普通高等教育“十二五”规划教材
国家理科基地大学数学系列教材

概率论与数理统计
同步学习辅导

邰淑彩　孟新焕　主编

科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材
国家理科基地大学数学系列教材

概率论与数理统计
同步学习辅导

邰淑彩　孟新焕　主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是与《概率论与数理统计》配套使用的同步辅导教材.内容涉及概率论的基本概念、随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计与假设检验等.各章内容包括：内容提要、重点难点、疑难解答和习题详解四部分.

本书可以供高等院校（非数学专业）本、专科生使用，对报考硕士研究生的考生也具有重要的参考价值.

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计同步学习辅导/郜淑彩，孟新焕主编. —北京：科学出版社，2013.12

普通高等教育"十二五"规划教材　国家理科基地大学数学系列教材

ISBN 978-7-03-039214-5

Ⅰ.概…　Ⅱ.①郜…　②孟…　Ⅲ.概率论—高等学校—教学参考资料　②数理统计—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 281030 号

责任编辑：吉正霞　蔡　莹／责任校对：董艳辉

责任印制：高　嵘／封面设计：蓝　正

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

开本：B5（720×1000）

2014 年 6 月第　一　版　印张：13

2014 年 6 月第一次印刷　字数：260 000

定价：25.50 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

概率论与数理统计是高等学校理工类和经管类各专业学生必修的一门重要的学科基础课程.编者本着教育要面向世界、面向未来、面向现代化的宗旨,参照全国高等学校公共数学教学指导委员会《概率论与数理统计课程教学基本要求(修订稿)》,从培养学生的创新意识、加强学生的数学素养、提高学生的科学计算及运用数学的能力等现代化教育理念出发,针对学生客观情况,编写了《概率论与数理统计》(科学出版社,2013).本书是其配套的同步辅导教材.本书内容编排次序与大部分工科专业使用的概率统计教材基本一致.因此,无论使用哪种版本的同类教材,本书都是学习该课程的极好参考书.对课堂教学内容将产生有益的强化和补充.

本书每章均包括以下内容:

(1) 内容提要.对本章的基本概念、理论、计算公式和方法进行归纳和总结,在学习中起到提纲挈领的作用,使学生了解本章的基本要求.

(2) 重点难点.给出了本章的重点和难点的内容,可以使学生对重点内容给予足够的重视,集中力量攻克难点内容.

(3) 疑难解答.提出了本章若干疑难问题或容易混淆概念的问题,并给予解答.可以帮助学生正确理解概念、理论和方法,培养学生正确思考问题、解决问题的能力.

(4) 习题详解.给出了教材中全部习题及综合练习的详细解答.通过解题帮助学生提高正确分析问题和解决问题的能力,从而加深对《概率论与数理统计》这门课程的概念、理论的认识和理解.

本书第 1 章至综合练习 1 由孟新焕编写,其中第 2 章、第 4 章的习题详解由杨丽华编写,第 5 章的习题详解由唐五龙编写;第 6 章至综合练习 2 由邰淑彩编写,其中第 6 章的习题详解由刘园园编写.刘金舜主审.

限于作者水平,书中错误之处在所难免,恳请专家、同行及读者批评指正.

作　者

2013 年 6 月

目　录

第1章

概率论的基本概念

1.1 内容提要

1.1.1 随机试验

称满足以下三个条件的试验为随机试验：

(1) 在相同条件下可以重复进行；

(2) 每次试验的结果不止一个，并且能事先明确所有的可能结果；

(3) 进行试验之前不能确定哪个结果出现.

1.1.2 样本点 样本空间 随机事件 不可能事件

随机试验的每一个可能结果称为一个样本点，也称为基本事件.

样本点的全体所构成的集合称为样本空间，也称为必然事件. 必然事件在每次试验中必然发生.

样本空间的子集称为随机事件，简称事件.

在每次试验中必不发生的事件为不可能事件.

1.1.3 事件的关系与运算

(1) 包含关系 $A \subset B$，即事件 A 发生，导致事件 B 发生；

(2) 相等关系 $A = B$，即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$；

(3) 和事件 $C = A \cup B$，即事件 A 与事件 B 至少有一个发生；

(4) 积事件 $C = AB = A \cap B$，即事件 A 与事件 B 同时发生；

(5) 差事件 $C = A - B$，即事件 A 发生，事件 B 不发生；

(6) 互不相容事件 A, B 满足 $AB = \varnothing$，事件 A 与事件 B 不同时发生；

(7) 逆事件 $\overline{A} = S - A$，即 $A \cup \overline{A} = S, A\overline{A} = \varnothing$.

