GAILÜLUNYUSHULITONGJI

普通高等院校教材

概率论与数理统计

杨海龙 郭智莲 编著

陕西师范大学出版总社有限公司

GAILULUNYUSHULITONGJI

普通高等院校教材

概率论与数理统计

杨海龙　郭智莲　编著

陕西师范大学出版总社有限公司

图书代号　JC11N0608

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计／杨海龙编著. —西安：陕西师范大学出版总社有限公司，2011.8
ISBN 978－7－5613－5646－3

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①杨…　Ⅲ.①概率论　②数理统计Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第125465号

概率论与数理统计

杨海龙　郭智莲　编著

责任编辑／王　娟
责任校对／颜　红
封面设计／鼎新设计
出版发行／陕西师范大学出版总社有限公司
（西安市长安南路199号　邮编 710062）
网　　址／http://www.snupg.com
经　　销／新华书店
印　　刷／陕西迅捷印务有限责任公司
开　　本／787mm×1092mm　1/16
印　　张／9
字　　数／185千
版　　次／2011年8月第1版
印　　次／2011年8月第1次印刷
书　　号／ISBN 978－7－5613－5646－3
定　　价／18.00元

读者购书、书店添货如发现印刷装订问题，请与本社高教出版分社联系调换。
电话:(029)85303622(兼传真),85307826。

前 言

概率论与数理统计课程由于在自然科学、社会科学、工农业生产、金融、经济等方面有着广泛的应用，所以本课程在高等学校中的重要性也就更加突出。本书充分考虑了高等院校经管类和工科类各专业对概率统计的要求以及对应用服务型人才的培养需要，遵循重视基本概念、培养基本能力、力求贴近生活实际的原则而编写。

概率论、数理统计都是近代数学的分支。概率论是研究随机现象的数量规律性的数学分支。数理统计是研究如何有效地收集数据，如何对数据进行推理，以便对问题进行推断或预测，从而对决策和行动提供依据和建议。虽然两者在方法上有明显的不同，但它们却是相互渗透、相互联系的。本教材共分八章：第一章至第四章是概率论部分，包含随机事件、随机变量与分布、数字特征、极限定理；第五章至第八章是数理统计部分，包含样本与抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析。在编写过程中，为便于教与学，在体现数学严谨性和科学性的基础上，努力做到通俗易懂，叙述力求简洁，内容由浅入深、循序渐进，尤其注重概率统计的实际背景、直观意义以及方法的应用，有利于培养学生分析和解决问题的能力，有利于对学生进行素质教育。本教材在习题的选择上也做了些努力，既有基本

训练题,也有较为复杂的综合应用题,这些题目都是饶有趣味的,有的就能直接应用于实际,读者可酌量做一部分以开阔思路,加深理解。

本书由陕西师范大学杨海龙和西北政法大学郭智莲编著。限于编者的水平,书中难免还存在一些缺点和错误,诚恳希望读者批评指正。

编者

2011 年 6 月于西安

目录

CONTENTS

CONTENTS

第一章　随机事件与概率

概率论与数理统计是一门研究和揭示随机现象统计规律性的数学学科，它有着系统、丰富的内容和许多深刻的结论，同时它作为研究和揭示随机现象客观规律性的主要理论工具，已经在自然科学、国民经济，以及社会活动的几乎所有部门都得到了广泛的应用.

本章介绍概率论的一些基本概念，即介绍随机现象、随机试验、样本空间、随机事件、随机事件的概率等概念，然后还将介绍一些随机事件之间的关系和运算，概率的性质和计算方法等，初步展开对概率论科学方法的学习. 同时也介绍一些应用概率论科学方法解决实际问题的例子，而随机事件与概率是本章的两个最主要的概念.

第一节　随机事件

一、随机事件

本节中我们将先从随机现象谈起. 人们主要是通过随机试验来认识和考察随机现象的，进而通过随机试验得出概率论中的两个重要概念——样本空间和随机事件.

