了那些图形太复杂，学生看起来太费时费力的题目；删去了那些解答太冗长，甚至使用一些引理或中学生不易求证的定理（如Fermat小定理）求证的题目；删去了那些数学味不浓，读起来很绕口，中学生很难入味的题目.本书是选编，不是选录，因此，尽可能简明说法，改进解法，提出新法，并尽可能压缩篇幅，做到每题不超过500字.

本书力图使学生尽快入味，并尽可能减轻学生在时间、费用、精力上的压力.

综上所述，酌定在$IMO_1 \sim IMO_{53}$的320题中删去80题，保留240题.

本书不特别声明之处，各字符的含义如下：

在$\triangle ABC$中，A,B,C表示顶角；a,b,c表示相应边；m_a，m_b，m_c是相应中线；h_a，h_b，h_c是相应高；t_a，t_b，t_c是相应角平分线；r_a，r_b，r_c是相应傍切圆半径长；R，r分别是外半径、内半径，s

是半周长;O,I,G,H 分别是外心、内心、重心、垂心;I_a,I_b,I_c 是相应傍心. $\odot(O,R)$表示以 O 为圆心,R 为半径的圆或圆周;$|S|$表示集合 S 的元数;i-j 表示 IMO 中第 i 届第 j 题;$[x]$表示不超过 x 的最大整数,且$\{x\}=x-[x]$;$\mathbf{N},\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R}$ 分别表示自然数、整数、有理数、实数的集合;$\triangle$表示三角形或其面积;$\square$表示平行四边形或其面积;(a_{ij})表示第 i 行第 j 列为 a_{ij} 的矩阵;max 表示最大,min 表示最小;$\angle(a,b)$表示 a,b 夹角;$|a,b|$表示 a,b 距离;$\{x\mid p\}$表示具有性质 p 的 x 的集合;(a,b)表示 a,b 的最大公约数或点或开区间;$[a,b]$表示最小公倍数或闭区间;$b\mid a$ 表示 b 可整除 a,$b\nmid a$ 表示 b 不可整除 a.

张运筹

目　　录

1　算术与代数

【1-1】 求证:若 $n\in\mathbf{N}$,则$(21n+4,14n+3)=d=1$.

证　$\because 21n+4=14n+3+7n+1$,

$\therefore d$ 整除 $7n+1$.

$\because 14n+3=(7n+1)\times 2+1$,

$\therefore d$ 整除 1,$d=1$.

【1-2】 解$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$.

解　$\sqrt{2x-1}+1+\left|\sqrt{2x-1}-1\right|=2$.

当$\sqrt{2x-1}\leqslant 1$,即 $0.5\leqslant x\leqslant 1$ 时,$2=2$,恒成立;

当$\sqrt{2x-1}>1$,即 $x>1$ 时,$\sqrt{4x-2}=\sqrt{2}$,$x=1$,无解.

$\therefore 0.5\leqslant x\leqslant 1$.

【2-1】 求三位数 xyz,使

$$100x+10y+z=11(x^2+y^2+z^2).$$

解　$x-y+z=11(x^2+y^2+z^2-9x-y)=0$ 或 11.

$$2x^2+2xz+2z^2=10x+z$$

或

$$2x^2+2xz+2z^2=32x+23z-131.$$

令 $z=$偶数或 $z=$奇数,得$(x,y,z)=(5,5,0)$或$(8,0,3)$.

【2-2】 解 $\dfrac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2}<2x+9$.

解 当 $x\neq0,x\geqslant-0.5$ 时,由分母有理化知

$$(1+\sqrt{1+2x})^2<2x+9,$$

$\therefore \sqrt{1+2x}<3.5.$

$\therefore x<5.625.$

$\therefore$ 解集是 $(-0.5,0)\cup(0,5.625)$.

【3-1】 解

$$\begin{cases} x+y+z=a, & ① \\ x^2+y^2+z^2=b^2, & ② \\ xy=z^2, & ③ \end{cases}$$

其中 a,b 为已知数,何时 x,y,z 为两两不同正数?

解 ①^2－②得 $az=xy+(x+y)z=0.5(a^2-b^2)$.