1.1.4 事件的运算律

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A, AB=BA$;

(2) 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A(BC)=(AB)C$;

(3) 分配律 $A(B\cup C)=(AB)\cup(AC), A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$;

(4) 幂等律 $A\cup A=A, AA=A$;

(5) 差化积 $A-B=A-(AB)=A\overline{B}$;

(6) 德·摩根律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

1.1.5 概率的公理化定义

设 E 为随机试验,S 为样本空间,对于 S 中的每一个事件 A,赋予一个实数 $P(A)$,称之为 A 的概率,$P(A)$ 满足:

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) $P(S)=1$;

(3) 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 两两互不相容,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots$$

1.1.6 概率的性质

(1) $P(\varnothing)=0$;

(2) $P(\overline{A})=1-P(A)$;

(3) $P(B-A)=P(B)-P(AB)$. 特别地,若 $A\subset B$,则

$$P(B-A)=P(B)-P(A), P(A)\leqslant P(B)$$

(4) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,更一般地,$P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$.

1.1.7 古典概率 几何概率

$$\text{古典概率 } P(A)=\frac{A\text{ 所包含的样本点数}}{\text{样本空间 } S \text{ 中所包含的样本点总数}}$$

$$\text{几何概率 } P(A)=\frac{A\text{ 发生的区域的“度量”}}{\text{样本空间 } S \text{ 的“度量”}}$$

(度量或为长度、面积、体积等)

1.1.8　条件概率　乘法公式　全概率公式　贝叶斯公式

(1) 条件概率　$P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}, P(A) > 0$;

(2) 乘法公式　$P(AB) = P(B|A)P(A), P(A) > 0$;

(3) 全概率公式

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)$$

其中,$P(B_i) < 0, B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分;

(4) 贝叶斯公式　$P(B_i|A) = P\dfrac{(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}$　$(i = 1, 2, \cdots, n)$.

1.1.9　事件的独立性

若 $P(AB) = P(A)P(B)$,则称事件 A 与事件 B 相互独立.若

$$P(AB) = P(A)P(B)$$
$$P(BC) = P(B)P(C)$$
$$P(AC) = P(A)P(C)$$
$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

则称事件 A,B,C 相互独立,若前三式成立,则称事件 A,B,C 两两相互独立.

若事件 A 与事件 B 相互独立,则 A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 B,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

1.2　重点难点

重点　理解随机事件的概念,掌握事件的运算及运算律;理解概率、条件概率的概念,掌握概率的性质,会计算古典概率和几何概率;掌握概率的加法公式、乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式;理解事件的独立性的概念,掌握用事件的独立性进行概率计算;理解独立重复试验的概念.

难点　利用概率的性质进行推理和计算;将实际问题用事件表示;古典概率的计算.

1.3　疑难解答

1. 如何确定随机试验的样本空间?

答　随机试验的样本空间不一定唯一.在同一试验中,试验的目的不同时,样

本空间往往是不同的.例如,将篮球运动员一次投篮作为随机试验时,若试验目的是考察命中率,则试验的样本空间为 $S_1 = \{中,不中\}$;若试验目的是考察得分情况,则试验的样本空间为 $S_2 = \{0分,1分,2分,3分\}$.所以应从试验的目的出发确定样本空间.

2. 互逆事件与互不相容事件有何联系与区别?

答 (1) 两事件互逆,必定互不相容;但互不相容的事件未必互逆.

(2) 互不相容的概念适用于多个事件,但互逆事件只适用于两个事件.

(3) 两个事件互不相容只表明这两个事件不能同时发生,但可能都不发生.而两个事件互逆则表示这两个事件有且仅有一个发生.

3. 两事件相互独立与两事件互不相容有何联系?

答 没有必然联系,是完全不同的概念.两个事件 A 与 B 相互独立,其实质是事件 A 发生的概率与事件 B 是否发生没有关系.即 $P(A) = P(A|B)$.而事件 A 与事件 B 互不相容,则是指事件 A 的发生必然导致事件 B 不发生,或者说事件 A 与事件 B 不同时发生.即 $AB = \varnothing$.

