新课标**高考数学**
考前冲刺复习用书

2014版

洞穿高考
数学辅导丛书

高考数学临门一脚

文科版

系统梳理高考前查漏补缺的重要知识以及常考二级结论，紧扣考纲预测30题，点破考试重点与方向！

主编 ● 张永辉

清华大学出版社

洞穿高考

数学辅导丛书

高考数学临门一脚

文科版

主编 ● 张永辉

清华大学出版社
北 京

内容简介

《高考数学临门一脚》是为帮助考生在最后冲刺阶段进行有效复习而编写的压轴之作，编写团队集聚全国多位具有丰富经验的高三一线数学名师，针对高考复习过程中考生常见的易错知识点与方法，并结合近几年高考试题中的常考题型与模型梳理浓缩而成.其中"回归基础、查漏补缺"篇帮助考生回顾高考中常考的知识点；"高考数学常考二级结论及其应用"篇是对教材及解题中重要规律与方法的归纳与提升，是考生在考场上快速解题的好帮手；"最后30题"篇将最前沿的考试方向与命题趋势以试卷的形式呈现给大家，是一份临考前不可或缺的重要素材.愿我们的不懈努力成就莘莘学子的大学梦想！

《高考数学临门一脚》分为理科版和文科版两个分册，本书为文科版，供文科考生考前冲刺阶段复习参考.

图书在版编目(CIP)数据

高考数学临门一脚：文科版/张永辉主编.—北京：清华大学出版社，2014

(洞穿高考数学辅导丛书)

ISBN 978-7-302-35348-5

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①中学数学课－高中－习题集－升学参考资料　Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第018418号

责任编辑：陈仕云
封面设计：刘　超
版式设计：文森时代
责任校对：赵丽杰
责任印制：沈　露

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编：**100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购：**010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京鑫丰华彩印有限公司
装 订 者：三河市溧源装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：203mm×280mm　　**印　张：**7.75　　**字　　数：**245千字
版　　次：2014年3月第1版　　**印　　次：**2014年3月第1次印刷
印　　数：1～4500
定　　价：25.00元

产品编号：053485-01

前　　言

经过两轮复习，在临近高考一个月的最后冲刺阶段如何全面地查漏补缺、归纳题型、掌握模型？针对这些问题，为帮助同学们在考前踢好高考"临门一脚"，我们精心研发并编写了《高考数学临门一脚》. 本书是《新课标高考数学题型全归纳》、《30 分钟拿下高考数学选择题、填空题》、《洞穿高考数学解答题核心考点》的姊妹篇，四本书配套使用，复习效果更好！

本书的主体内容分为三篇.

第一篇：回归基础、查漏补缺. 本篇内容依据新课标高考考查的知识点顺序，以问题加跟进练习的形式将知识系统化、条理化，为考生提供一次考点的归纳梳理过程，既能夯实基础，又能查漏补缺.

第二篇：高考数学常考二级结论及其应用. 高考试题的一个主要特点就是"取材于课本，但又不拘泥于课本"，许多高考题都能在课本上找到"题源". 本篇通过探寻试题的本源，总结归纳出常考的 21 个重要结论及试题模型，这对考生在考场上快速识别试题类型作用很大. 如在椭圆、双曲线中涉及到弦中点的"点差法"结论有$\frac{x_0}{a^2}\pm k\cdot\frac{y_0}{b^2}=0$.

第三篇：最后三十题. 本篇整合了全国各地权威数学名家对近几年新课标高考卷的研究成果，将最前沿的考试方向与命题趋势以最后三十题的形式呈现给大家，这些试题涉及到的考点与方法既常规又新颖，是一份考前不可或缺的复习资料，希望同学们在使用时一定要做到"卷做三遍，题后三思".