$\because a>0,$

$\therefore 2az=a^2-b^2, 2a(x+y)=a^2+b^2.$

$\therefore x,y$ 是 $f(u)=u^2-0.5a^{-1}(a^2+b^2)u+0.25a^{-2}(a^2-b^2)^2$ 的不同正根,

$\therefore$ 判别式 >0.

$\therefore 0<|b|<a<\sqrt{3}|b|.$

此时

$$f(z)=0.25a^{-2}(a^2-b^2)(a^2-3b^2)\neq0,$$

$\therefore x,y,z$ 为两两不同正数.

【4-1】 求最小的 m 位数 $n=a_ma_{m-1}\cdots a_26$,使 $6a_ma_{m-1}\cdots a_2=4n$.

解 $\because 40n=6a_ma_{m-1}\cdots a_20$

$=6\times10^m+a_ma_{m-1}\cdots a_2 6-6$

$=6\times(10^m-1)+n,$

$\therefore 39n=6(10^m-1),\quad 13n=2(10^m-1).$

依次试算 $m=1,2,\cdots,6,7$，发现 $m=7$ 第一个符合要求，

$\therefore n=153846$. 可用小学直式乘法倒推出来：

$$\begin{array}{rcccccc} & a_m & a_{m-1} & \cdots & \cdots & a_2 & 6 \\ \times & & & & & & 4 \\ & {}_2 & {}_1 & {}_3 & {}_1 & {}_2 & \\ \hline & 6 & 1 & 5 & 3 & 8 & 4 \end{array}$$

【4-2】 解 $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>0.5$.

解　令 $x-1=t$，有 $\sqrt{2-t}-\sqrt{2+t}>0.5\ (-2\leqslant t<2)$. 平方得

$$\sqrt{4-t^2}<1.875,$$

再平方得

$$t^2>0.484375,$$

$\therefore -2\leqslant t<-0.125\sqrt{31}$.

$\therefore -1\leqslant x<1-0.125\sqrt{31}$.

【5-1】 求实数 x，使 $2\sqrt{x^2-1}=x-\sqrt{x^2-p}$.

解　平方得

$$2x^2+p-4=-2x\sqrt{x^2-p},$$

再平方得

$$8(2-p)x^2=(p-4)^2,$$

$\therefore p<2$.

$\because x \geqslant 0$,

$\therefore x = \dfrac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}$.

代入原式,整理得

$$|3p-4| + 2|p| = 4-p.$$

当 $p \leqslant 0$ 时,有 $4-3p+2p=4-p$,$\therefore p=0$;

当 $0 < p < \dfrac{4}{3}$ 时,有 $4-3p+2p=4-p$,即 $0=0$,恒真;

当 $\dfrac{4}{3} \leqslant p < 2$ 时,有 $3p-4+2p=4-p$,即 $p=\dfrac{4}{3}$;

$\therefore 0 \leqslant p \leqslant \dfrac{4}{3}$,$x=\dfrac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}$(合题意).

【5-4】 已知 a,解

$$\begin{cases} x_5 + x_2 = ax_1, & ① \\ x_1 + x_3 = ax_2, & ② \\ x_2 + x_4 = ax_3, & ③ \\ x_3 + x_5 = ax_4, & ④ \\ x_4 + x_1 = ax_5. & ⑤ \end{cases}$$

解 把①代入④⑤消 x_5,得

$$\begin{cases} ax_1 - x_2 + x_3 - ax_4 = 0, & ⑥ \\ (a^2-1)x_1 - ax_2 - x_4 = 0. & ⑦ \end{cases}$$

把③代入⑥,⑦消 x_4,得

$$\begin{cases} ax_1 + (a-1)x_2 + (1-a^2)x_3 = 0, & ⑧ \\ (a^2-1)x_1 + (1-a)x_2 - ax_3 = 0. & ⑨ \end{cases}$$

把②代入⑧⑨消 x_3,得

$$\begin{cases}(a^2+a-1)[x_1-(a-1)x_2]=0,\\(a^2+a-1)(x_1-x_2)=0.\end{cases}$$

当$(a^2+a-1)\neq 0$时，$a\neq 2$，$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(0,0,0,0,0)$；

当$a^2+a-1\neq 0$时，$a=2$，$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(x,x,x,x,x)$ $(x\in\mathbf{R})$；

当$a^2+a-1=0$时，$a=0.5(-1\pm\sqrt{5})$，$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(x,y,ay-x,(a^2-1)y-ax,ax-y)$ $(x,y\in\mathbf{R})$.