再从直观上予以解释,如图 1.3.1 和图 1.3.2 所示,都是边长为 1 的正方形,在图 1.3.1 中,事件 A 表示左上角的 $\mathrm{Rt}\triangle abc$,事件 B 表示右上角的 $\mathrm{Rt}\triangle bcd$,由几何概率知 $P(A) = P(B) = \dfrac{1}{2}$,$P(AB) = \dfrac{1}{4}$,因此 A 与 B 相互独立.但 $AB \neq \varnothing$,不是互不相容.在图 1.3.2 中,A 表示右上角的 $\mathrm{Rt}\triangle bcd$,B 表示左下角的 $\mathrm{Rt}\triangle bad$,$P(A) = \dfrac{1}{2}$,$P(B) = \dfrac{1}{2}$,$P(AB) = 0$,$P(AB) \neq P(A)P(B)$,故事件 A 与事件 B 不相互独立,而 $AB = \varnothing$,事件 A 与事件 B 互不相容.

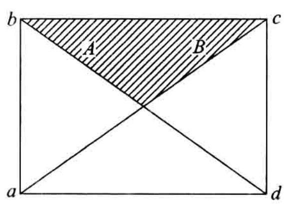

图 1.3.1

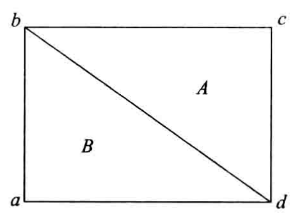

图 1.3.2

在 $P(A) > 0$,$P(B) > 0$ 的条件下,若事件 A 与事件 B 相互独立,则 $P(AB) = P(A)P(B) > 0$,若事件 A 与事件 B 互不相容,则 $P(AB) = 0$,两个概念出现矛盾.因此在一般情况下,事件相互独立与事件互不相容是两个互不等价、完全不同的概念.

4. 条件概率 $P(A|B)$ 与积事件概率 $P(AB)$ 有何区别与联系?

答 $P(AB)$ 表示在样本空间 S 中计算 AB 发生的概率;而 $P(A|B)$ 表示增加

条件 B 后在缩减样本空间 S_B 中计算事件 A 发生的概率. 虽然两个都是计算事件 A,B 同时发生的概率,但其样本空间不同. 用古典概型公式,则

$$P(A|B)=\frac{AB\text{ 所包含的样本点数}}{S_B\text{ 中的样本点总数}}$$

$$P(AB)=\frac{AB\text{ 所包含的样本点数}}{S\text{ 中所包含的样本点总数}}$$

一般地说,$P(A|B)$ 比 $P(AB)$ 大. 而且还可以相互表出,即

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)},\quad P(AB)=P(B)P(A|B)$$

5. 实际应用中,如何判断两事件的独立性?

答　实际应用中,对事件的独立性,常常不是用定义来判断,而是由试验方式来判断试验的独立性,由试验的独立性来判断事件的独立性. 或者说根据问题的实质,直观上看一事件的发生是否影响另一事件的概率来判断. 例如,在放回抽样中,第一次抽取的结果与第二次抽取的结果是相互独立的;而在不放回抽样中是不相互独立的. 又如甲、乙两名射手在相同条件下进行射击,"甲击中目标"与"乙击中目标"是相互独立的.

6. n 个事件相互独立与 n 个事件两两独立是否一回事?

答　不是一回事,由前者可以推出后者,但反过来不行. 可以参考配套教材 1.5 例 1.5.2(参见《概率论与数理统计》一书,全书下同),对于两个事件来说是一回事.

7. 全概率公式与贝叶斯公式有何联系,这两个公式反映什么样的概率问题?

答　这两个公式是计算复杂事件概率的重要工具.

全概率公式 $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$ 中的 A 若视为"果",S 中的划分 B_i 视为"因",该公式反映"由因求果"的概率问题. 该公式是根据以往信息和经验得到的,所以被称为先验概率. 而贝叶斯公式 $P(B_i|A)=\dfrac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}$ 中的 $P(B_i|A)$ 是得到"信息"A 后求出的,称为后验概率. 该公式是"执果溯因"的概率问题.