在客观世界中存在着两类不同的现象. 一类是在一定的条件下必然会发生，或必然不发生的现象. 例如，在一个标准大气压下，纯净的水被加热到100℃时必然会沸腾，而温度被降到0℃时又必然会结冰；同种电荷必不相互吸引. 这一类现象我们称之为确定性现象. 另一类现象，在一定的条件下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，其结果却不能事先确定，例如，随意抛掷一枚硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上；一堆产品中混有合格品和不合格品，从中随意抽取一件，则取到的可能是合格品，也可能是不合格品. 这一类现象称为随机现象. 随机现象在自然界和人类社会中广泛存在着.

随机现象在少量的试验或观测中呈现出不确定性，但是切不可认为随机现象就没有一定的规律了. 事实上，如果做了大量的重复试验或观察，我们就会发现一个随机现象中各个结果的出现总是呈现出一定的固有规律性. 例如，多次重复地抛掷一枚质地和构造均匀的硬币，则正面朝上和反面朝上的次数大致上是相等的. 表1－1就是前人做“抛硬币”试验的数据.

表1－1

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$		试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	m	w	m	w	m	w		m	w	m	w	m	w
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502	6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
2	3	0.6	25	0.5	249	0.498	7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512	8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
4	5	1.0	25	0.5	253	0.506	9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502	10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

表 1－1 中的 n 是抛掷的次数，m 是正面朝上的次数，$w=\frac{m}{n}$，被称为出现正面的频率.

从表 1－1 中可以看到，当 $n=500$ 时，正面朝上的频率总是约等于 0.5.

随机现象具有某些规律性的问题，在后面还要谈到，这里我们先介绍随机试验.

一般来说，可以得到随机现象结果的试验或观测都称为随机试验（或简称为试验），比如下面的例子都是随机试验.

E_1：掷一颗骰子（一块小立方体，在它的六个面上分别标有 1 至 6 个小点），观察它朝上一面出现的点数.

E_2：记录某电话交换台在一分钟内接到的呼唤次数.

E_3：一个人进行射击，直到击中目标为止，记录他的射击次数.

E_4：在一批灯泡中随意抽取一只，测试它的寿命.

还可以举出许多随机试验来. 一般地，随机试验应具有以下共性：

（1）试验可以在相同的条件下重复进行；

（2）每次试验的全部基本可能结果都是明确可知的，并且不止一个；

（3）每次试验之前无法预定哪一个结果一定会出现，但试验之后必有某一个基本结果要出现.

以上我们叙述了一些概率论的客观背景，现在来看概率论是如何研究随机现象的.

从上述例子看到，每次随机试验的所有可能出现的基本结果都是明确可知的. 例如，在试验 E_1 中，"出现 1 点"，"出现 2 点"，…，"出现 6 点"就是这个试验可能得到的全部基本结果. 把由一个随机试验可能得到的全部基本结果构成的集合称为样本空间，样本空间中的元素即试验的每一个基本结果称为样本点. 因此我们给出如下定义：

定义 1 随机试验的每一个基本结果称为样本点，记作 $\omega_1,\omega_2,\cdots$. 随机试验的所有样本点构成的集合称为样本空间，记作 Ω，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}$.

例如由上述试验 E_1，样本空间 $\Omega=\{$出现 1 点，出现 2 点，…，出现 6 点$\}=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}=\{1,2,\cdots,6\}$，其中的 $k=\omega_k$ 出现 k 点（$k=1,2,\cdots,6$）就是样本点.

请读者就上述的其他随机试验分别写出其样本空间来.

一个随机试验的全部基本结果构成了一个样本空间 Ω，而这些基本结果其实就是一些事件的发生. 由于这些事件在一定的条件下是否发生不是必然的，因此我们可以称它们是一些随机事件.