【5-6】 已知$\{a,b,c,d,e\}=\{1,2,3,4,5\}$.

(1) 若猜 $abcde=12345$，则未猜中一元和一紧邻顺序.

(2) 若猜 $daecb=12345$，则恰猜中两元和两紧邻顺序.

求 a,b,c,d,e（xy 为紧邻顺序$\Leftrightarrow y=x+1$）.

解 恰猜中两元有以下 10 种情形：$daecb=$（先定 x'）

① $12ec'b=12453$ 已中两紧邻；

② $1a3cb'=15324$ 未中两紧邻；

③ $1ae4b'=15243$ 未中两紧邻；

④ $1aec'5=13425$ 未中两紧邻；

⑤ $d'23cb=52314$ 未中两紧邻；

⑥ $d2e'4b=52143$ 未中两紧邻；

⑦ $d2ec'5=32415$ 未中两紧邻；

⑧ $da'34b=25341$ 未中两紧邻；

⑨ $da'3c5=24315$ 未中两紧邻；

⑩ $da'e45=23145$ [合(1)(2)].

【6-1】 $m,n\in\mathbf{N}$，解(1) $2^n-1=7m$；(2) $2^n+1=7m$.

解　$\because 2^{3k}-1=8^k-1$

$$=(8-1)(8^{k-1}+8^{k-2}+\cdots+1)=7t,$$

$$2^{3k+1}-1=14t+1,$$

$$2^{3k+2}-1=28t+3,$$

$$2^{3k}+1=7t+2,$$

$$2^{3k+1}+1=14t+3,$$

$$2^{3k+2}+1=28t+5.$$

$\therefore$(1)$(m,n)=(8^{k-1}+8^{k-2}+\cdots+1,3k)$,(2)无解.

【6-4】　$A_1,A_2,\cdots,A_{17}$ 17 点中,每两点有唯一一条连线,每一条连线被染成红或蓝或白色,每 3 点不共线.求证有同色三角形(即 3 边同色).

证　线段 $A_iA_{17}(i=1,2,\cdots,16)$中有 6 条同色,不妨设 $A_1A_{17},A_2A_{17},\cdots,A_6A_{17}$同为红色.若 $A_iA_6(i=1,2,\cdots,5)$中有红色,则已有红色三角形.若其中只有蓝、白两色,则其中有 3 条同色,不妨设 A_1A_6,A_2A_6,A_3A_6 同为蓝色.若 A_1A_3,A_2A_3,A_1A_2 中有蓝色,则已有蓝色三角形.若其中无蓝色,则已有白色三角形.证毕.

【7-2】　已知$\sum\limits_{j=1}^{3}a_{ij}x_j=0,\sum\limits_{j=1}^{3}a_{ij}>0(i=1,2,3)$.当 $i\neq j$ 时,有 $a_{ij}<0$.求证:$(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0)$.

证　不妨设 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3$.

当 $x_3<0$ 时,有

$$\begin{aligned}0&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\&\leqslant a_{11}x_1+a_{12}x_1+a_{13}x_1<0;\end{aligned}$$

当 $x_1>0$ 时,有

$$0=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3$$
$$\geqslant a_{31}x_3+a_{32}x_3+a_{33}x_3>0.$$

$\therefore 0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant 0.$

$\therefore x_1=x_2=x_3=0.$

【7-4】 求4个实数(x_1,x_2,x_3,x_4),使其中任一数与其余3个数之积的和等于2.