先验概率与后验概率有不可分割的联系,后验概率的计算是以先验概率为基础的.

1.4　习题详解

1. 设 A,B,C 为三个事件,用事件的运算关系表示下列事件:

(1) 至少有一个发生;

(2) 不多于一个发生；

(3) 不多于两个发生；

(4) 至少有两个发生；

(5) 都不发生.

解 (1) $A \cup B \cup C$；

(2) $A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C \cup \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(3) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$；

(4) $AB \cup BC \cup AC$；

(5) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

2. 设 A,B 为随机事件，$P(A)=0.5$，$P(A-B)=0.2$，求 $P(\overline{AB})$.

解 由于 $A-B=A-AB$，且 $AB \subset A$，所以

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

于是
$$P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.5-0.2=0.3$$

因此
$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.7$$

3. 设 $A \subset B$，$P(A)=0.1$，$P(B)=0.5$，求 $P(AB)$，$P(A \cup B)$，$P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

解 因为 $A \subset B$，所以 $AB=A$，$A \cup B=B$，$\overline{A} \cup \overline{B}=\overline{AB}$，故

$$P(AB)=P(A)=0.1;\quad P(A \cup B)=P(B)=0.5$$

$$P(\overline{A} \cup \overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.9$$

4. 设 A,B,C 为三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\frac{1}{8}$，求 A,B,C 至少有一个发生的概率.

解 因为 $P(AB)=P(BC)=0$，且 $ABC \subset AB$，所以

$$P(ABC)=0$$

$$P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)=\frac{5}{8}$$

5. 某城市的电话号码由 8 个数字组成，每个数字可以从 0 到 9 这 10 个数字中任选一个，试求电话号码是由 8 个不同的数字组成的概率.

解 设 $A=$“8 个不同的数字组成的电话号码”.

从 10 个数字中任选 8 个数字，共有 10^8 种选法. 故样本空间 S 中所包含的基本事件总数为 10^8；事件 A 所包含的基本事件数为从 10 个数字中任选 8 个不同的数字，共有 $10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3$ 种选法，所以

$$P(A)=\frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3}{10^8}\approx 0.03629$$

6. 一批产品共有 50 个，其中 45 个是合格品，5 个是不合格品. 从这批产品中任

取 3 个,试求其中有不合格品的概率.

解　设 $A=\{$任取的 3 个产品中有不合格品$\}$,则 $\overline{A}$ 表示取出的 3 个产品中无不合格品,从 50 个产品中任取 3 个,共有 $\binom{50}{3}$ 种选法;从 45 个合格品中任取 3 个,有 $\binom{45}{3}$ 种选法,故

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{\binom{45}{3}}{\binom{50}{3}}\approx 0.28$$

7. 袋中有 5 个红球,6 个黑球,8 个白球. 现从袋中任取 3 个球,按下面两种方式分别求取出的球颜色相同的概率. (1) 放回抽样;(2) 不放回抽样.

解　设 $A=$"取出的球颜色相同",$B_1=$"取出红色球",$B_2=$"取出黑色球",$B_3=$"取出白色球".

(1) 放回抽样:从 19 个球中取出 3 个红球的概率为 $P(B_1)=\left(\frac{5}{19}\right)^3$;3 个黑球的概率为 $P(B_2)=\left(\frac{6}{19}\right)^3$;3 个白球的概率为 $P(B_3)=\left(\frac{8}{19}\right)^3$,故取出的 3 个同色球的概率为

$$P(A)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)=\left(\frac{5}{19}\right)^3+\left(\frac{6}{19}\right)^3+\left(\frac{8}{19}\right)^3=0.12436$$

(2) 不放回抽样:从 19 个球中取出 3 个红球的概率为 $P(B_1)=\frac{\binom{5}{3}}{\binom{19}{3}}$;3 个黑球的概率为 $P(B_2)=\frac{\binom{6}{3}}{\binom{19}{3}}$;3 个白球的概率为 $P(B_3)=\frac{\binom{8}{3}}{\binom{19}{3}}$,故取出的 3 个同色球的概率为

$$P(A)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)=\frac{\left[\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\binom{8}{3}\right]}{\binom{19}{3}}=0.0888$$

8. 在房间中有 10 人,分别拿有从 1 号到 10 号的号牌,现从中任选 3 人记录其号牌的号码.