然而从一个随机试验得到的随机事件当然不只是这些基本结果，例如在试验 E_1 中，"出现 2 点"是一个随机事件，而"出现偶数点"也是一个随机事件. 可见我们考虑的随机事件不应该只限于那些基本结果. 易见，任何一个随机事件总是由某些基本结果（即样本空间 Ω 中的某些元素）构成的. 仍考虑试验 E_1，"出现 2 点"是由一个样本点构成的随机事件，而"出现偶数点"则是由三个样本点构成的随机事件. 因此，随机事件都可以被看做是样本空间 Ω 的子集合. 特别地，我们把由一个样本点构成的单点集称为一个基本事件.

若 $A\subset\Omega$ 是一个随机事件，则当且仅当 A 的样本点中有一个发生时，我们说 A 发生了. 例如，在试验 E_1 中，"出现 2 点"，"出现 4 点"，"出现 6 点"是三个样本点，则当且仅当这三

个样本点中有一个发生时,我们称随机事件 $A=\{$出现偶数点$\}$发生了.

二、事件之间的关系与运算

由集合论知识可知,样本空间 Ω 本身和空集 $\varnothing$ 也是 Ω 的子集,而从前述的随机试验的共性中容易看出,Ω 是一个必然事件,而 $\varnothing$ 是一个不可能事件. 必然事件和不可能事件本来不是随机的,但为了研究和讨论问题的方便,在概率论中将它们看成是特殊的随机事件.

因为事件是样本空间 Ω 的子集,所以事件之间的运算关系与集合之间的运算关系是一致的,但为了学习上的方便,我们介绍一些概率论中常用的事件之间运算关系的有关说法.

定义 2　若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,称 A 包含于 B,或 B 包含 A,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

例如在"掷骰子"试验中,令 $A=\{$出现 2 点或出现 4 点$\}$,$B=\{$出现偶数点$\}$,则 $A\subset B$.

定义 3　若 A,B 是两个事件,且有 $A\subset B,B\subset A$,则称事件 A 与事件 B 相等,记为 $A=B$.

定义 4　(1) 若事件 C 表示事件 A 与事件 B 中至少有一个发生,则称 C 是 A 与 B 的并或和事件,记为 $C=A\cup B$ 或 $C=A+B$.

(2) 若事件 D 表示事件 A 与事件 B 同时发生,则称 D 是 A 与 B 的交或积事件,记为 $D=A\cap B$ 或 $D=AB$.

例如 $A=\{$出现 2 点或 3 点或 4 点$\}$,$B=\{$出现奇数点$\}$,则 $C=A\cup B=\{$出现的点数小于 $6\}$,$C=A\cap B=\{$出现 3 点$\}$.

事件的并、交运算可以推广到任意有限个或可列无限个事件的情形.

定义 5　若事件 A 与 B 不可能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称 A 与 B 是互不相容的.

显然基本事件之间都是互不相容的. 若多个事件 A_i 中任意两个事件都互不相容,则称这多个事件两两互不相容.

注意,若 $\bigcap\limits_i A_i=\varnothing$,此时并不能判定 A_i 是两两互不相容的. 例如 $A=\{$出现偶数点$\}$,$B=\{$出现奇数点$\}$,$C=\{$出现 1 或 2 点$\}$,则 A,B,C 不是两两互不相容的,但 $ABC=\varnothing$.

定义 6　若事件 C 表示事件 A 发生而事件 B 不发生,则称 C 为 A 与 B 的差事件,记为 $C=A-B$.

例如 $A=\{$出现偶数点$\}$,$B=\{$出现的点数不大于 $4\}$,则 $C=\{$出现 6 点$\}$.

定义 7　若 A,B 是两个事件,且 $A\cup B=\Omega,AB=\varnothing$,则称 A 与 B 互为逆事件,又称 A 与 B 是对立事件,记为 $\overline{A}=B$ 或 $A=\overline{B}$.

显然 $\overline{A}$ 发生就是指 A 不发生,且有 $\overline{A}=\Omega-A$,即 $\overline{A}$ 就是 A 在 Ω 中的余集. 易见,若事件 A 与 B 对立,则 A 与 B 是一定互不相容,但反之未必.

关于事件运算的关系式还有很多,例如 $A-B=A\overline{B},A-B=A-AB,A\cup B=A\cup(B-AB)$ 等等.