本书从策划到出版，倾注了许多专家和一线教师的心血和创造性的工作. 具体编写分工如下：张永辉编写第一篇与第三篇，并负责全书的统筹与校对；余臣编写第二篇，并负责全书的校对工作. 孟令修、王晓明、张喜金、董家兴、樊德国、王国庆、孙光磊负责部分章节的编写与全书的校对，并提出了宝贵的修改建议，在此，对他们表示由衷的感谢. 与此同时，还要感谢本丛书作者团队老师们常年辛勤的工作、默默的付出. 此外，也要特别感谢本书的责任编辑——清华大学出版社的陈仕云女士，她参与了本书的设计和筹划，她的辛勤努力和卓有成效的工作，使本书得以顺利面世.

编者们虽倾心倾力，数易其稿，但难免有疏漏和不妥之处，敬请广大读者和数学同行指正.

"行百里者半九十"，虽然高考的复习已走过了 90%的时间，但我们坚信在剩下这 10%的时间里，通过使用本书能对高考数学成绩起到颠覆作用. 最后送给即将参加高考的考生们一句话："心存感激，永不放弃！即使是在最猛烈的风雨中，我们也要有抬起头、直面前方的勇气. 请相信，任何一次苦难的经历，只要不是毁灭，就是财富！". 请大家记住——坚持心中的梦想，勇往直前，永不言败！2014 年 6 月，你必将精彩！愿本书伴随莘莘学子步入理想的大学！

张永辉
2014 年 1 月

目　　录

第一篇　回归基础、查漏补缺

2014年高考复习正在紧张进行，为了帮助大家做好基础知识的再回顾工作，我们按照教材内容的顺序，以问题加跟进练习的形式将整个高中阶段的数学内容串联，在临近高考时为高三学生提供一次知识的梳理，以期对同学们的高考数学复习查漏补缺.

第一章　集　　合

知识点与方法

1. 子集、交集、并集三者之间的关系：$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$.

2. "或"，"且"，"非"（$\vee$，$\wedge$，$\neg$）的真假性判断；全称命题与特称命题的否定.

(1) $\vee$ 命题：一真则真，全假才假；$\wedge$ 命题：一假则假，全真才真；$\neg p$ 与 p 的真假性相反.

(2) 全称命题与特称命题互为否定.

3. 四种命题及其关系中要注意原命题与逆否命题同真假，充要条件判定时首先分清条件与结论，再进行推理.

查漏补缺

1. 集合中元素"必须具备的性质特征"(特别是互异性)

例 1　集合 $A=\{a,b,c\}$ 中的三个元素分别表示某一个三角形的三边长度，那么这个三角形一定不是（　　）.

A. 等腰三角形　　B. 锐角三角形　　C. 直角三角形　　D. 钝角三角形

变式 1　已知集合 $A=\{0,1,2\}$，则集合 $B=\{z\mid z=x-y,x\in A,y\in A\}$ 中元素的个数是（　　）.

A. 1　　B. 3　　C. 5　　D. 9

2. 集合中元素的属性

3. 空集：对任意集合 A 有 $\varnothing\subseteq A$，$\varnothing\cap A=\varnothing$，$\varnothing\cup A=A$

当一个集合中元素个数不确定时，应想到空集.

例 2　集合 $P=\{x\in\mathbf{Z}\mid 0\leqslant x<3\}$，$M=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2\leqslant 9\}$，则 $P\cap M=$（　　）.

A. $\{1,2\}$　　B. $\{0,1,2\}$　　C. $\{x\mid 0\leqslant x<3\}$　　D. $\{0,1,2,3\}$

变式 1　设全集 $I=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$，集合 $M=\left\{(x,y)\left|\dfrac{y-3}{x-2}=1\right.\right\}$，$N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$，那么 $(\complement_I M)\cap(\complement_I N)=$（　　）.

A. $\varnothing$　　B. $\{(2,3)\}$　　C. $(2,3)$　　D. $\{(x,y)\mid y=x+1\}$

例 3　设 $A=\{x\mid x^2+x-6=0\}$，$B=\{x\mid mx+1=0\}$，且 $A\cup B=A$，则实数 m 的取值范围是________.

变式 1　已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x-10\leqslant 0\}$，集合 $B=\{x\mid p+1\leqslant x\leqslant 2p-1\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 p 的取值范围.