(1) 试求最大号码是 5 的概率;

(2) 试求最小号码是 5 的概率.

解 从 10 个号中任选 3 个号共有$\binom{10}{3}$种选法.

(1) 最大号码是 5,则剩下的两个号只能在 1,2,3,4 中选取,共有$\binom{4}{2}$种选法,故所求概率为

$$P=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{1}{20}$$

(2) 最小号码是 5,则其余两个号码在 6,7,8,9,10 中选取,共有$\binom{5}{2}$种选法,故所求概率为

$$P=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{1}{12}$$

9. 某饭店一楼有三部电梯,今有 5 位旅客要乘电梯. 假定选择哪部电梯是随机的,试求每部电梯内至少有一位旅客的概率.

解 设 $A=\{$至少有一部电梯是空的$\}$,$A_i=\{$第 i 部电梯是空的$\}$ $(i=1,2,3)$,则

$$P(A_i)=\frac{(3-1)^5}{3^5}=\left(\frac{2}{3}\right)^5 \quad (i=1,2,3)$$

同理,“没有一位旅客进入第 i 部电梯和第 j 部电梯”的概率为

$$P(A_iA_j)=\left(1-\frac{2}{3}\right)^5 \quad (i,j=1,2,3)$$

显然,三部电梯全空着的概率为 0. 故

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1\cup A_2\cup A_3)\\&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_2A_3)-P(A_1A_3)+P(A_1A_2A)\\&=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^5-3\times\left(\frac{1}{3}\right)^5+0=0.38\end{aligned}$$

每部电梯内至少有一位旅客的概率为

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.38=0.62$$

10. 在区间(0,2)内任取两个数,试求两数之和不大于 3 的概率.

解 设 x 在(0,2)内任意取值,y 在(0,2)内任意取值,则 $0<x<2$,$0<y<2$,(x,y) 表示平面上的一点的坐标,则点(x,y)位于边长为 2 的正方形区域内,要使两数之和不大于3,即 $x+y\leqslant 3$,则点(x,y)位于图 1.4.1 中的阴影部分,故所求概率为

$$P = \frac{4 - \frac{1}{2}}{4} = \frac{7}{8}$$

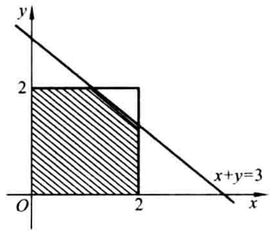

图 1.4.1

11. 某人忘记了电话号码的最后一位数字，因而他随意地拨号，求他拨号不超过三次而接通所需电话的概率.

解　设 $A=\{$不超过三次接通电话$\}$，$A_i=\{$第 i 次拨通电话$\}$ $(i=1,2,3)$. 故

$$P(A) = P(A_1) + P(\overline{A}_1)P(A_2 \mid \overline{A}_1) + P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1)P(A_3 \mid \overline{A}_1\overline{A}_2)$$
$$= \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{9} + \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{10}$$

12. 有甲、乙两艘轮船要停靠同一泊位，这两艘轮船可能在一昼夜的任意时刻到达. 设两艘轮船停靠泊位的时间分别为 1 小时和 2 小时，试求有一艘轮船停靠泊位时需要等候的概率.

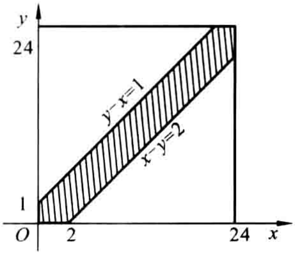

图 1.4.2

解　设甲、乙到达泊位的时间分别为 x,y. 甲停靠的时间为 1 小时，乙停靠的时间为 2 小时，(x,y) 表示平面上的一点的坐标，则点 (x,y) 位于边长为 24 的正方形区域内，若有一艘轮船需要等候，点 (x,y) 落在图 1.4.2 中的阴影部分，即 $\begin{cases} y-x \leqslant 1 \\ x-y \geqslant 2 \end{cases}$，故需要等候的概率为

$$P = 1 - \frac{\frac{1}{2} \times 22^2 + \frac{1}{2} + 23^3}{24^2} = 1 - 0.8793 = 0.1207$$

13. 一批产品共有 20 件正品和 4 件次品，从中任意抽取两次，每次抽取一件，取后不放回. 试求下列事件的概率：

(1) 两件都是正品；

(2) 两件都是次品；

(3) 一件正品，一件次品；

(4) 第二次才取到次品；

(5) 第二次取出的是次品.