例 1　设 A,B,C 是三个事件,试用 A,B,C 表示下列事件:

(1) A 发生,B 与 C 都不发生;(2) A,B,C 中恰好有一个发生;(3) A,B,C 中至少有一个发生;(4) A,B,C 都发生;(5) A,B,C 都不发生;(6) A,B,C 中不多于两个发生.

解　(1) $A\overline{B}\,\overline{C}$.

(2) $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$.

(3) $A\cup B\cup C$.

(4) ABC.

(5) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

(6) $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

例 2 从图书馆中任取一本书,设事件 A 为"取到的是数学书",事件 B 为"取到的是中文版的书",问 (1) AB 表示什么?(2) $A\subset B$ 表示什么?

解 (1) AB 表示的是事件"取到的是中文版的数学书".

(2) $A\subset B$ 说明只要取到的是数学书,则该书一定是中文版的,所以 $A\subset B$ 表示这个图书馆中的数学书全是中文版的.

第二节 古典概型与几何概型

一、古典概型

随机事件(除去 Ω 和$\varnothing$)在一次试验中可能发生,也可能不发生,但一个随机事件在一次试验中发生的可能性大小却是固有的,这是人们从长期的观察中认真思考后认识到的一种客观规律性.

考虑这样一类试验:它们的基本结果只有有限个,而且每个基本结果发生的可能性大小都是相同的.这一类试验称为古典概型试验.例如抛一枚硬币,掷一颗骰子,从装有 n 个不同颜色乒乓球的袋中任取一球等,都是这样的试验.

定义 1 设样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,随机事件 A 中有 $m(0\leqslant m\leqslant n)$ 个样本点,则称 $P(A)=\dfrac{m}{n}$为随机事件 A 的古典概率,或简称为 A 的概率.

定理 1 古典概率有以下性质:

(1) 对任何事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$;

(2) $P(\Omega)=1$;

(3) 若 A 与 B 互不相容,即 $AB=\varnothing$,则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B). \tag{2.1}$$

证明 (1),(2)是显然的,现证(3).

设 A 中有 m_1 个样本点,B 中有 m_2 个样本点,因为 $AB=\varnothing$,所以 $A\cup B$ 中有 m_1+m_2 个样本点.故

$$P(A\cup B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B).$$

推论 (1) $P(\overline{A})=1-P(A)$;

(2) 设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,即 $A_iA_j=\varnothing$,则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

证明 (1) 因为 A 中有 m 个样本点时,$\overline{A}$ 中一定有 $n-m$ 个样本点. 于是有

$$P(\overline{A})=\frac{n-m}{n}=1-\frac{m}{n}=1-P(A).$$

(2) 由(2.1)式可知 $n=2$ 时成立,再由归纳法即可证得.

下面通过例题来看古典概率在实际问题中的应用.

例 1 一只口袋里装有 6 只乒乓球,其中 4 只白色,2 只红色. 从袋中取两次,每次任取一球. 考虑两种情形:(1)第一次取出一球看过其颜色后放回袋中,第二次再任取一球. 这种情形叫有放回抽样;(2)第一次取出一球后不放回袋中,第二次再任取一球. 这种情形叫不放回抽样.

设事件 A 为“取到的两只球都是白球”,事件 B 为“取到的两只球都是红球”,事件 C 为“取到的两只球颜色相同”,事件 D 为“取到的两只球中至少有一只是白球”. 分别就有放回抽样和不放回抽样两种情形求 $P(A),P(B),P(C),P(D)$.

解 (1)有放回抽样的情形.

这时第一次取球有 6 个可能结果,第二次取球也有 6 个可能结果,故两次取球共有 $6\times6=36$ 个可能结果,所以 Ω 中共有 36 个样本点,而且应该认为任何一个样本点的发生具有等可能性.