4. **在由不等式构成集合或抽象集合的子集、交集、并集、补集问题中,常采用画数轴或 Venn 图. 运用数形结合的思想解题,往往会化抽象为具体,化复杂为简单,将集合的交、并、补的关系直观、形象地表示而有利于运算**

例 4 设集合 $S=\{x||x-2|>3\}$,$T=\{x|a<x<a+8\}$,$S\cup T=\mathbf{R}$,则 a 的取值范围是(　　).

A. $(-3,-1)$　　B. $[-3,-1]$

C. $(-\infty,-3]\cup[-1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)$

变式 1 已知全集 U,$A\subseteq B$,那么下列结论中可能不成立的是(　　).

A. $A\cap B=A$　　B. $A\cup B=B$　　C. $(\complement_U A)\cap B\neq\varnothing$　　D. $(\complement_U B)\cap A=\varnothing$

变式 2 如图 1-1 所示,I 是全集,A,B,C 是 I 的子集,则阴影部分表示的集合是(　　).

A. $(A\cap B)\cap C$　　B. $(A\cap \complement_I B)\cap C$　　C. $(A\cap B)\cap(\complement_I C)$　　D. $(\complement_I B)\cup A\cap C$

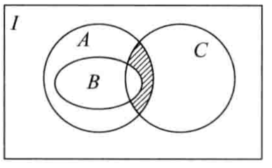

图 1-1

变式 3 如图 1-2 所示,I 是全集,A,B,C 是 I 的子集,分别表示下列各图中阴影部分的集合.

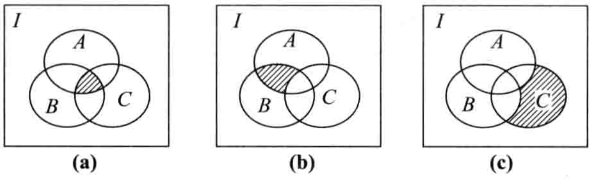

图 1-2

5. **求满足某个条件下的参数时,有时所求参数并不满足该条件,原因是求解时只用条件的局部,这就要对所求参数,代回条件进行检验**

例 5 已知集合 $A=\{a^2,a+1,-3\}$,$B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$,若 $A\cap B=\{-3\}$,求 a 的值.

变式 1 已知集合 $A=\{1,3,\sqrt{m}\}$,$B=\{1,m\}$,若 $A\cup B=A$,则 $m=$(　　).

A. 0 或$\sqrt{3}$　　B. 0 或 3　　C. 1 或$\sqrt{3}$　　D. 1 或 3

6. **充分必要条件的考查在高考中通常作为载体来考查相关知识的逻辑关系**

例 6 在$\triangle ABC$ 中,“$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}>0$”是“$\triangle ABC$ 是钝角三角形”的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

变式 1 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为向量,则“$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$”是“$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$”的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 含简单逻辑联结词的命题的真值表

例 7　已知命题 p:所有有理数都是实数;命题 q:正数的对数都是负数,则下列命题为真命题的是(　　).

A. $(\neg p)\lor q$　　B. $p\land q$　　C. $(\neg p)\land(\neg q)$　　D. $(\neg p)\lor(\neg q)$

变式 1　在一次跳伞训练中,甲、乙两位学员各跳一次,设命题 p 是"甲降落在指定范围",命题 q 是"乙降落在指定范围",则命题"至少有一位学员没有降落在指定范围"可表示为(　　).

A. $(\neg p)\lor(\neg q)$　　B. $p\lor(\neg q)$　　C. $(\neg p)\land(\neg q)$　　D. $p\lor q$

第二章　函数概念与基本初等函数

知识点与方法

1. 函数解析式的求法主要有换元法和待定系数法等;利用函数的解析式研究问题时要特别注意分析自变量 x 与函数值 y 的关系,尤其要注意分段函数各段的自变量所对应的解析式.