解 $\because x_i+x_1x_2x_3x_4\div x_i=2\ (i=1,2,3,4)$,

$\therefore x_i^2-x_j^2=2x_i-2x_j.$

$\therefore (x_i-1)^2=(x_j-1)^2.$

$\therefore |x_1-1|=|x_2-1|=|x_3-1|=|x_4-1|.$

当 $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant x_4\geqslant 1$ 时,有 $x_1=x_2=x_3=x_4=x$, $x^3+x-2=0$,即 $x=1$(合题意);

当 $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant 1\geqslant x_4$ 时,有 $x_1=x_2=x_3=x\geqslant 1\geqslant x_4=y$, $x+x^2y=2$, $y+x^3=2$,则$(x-y)(x^2-1)=0$,即 $x=y=1$ 或 $x=-1$, $y=3$;

当 $x_1\geqslant x_2\geqslant 1\geqslant x_3\geqslant x_4$ 时,有 $x_1=x_2=x\geqslant 1\geqslant x_3=x_4=y$, $x+xy^2=2$, $y+x^2y=2$,则$(x-y)(xy-1)=0$,即 $x=y=1$;

当 $x_1\geqslant 1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant x_4$ 时,有 $x_1=x\geqslant 1\geqslant x_2=x_3=x_4=y$, $x+y^3=2$, $y+y^2x=2$,则$(x-y)(y^2-1)=0$,即 $x=y=1$ 或 $x=3$, $y=-1$;

当 $1\geqslant x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant x_4$ 时,有 $x_1=x_2=x_3=x_4=x$,即 $x=1$.

$\therefore(x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,1,1,1)$或$(3,-1,-1,-1)$及其排列.

【8-1】 解非负整数方程组:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=25, & ① \\ x_2-2x_3-x_4=0, & ② \\ -x_1+x_5=-1, & ③ \\ x_1-x_2-x_3=0. & ④ \end{cases}$$

解 ①+②-③得

$$2x_1+2x_2-x_3=26, \quad ⑤$$

⑤-2×④得

$$4x_2+x_3=26. \quad ⑥$$

$\therefore 0\leqslant x_2\leqslant 6$.

当$0\leqslant x_2\leqslant 5$时,由⑥得$x_3\geqslant 6$,由⑤得$x_1\geqslant 11$,由③得$x_5\geqslant 10$.

$\therefore x_1+x_3+x_5\geqslant 27$,与①矛盾!

$\therefore x_2=6$.由⑥得$x_3=2$,由④得$x_1=8$,由③得$x_5=7$.

$\therefore(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(8,6,2,2,7)$(合题意).

【8-5】 已知a_1,a_2,a_3,a_4是两两不相等的实数,解

$$\sum_{i=1}^{4}|a_j-a_i|x_i=1 \quad (j=1,2,3,4).$$

解 不妨设$a_1>a_2>a_3>a_4$,原方程可写成

$$\begin{cases} (a_1-a_2)x_2+(a_1-a_3)x_3+(a_1-a_4)x_4=1, & ① \\ (a_1-a_2)x_1+(a_2-a_3)x_3+(a_2-a_4)x_4=1, & ② \\ (a_1-a_3)x_1+(a_2-a_3)x_2+(a_3-a_4)x_4=1, & ③ \\ (a_1-a_4)x_1+(a_2-a_4)x_2+(a_3-a_4)x_3=1. & ④ \end{cases}$$

①－②得$(a_1-a_2)(-x_1+x_2+x_3+x_4)=0$,

②－③得$(a_2-a_3)(-x_1-x_2+x_3+x_4)=0$,

③－④得$(a_3-a_4)(-x_1-x_2-x_3+x_4)=0$.

$$\therefore \begin{cases} x_1=x_2+x_3+x_4, \\ x_1=-x_2+x_3+x_4, \\ x_1=-x_2-x_3+x_4. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x_2=x_3=0, \\ x_1=x_4=(a_1-a_4)^{-1}. \end{cases}$$

一般设$a_{i_1}>a_{i_2}>a_{i_3}>a_{i_4}$($i_1,i_2,i_3,i_4$是1,2,3,4的排列),则有$x_{i_2}=x_{i_3}=0,x_{i_1}=x_{i_4}=(a_{i_1}-a_{i_4})^{-1}$.

【9-3】 设$m+k+1$为素数,求证:

$$(m+k+1)^{-1}C_{m+k+n+1}^{n+1}\in\mathbf{N}.$$

证 $$C_{m+k+n+1}^{n+1}=\frac{(m+k+n+1)!}{(m+k)!\ (n+1)!}$$

$$=\frac{s}{t}(m+k+1)\in\mathbf{N}.$$

$\because t$的素因子$<m+k+1$,

$\therefore t$整除s.

$\therefore$原式$=\dfrac{s}{t}\in\mathbf{N}$.