由于第一次取到白球有 4 个可能结果,第二次取到白球也有 4 个可能结果,故事件 A 中有 $4\times4=16$ 个样本点. 同理可知事件 B 中有 $2\times2=4$ 个样本点. 所以

$$P(A)=\frac{16}{36}=\frac{4}{9},P(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}.$$

而事件 $C=A\cup B$,且 $AB=\varnothing$,故由(2.1)式得

$$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{5}{9}.$$

注意到 $D=\overline{B}$,故

$$P(D)=P(\overline{B})=1-P(B)=\frac{8}{9}.$$

(2) 不放回抽样的情形.

根据解(1)的分析方法,可知此时 Ω 中共有 $6\times5=30$ 个样本点,A 中有 $4\times3=12$ 个样本点,B 中有 $2\times1=2$ 个样本点,于是

$$P(A)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5},P(B)=\frac{1}{15},P(C)=P(A)+P(B)=\frac{7}{15},P(D)=1-P(B)=\frac{14}{15}.$$

例 2 将 n 个球随机地放入 n 个盒子中去,假设每个球都等可能地被放进这 n 个盒子中的任何一个,问结果每个盒子恰好放有一个球的概率是多少?

解 设 n 为“每个盒子恰好放有一个球”之事件. 因为每个球都可以放进这 n 个盒子中的任何一个,所以放 1 个球有 n 种不同的放法,放 2 个球有 $n\times n=n^2$ 种不同的放法,…,放 n 个球有 n^n 种不同的放法,而这每一种放法就是一个可能的基本结果,故 Ω 中的样本点数为 n^n.

现在来看每个盒子恰有一个球的不同放法共有多少种. 第一个球可以放进 n 个盒子中的任何一个,故有 n 种放法;第二个球可以放进余下的 $n-1$ 个盒子中的任何一个,故有 $n-1$

种放法；…；最后一个球只有一个盒子可放了，故只有1种放法. 所以使每个盒子中恰有一个球的不同放法共有 $n(n-1)\cdots 2\cdot 1=n!$ 种，因此 $P(A)=\frac{n!}{n^n}$.

注 当 n 稍大时，这个概率就很小了. 如 $n=6$ 时，$\frac{6!}{6^6}\approx 0.0154$. 如果我们换一个方式，用掷骰子的问题来讨论这个概率，就意味着将一颗骰子连掷六次，要使每次出现的点数都不相同是很不容易的. 差不多在1 000回（每回掷六次）试验中才有可能出现十五六回. 这说明在客观实际中要追求实现“绝对平均主义”往往是不现实的.

例3 袋中有 a 只白球，b 只黑球，现随机地将球一只只取出，问第 $k(1\leqslant k\leqslant a+b)$ 次取到黑球的概率是多少？

解 将 $a+b$ 只球看做是可以识别的，而将球一只只取出就相当于把 $a+b$ 只球排成一列，这样的排列共有 $(a+b)!$ 种，即 Ω 的样本点数为 $(a+b)!$.

设 A_k 为“第 k 次取到黑球”之事件. 因为黑球有 b 个，故第 k 次取到黑球的方法有 b 种. 而除去第 k 次后，其他 $a+b-1$ 次取出 $a+b-1$ 个球的不同方法当然是 $(a+b-1)!$ 种，所以 A_k 中的样本点数为 $b(a+b-1)!$. 于是

$$P(A_k)=\frac{b(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{b}{a+b},\quad k=1,2,\cdots,a+b.$$

注 此题的解法有多种，这里是用排列的方法来解的. 也可以用组合的方法来解，请读者自己试一下. 另外此题求得的概率与 k 无关，这说明这种情形与次序无关. 比如 $a+b$ 个运动员抽签，其中有张是轮空签，则不论先抽还是后抽，抽到轮空签的可能性都是一样的，即抽签公平.