已知函数解析式,计算有限个函数值的和. 此类问题一般都具有明显的规律,或者函数具有周期性,或者函数具有对称性(自变量具有某种关系,其函数值和为定值). 如 $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$,求 $f\left(\dfrac{1}{2015}\right)+f\left(\dfrac{2}{2015}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{2014}{2015}\right)$的值(这里 $f(x)+f(1-x)=\dfrac{1}{2}$).

2. 确定函数定义域的基本原则.

(1)分式函数 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$中,满足分母 $g(x)\neq 0$.

(2)偶次根式 $y=\sqrt[2n]{f(x)}\ (n\in\mathbf{N}^*)$中,满足被开方式 $f(x)\geqslant 0$.

(3)对数函数 $y=\log_{f(x)}g(x)$中,满足$\begin{cases}g(x)>0\\ f(x)>0\text{ 且 }f(x)\neq 1\end{cases}$.

(4)幂函数 $y=[f(x)]^0$ 中,满足 $f(x)\neq 0$.

(5)正切函数 $y=\tan x$ 中,满足 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z})$.

(6)在实际问题中考虑自变量的实际意义.

3. 函数值域(最值)的求法.

(1)二次型函数——配方法.

(2)双曲函数——均值不等式.

(3)利用换元法转化为二次型函数或双曲函数.

(4)函数单调性法.

(5)导数法.

对于不等式恒成立、存在性问题也要通过求函数最值的方法解决.

4. 判断函数单调性的方法.

(1)定义法:一般地,设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 A,区间 $M\subseteq A$, $\forall x_1,x_2\in M$, $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0\Leftrightarrow\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0\Leftrightarrow f(x)$在区间 M 上是增函数. 若 $f(x)$在区间 M 上为增函数,$x_1,x_2\in M$,则有 $x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$,减函数有类似结论.(注意:在涉及到不等式的求解、证明等有关问题时可以考虑构造函数,利用函数单调性求解).

(2)用已知函数单调性判断(下列函数都在公共单调区间上):

①增函数+增函数=增函数;

②减函数+减函数=减函数;

③复合函数单调性;

④奇(偶)函数在对称区间上的单调性相同(相反).

(3)借助图像判断函数单调性.

(4)导数法:对可导函数 $f(x)$,$x\in(a,b)$,$f'(x)\geqslant 0\Leftrightarrow f(x)$在$(a,b)$上是增函数;$f'(x)\leqslant 0\Leftrightarrow f(x)$在$(a,b)$上是减函数(其中导致导数为 0 的点是孤立的).

5. 函数的奇偶性.

(1)判定函数奇偶性的方法.函数具有奇偶性的必要条件是定义域为关于原点对称的区间.

判断函数奇偶性首先确定函数定义域.

①定义法:$\forall x\in D_f$,$f(x)\pm f(-x)=0$;

②用已知函数奇偶性判定:

(i)奇±奇=奇;偶±偶=偶;奇±偶=非奇非偶(非零函数);

奇×偶=奇;奇×奇=偶;偶×偶=偶.

(ii)复合函数奇偶性,内偶则偶,两奇为奇.

③借助图像确定奇偶性.

(2)奇偶函数的性质.

①定义域含 0 的奇函数图像必过原点;

②奇函数若存在最大(小)值,则它们的和为 0;

③$f(x)$是偶函数,则有 $f(-x)=f(x)=f(|x|)$;

④既奇又偶的函数的解析式必为 $f(x)=0$;

⑤对于奇(偶)函数,已知 y 轴一侧的图像、解析式、单调性,能够确定 y 轴另一侧的图像、解析式、单调性.题目中出现 x 与 $-x$ 的函数值问题,需考虑函数的奇偶性.

(3)奇偶函数性质推广(对称性问题).

已知函数 $f(x)$,$x\in D$.