解　设 $A_i=\{$第 i 次取到次品$\}$ $(i=1,2)$.

(1) $P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1) = \frac{20}{24} \times \frac{19}{23} = \frac{95}{138}$；

(2) $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) = \frac{4}{24} \times \frac{3}{23} = \frac{1}{46}$；

(3) $P(\overline{A}_1A_2 + A_1\overline{A}_2) = P(\overline{A}_1)P(A_2 \mid \overline{A}_1) + P(A_1)P(\overline{A}_2 \mid A_1)$

$$= 2 \times \frac{20}{24} \times \frac{4}{23} = \frac{20}{69};$$

(4) $P(\overline{A}_1 A_2) = P(\overline{A}_1)P(A_2 | \overline{A}_1) = \dfrac{20}{24} \times \dfrac{4}{23} = \dfrac{10}{69}$;

(5) $P(A_2) = P(\overline{A}_1 A_2) + P(A_1 A_2) = P(\overline{A}_1)P(A_2 | \overline{A}_1) + P(A_1)P(A_2 | A_1)$

$$= \frac{20}{24} \times \frac{4}{23} + \frac{4}{24} \times \frac{3}{23} = \frac{1}{6}.$$

14. 设 10 件产品中有 4 件一等品和 6 件二等品. 现从中随机地取出两件,已知其中至少有一件是一等品,试求两件都是一等品的概率.

解 设 $A = \{$至少有一件是一等品$\}$, $B = \{$两件都是一等品$\}$,则

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{(C_{10}^2 - C_6^2)}{C_{10}^2}, \quad P(B) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2}$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{C_4^2}{C_{10}^2 - C_6^2} = \frac{1}{5}$$

15. 设某种动物从出生起活 20 年以上的概率为 80%,活 25 年以上的概率为 40%. 现在有一个已活了 20 年的这种动物,试求它能活到 25 年以上的概率.

解 设事件 $A =$"能活 20 年以上",事件 $B =$"能活 25 年以上".

由题意,$P(A) = 0.8$,因为 $B \subset A$,所以 $P(AB) = P(B) = 0.4$,由条件概率定义得

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.4}{0.8} = 0.5$$

16. 据以往资料表明,某三口之家患某种传染病的概率有如下规律:$P\{$孩子得病$\} = 0.6$, $P\{$母亲得病 | 孩子得病$\} = 0.5$, $P\{$父亲得病 | 母亲得病及孩子得病$\} = 0.4$. 求母亲得病及孩子得病而父亲未得病的概率.

解 设 $A = \{$孩子得病$\}$, $B = \{$母亲得病$\}$, $C = \{$父亲得病$\}$. 则

$$P(A) = 0.6, \quad P(B|A) = 0.5, \quad P(C|AB) = 0.4$$

$$P(AB\overline{C}) = P(A)P(B|A)P(\overline{C}|AB|) = P(A)P(B|A)[1 - P(C|AB)]$$
$$= 0.6 \times 0.5 \times (1 - 0.4) = 0.18$$

17. $P(\overline{A}) = 0.3$, $P(B) = 0.4$, $P(A\overline{B}) = 0.5$, 试求 $P(B|(A \cup \overline{B}))$.

解 因为 $P(B|(A \cup \overline{B})) = \dfrac{P(B(A \cup \overline{B}))}{P(A \cup \overline{B})} = \dfrac{P(AB)}{P(A) + P(\overline{B}) - P(A\overline{B})}$,而

$$P(A) = 1 - P(A) = 1 - 0.3 = 0.7$$
$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$$
$$P(AB) = P(A - A\overline{B}) = P(A) - P(A\overline{B})$$

故 $$P(B|(A \cup \overline{B})) = \frac{P(A) - P(A\overline{B})}{P(A) + P(\overline{B}) - P(A\overline{B})} = \frac{0.7 - 0.5}{0.7 + 0.6 - 0.5} = 0.25$$

18. 甲、乙两个工人加工同样的零件,甲生产的产品的废品率为 0.03、乙生产