例4 设有 N 件产品，其中有 M 件不合格产品. 现从这 N 件产品中随机取出 n 件，问 n 件中恰有 $m(0\leqslant m\leqslant n)$ 件不合格产品的概率是多少？

解 由组合知识可知，在 N 件产品中取出 n 件的所有不同取法为 C_N^n 种，所以 Ω 的样本点数为 C_N^n. 而在 n 件产品中恰有 m 件不合格产品的取法就相当于在 M 件不合格产品中取 m 件，然后再在 $N-M$ 件合格品中取 $n-m$ 件，所有可能的不同取法就是 $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$ 种. 因此所求概率为

$$P=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

注 此题所求得的概率被称为超几何分布的概率，它在产品质量的检验和控制等问题中很有用处.

从以上的例题可以看到，在古典概率的问题中往往是通过直接计数来计算概率的. 读者可以在做习题的过程中体会到有些古典概率的计算是有技巧的，因而求解有些古典概率问题并不容易. 另外，在古典概率问题中常常要用到排列组合的知识.

二、几何概型

古典概率只能解决样本点的发生具有等可能性的有限样本空间的问题，这是有局限性

的. 如果样本空间 Ω 的样本点有无数多个,并且 Ω 构成了一个 n 维空间中的区域,同时在某种意义上说,每个样本点的发生也具有等可能性,则这类问题往往可以用几何概率来解决.

设在平面上有一区域 G,而区域 g 是 G 的一部分,如图 1－1 所示. 将一点任意投掷到 G 内,并且认为这个点落在 G 内的任何地方具有等可能性,那么这个点落入区域 g 内的概率是多少呢? 我们自然认为这个概率应该只与 g 的面积大小有关,而与 g 的位置和形状无关,即这个点落入 g 内的概率为

$$P=\frac{g\text{ 的面积}}{G\text{ 的面积}},$$

这就是一个几何概率问题. 一般地我们有

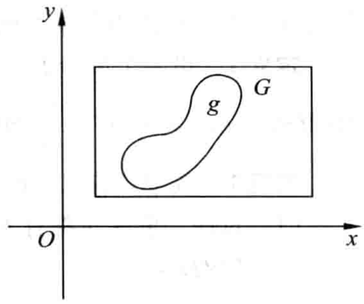

图 1－1

定义 2　若样本空间 Ω 可以构成 n 维空间中的一个有限区域 G,而事件 $A\subset\Omega$ 构成了 G 中的某一部分区域 g,则称

$$P(A)=\frac{g\text{ 的测度}}{G\text{ 的测度}},$$

为事件 A 的几何概率. 当 $A=\varnothing$ 时,规定 $P(A)=0$.

定义 2 中"测度"的意义可以这样来理解,$n=1$ 时,它是指长度;$n=2$ 时,它是指面积;$n=3$ 时,它是指体积.

定理 2　几何概率有以下性质:

(1) 对任何事件 A 都有 $P(A)\geqslant 0$;

(2) $P(\Omega)=1$;

(3) 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i). \tag{2.2}$$

定理 2 的证明略去. (2.2)式说明几何概率具有有限可加性.

例 5　在区间[0,5]上任投一点,求此点坐标小于 1 的概率.

解　设 A 为"点的坐标小于 1"之事件. $\Omega=[0,5]$. 当且仅当所投点落在[0,1]内时,此点坐标小于 1,区间[0,5]的长度为 5,区间[0,1]的长度为 1,则 $P(A)=\frac{1}{5}$.

例 6　两人相约 7 点钟至 8 点钟到某地去会面,先到者等候 20 分钟后就离去. 假设每人在 7 点至 8 点间的任何时刻到达会面地点的可能性是一样的,问这两人能会面的概率是多少?

解　设 A 为"两人能会面"之事件. 再设 x,y 分别表示这两人到达会面地点的时刻,则两人到达时刻的所有可能结果 Ω 可构成一个边长为 60(分钟)的正方形,如图 1－2 所示. 而两人能会面的充要条件显然是 $|x-y|\leqslant 20$,即能会面的所有可能结果是图 1－2 中用阴影标出的区域,故由几何概率的定义可得

$$P(A)=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}.$$

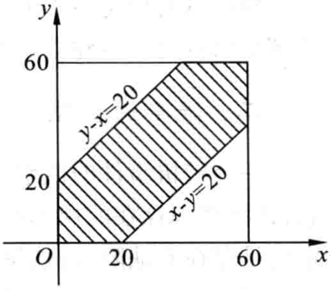

图 1－2

第三节 频率与概率

一、频率及其性质

前面我们提到过，随机事件在一次试验中发生的可能性大小(即概率)是固有的，这种可能性的大小也可以用频率的概念来加以描述.