【9-5】 求所有不全为0的实数$a_1,a_2,\cdots,a_8$和所有自然数n,使$C_n=a_1^n+a_2^n+\cdots+a_8^n(n=1,2,\cdots)$中有无限个0.

解 设$|a_1|\geqslant|a_2|\geqslant\cdots\geqslant|a_8|$.

(1) 当$|a_1|>|a_2|\geqslant\cdots\geqslant|a_8|$时,$|a_2|>0$. 只要$n\log_7\left|\dfrac{a_1}{a_2}\right|>1$,就有$|a_1|^n>7|a_2|^n$. $|C_n|\geqslant|a_1|^n-|a_2|^n$

$-\cdots-|a_8|^n>0$(违题意).

(2) 当 $|a_1|=|a_2|>|a_3|\geqslant\cdots\geqslant|a_8|$ 时,$a_1a_2>0$,则 $|a_3|>0$. 只要 $n\log_3\left|\frac{a_2}{a_3}\right|>1$,就有 $|a_2|^n>3|a_2|^n$.

$$\begin{aligned}\therefore |C_n| &\geqslant |a_1^n+a_2^n|-|a_3|^n-\cdots-|a_8|^n\\ &=2|a_2|^n-|a_3|^n-\cdots-|a_8|^n>0.\end{aligned}$$

$\therefore a_1=-a_2\neq0, C_n=a_3^n+a_4^n+\cdots+a_8^n$.

类似地,有

$$a_3=-a_4\neq0,\quad C_n=a_5^n+a_6^n+a_7^n+a_8^n,\cdots$$

$\therefore(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8)=(a,-a,b,-b,c,-c,d,-d)$及其所有排列,$a,b,c,d$ 是不全为 0 的实数,n 是奇数,即所求.

【9-6】 某比赛中,n 天共发 m 枚奖章,已知第 k 天所发奖章数 $a_k=k+\frac{1}{7}(m-a_1-a_2-\cdots-a_{k-1}-k)(k=1,2,\cdots,n-1)$,$a_n=n$.求 m,n.

解 $a_{k+1}-a_k=1+\frac{1}{7}(-a_k-1)$,

$$a_1=\frac{1}{7}(m+6),7a_{k+1}=6a_k+6,$$

$$n=a_n=\frac{6}{7}a_{n-1}+\frac{6}{7}=\cdots=6+\frac{6^{n-1}}{7^n}(m-36),$$

$$m=\frac{7^n(n-6)}{6^{n-1}}+36.$$

当 $n=1$ 时,有 $m=1$;当 $n>1$,有 $|n-6|<6^{n-1}$,$(7^n,6^{n-1})=1$.

$\therefore$若 $n\neq 6$,则 $m\notin \mathbf{N}$.

$\therefore n=6, m=36$(合题意).

【10-2】　已知 n 位十进数 m 的各位数字之积为 $m^2-10m-22$,求 m.

解　$10^{n-1}(10^{n-1}-10)-22\leqslant m(m-10)-22\leqslant 9^n$.

$\therefore 10^{2n-2}-10^n\leqslant 9^n+22\leqslant 10^n$.

$\therefore 10^{n-2}\leqslant 2$.

$\therefore n=2$.

$\therefore (10a+b)^2-10(10a+b)-22=ab$.

其中 a,b 是个位数.

$\therefore 100a(a-1)+10b(2a-1)$

$=b(a-b)+22\leqslant 0.25a^2+22<43$

$\therefore a\leqslant 1$,即 $a=1$.

$\therefore b=2$.

$\therefore m=12$.

【10-3】　已知

$$ax_k^2+bx_k+c=x_{k+1}\quad(k=1,2,\cdots,n).\qquad ①$$

其中 $n+1=1, a\neq 0, a,b,c$,是已知实数.求证:$\Delta=(b-1)^2-4ac<0\Leftrightarrow$①无实根.

证　$\because \Delta\geqslant 0\Rightarrow ax^2+(b-1)x+c=0$ 有实根:$x=0.5a^{-1}(1-b\pm\sqrt{\Delta})$,①有实根 $x_1=x_2=\cdots=x_n=x$.

$\therefore$①无实根$\Rightarrow\Delta<0$.

$\because$①有实根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$:

$0=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$