定义 1 设一个试验 E 重复做了 N 次，而我们关心的某个事件 A 在 N 次试验中发生了 $M(M\leqslant N)$ 次，令 $F(A)=\dfrac{M}{N}$，则称 $F(A)$ 为事件 A 的频率.

定理 1 频率具有以下性质：

(1) 对任一事件 A 都有 $F(A)\geqslant 0$；

(2) $F(\Omega)=1$；

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个两两互不相容的事件，则有

$$F\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}F(A). \tag{3.1}$$

这些性质的成立都是显然的，我们仅就性质(3)当 $n=2$ 时加以说明. 设事件 A_1 在 N 次试验中发生了 M_1 次，事件 A_2 在这 N 次试验中发生了 M_2 次，由于 A_1 与 A_2 不可能同时发生，所以事件 A_1+A_2 必定发生了 M_1+M_2 次，于是

$$F(A_1\cup A_2)=\frac{M_1+M_2}{N}=\frac{M_1}{N}+\frac{M_2}{N}=F(A_1)+F(A_2).$$

(3.1)式说明频率具有有限可加性.

频率是人们在实际工作或试验中常用的统计工具，而且长期的观察和经验告诉我们，频率的数值虽然并不固定，但是当试验次数 N 充分地增大时，事件 A 的频率 $F(A)$ 就在一个确定的实数 $P(A)$ 的附近波动着，且 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$，一般来说，试验次数越多，波动越小，这叫做频率的稳定性. 比如本章第一节中的表 1-1 就是一个例证. 我们把频率 $F(A)$ 稳定地趋向着的实数 $P(A)$ 就叫做事件 A 的概率. 当然，单凭试验和频率要确定一个事件的概率往往难以做到，但在实际工作中常常可以用试验次数较多时的频率 $F(A)$ 来估算概率 $P(A)$ 或近似地代替概率 $P(A)$，这叫做概率的统计定义.

频率具有稳定性不但可以由大量重复的试验来验证，而且在概率论中，频率具有稳定性的理论根据也已经建立起来了，我们在后面将加以介绍.

二、概率的公理化定义及其性质

一个随机事件的概率是客观存在的，而且可以用试验次数较多时的频率来近似地估算它，这种客观存在的规律性为概率论的理论研究提供了可靠的客观背景. 但是用频率代替概率总是存在着缺陷，特别是由于没有给出概率的确切数值，因而常常给理论分析造成很大障碍. 古典概率和几何概率虽然可以给出概率的确切值，但要求有某种等可能性存在，这又给

讨论一般的概率问题带来了很大的局限性. 因此有必要从频率、古典概率、几何概率中抽象出一致的特点,形成为公理,从而给出概率的一般化定义.

定义 2　设 E 是随机试验,Ω 是它的样本空间,对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数,记为 $P(A)$,称为 A 的概率. 若集合函数 $P(\cdot)$ 满足以下条件:

1°非负性:对任一事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$;

2°规范性:$P(\Omega)=1$;

3°可列可加性:设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是可列个两两互不相容的事件,则有

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k).$$

下面讨论概率的性质.

定理 2　$P(\varnothing)=0.$

证明　令 $A_n=\varnothing,n=1,2,\cdots$,则 $\bigcup_n A_n=\varnothing$,由 3°得

$$P(\varnothing)=P(\bigcup_n A_n)=\sum_n P(A_n)=\sum_n P(\varnothing)=0,$$

由概率的非负性知,$P(\varnothing)\geqslant 0$,故　$P(\varnothing)=0.$

定理 3 (有限可加性)　若 n 个事件 $A_k,k=1,2,\cdots,n$,满足 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$,则

$$P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k).$$

证明　令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$,显然 $A_1,A_2,\cdots$是两两互不相容的. 故由 3°得

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)+0=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

定理 4 (逆事件概率)　$P(\bar{A})=1-P(A).$

证明　由 $A\cup\bar{A}=\Omega,A\bar{A}=\varnothing$,得

$$1=P(\Omega)=P(A\cup\bar{A})=P(A)+P(\bar{A}),$$

即 $P(\bar{A})=1-P(A).$

定理 5　对任意两个事件 A,B,有 $P(B-A)=P(B)-P(AB).$

证明　集合论中易知,有 $B=(B-A)\cup AB$,且$(B-A)\cap AB=\varnothing$ (如图 1-3 所示). 则有

$$P(B)=P(B-A)+P(AB),$$

即 $P(B-A)=P(B)-P(AB).$

推论 1　若 $A\subset B$,则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$,且 $P(A)\leqslant P(B).$

推论 2　对于任一事件 A,有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1.$

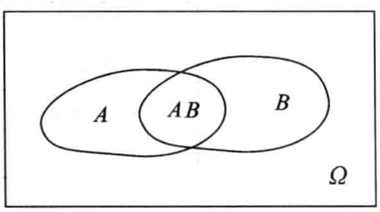

图 1-3

定理 6　设 A,B 是任意两个事件,则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$

证明　由于 $A\cup B=A+(B-AB)$,且 $A\cap(B-AB)=\varnothing,AB\subset B$ (如图 1-3 所示),所以

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

推论 3(加法公式) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是任意 n 个事件,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leq i_1<i_2\leq n}P(A_{i_1}A_{i_2})+\sum_{1\leq i_1<i_2<i_3\leq n}P(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3})+\cdots+(-1)^{n+1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

证明 可利用数学归纳法证明,具体过程留给读者.

例 1 设 $P(A)=0.2,P(B)=0.5$,且 $A\subset B$,求(1)$P(\overline{A}),P(\overline{B})$;(2)$P(A\cup B)$;(3)$P(AB)$;(4)$P(\overline{A}\,\overline{B})$;(5)$P(\overline{A}B)$;(6)$P(\overline{B}A)$.

解 (1)$P(\overline{A})=1-P(A)=0.8,P(\overline{B})=1-P(B)=0.5$.

(2)$P(A\cup B)=P(B)=0.5$.

(3)$P(AB)=P(A)=0.2$.

(4)$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=0.5$.

(5)$P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.5-0.2=0.3$.

(6)$P(\overline{B}A)=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0$.

例 2 设 A,B 是两个事件且 $P(A)=0.6,P(B)=0.7$,问在什么条件下 $P(AB)$ 最大,最大值是多少?在什么条件下 $P(AB)$ 最小,最小值是多少?

解 由一般加法公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,可知

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B),$$

则当 $P(A\cup B)=P(A)$ 时,$P(AB)$ 最大,且最大值为

$$P(AB)=0.6+0.7-0.6=0.7.$$

当 $P(A\cup B)=1$ 时,$P(AB)$ 最小,且最小值为

$$P(AB)=0.6+0.7-1=0.3.$$

第四节 条件概率及三个重要公式

一、条件概率

在实际问题中我们除了要考虑事件 A 的概率 $P(A)$ 外,有时还要考虑在另一事件 B 已发生的条件下,事件 A 发生的概率,而且一般来说这两个概率是不同的. 我们来看一个例子.

例 1 两台机床加工同一种零件,结果如下表所示,

表 1-2

	合格品数	不合格品数	合 计
第一台机床	35	5	40
第二台机床	50	10	60
总 计	85	15	100

从这 100 个零件中任取一个,则取到合格品(设为事件 A)的概率显然是 $P(A)=\frac{85}{100}=0.85$. 如果已知取出的零件是第一台机床加工的(设为事件 B),则这时取到合格品的概率就是在事件 B 已经发生的条件下,事件 A 发生的概率,我们把它记为 $P(A|B)$,由表 1-2 不难看出