①满足 $f(a+x)=f(b-x)\Leftrightarrow f(x)$关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$对称,

特别地,$f(-x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)$关于 y 轴($x=0$)对称;

②满足 $f(a+x)=-f(b-x)\Leftrightarrow f(x)$关于点$\left(\dfrac{a+b}{2},0\right)$对称,

特别地,$f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow f(x)$关于原点$(0,0)$中心对称;

③函数 $y=f(x)$与 $y=f(-x)$的图像关于 y 轴对称;

④函数 $y=f(x)$与 $y=-f(x)$的图像关于 x 轴对称;

⑤函数 $y=f(a+x)$与 $y=f(b-x)$的图像关于 $x=\dfrac{b-a}{2}$对称.

6. 函数的周期性.

(1)定义:已知函数 $y=f(x)$,$x\in D$,若对任意 $x\in D$,存在非零正常数 T,满足:

①$f(x+T)=f(x)$,周期为 T;

②$f(x+T)=-f(x)$,周期为 $2T$;$f(x+T)+f(x)=c$,周期为 $2T$;

③$f(x+T)=\pm\dfrac{1}{f(x)}$,周期为 $2T$;$f(x+T)\cdot f(x)=c(c\neq 0)$,周期为 $2T$;

④$f(x+T)=-f(x-T)$,周期为 $4T$;

⑤$f(x+T)+f(x-T)=f(x)$,周期为 $6T$.

(2)对称性与周期性关系：若函数 $f(x)$ 具有两个对称性(中心、轴)及周期性三个性质中的两个，则必定具有第三个性质. 例如：

①若 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 和 $x=b$ 对称($a\neq b$)，则 $f(x)$ 是周期为 $2|a-b|$ 的周期函数.

②若 $f(x)$ 的图像关于点 $(a,0)$ 和 $(b,0)$ 对称($a\neq b$)，则 $f(x)$ 是周期为 $2|a-b|$ 的周期函数.

③若 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 及点 $(b,0)$ 对称($a\neq b$)，则 $f(x)$ 是周期为 $4|a-b|$ 的周期函数.

7. 三个二次(一元二次方程、二次不等式、二次函数)间的问题可相互转化. 如二次函数零点是相应二次方程的根，二次不等式的求解依赖于二次方程与二次函数的图像等.

(1)一元二次方程.

①判别式，求根公式，根与系数关系；

②根的分布问题，要由判别式、对称轴、端点值三者确定. 例如：

(i)二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 两根都大于 $k\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ -\dfrac{b}{2a}>k.\\ f(k)>0\end{cases}$

(ii)一根大于 k，一根小于 $k\Leftrightarrow f(k)<0$.

(2)二次函数的三种表现形式.

$y=ax^2+bx+c=a(x-m)^2+n=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$，其中 (m,n) 是顶点，x_1,x_2 为零点. 对于限定区间上的二次函数最值要注意对称轴与区间的位置关系.

(3)一元二次不等式解法依赖于相应方程与二次函数图像.

(4)对于二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，$x_1\neq x_2$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$.

8. 关于幂、指数、对数函数问题.

(1)幂函数 $f(x)=x^\alpha$ 在第一象限的图像如图 1-3 所示，单调性为：当 $\alpha>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数；当 $\alpha<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数.

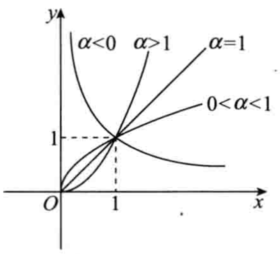

图 1-3

(2)指数与对数.

$a^b=N\Leftrightarrow b=\log_a N(a>0,a\neq 1)$，$a^{\log_a N}=N$，$\log_a a^b=b$，$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$，$\log_{a^m}b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$.

(3)指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$ 与对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$.

①互为反函数；

②定义域、值域之间的关系正好相反；

③单调性：在各自定义域上，当 $0<a<1$ 时，均为减函数；当 $a>1$ 时，均为增函数.

(4)以各自的运算规则为模型的抽象函数的表示法.

①幂函数：$f(xy)=f(x)f(y)$，$f\left(\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{f(x)}{f(y)}(y\neq 0,f(y)\neq 0)$，$f(1)=1$；

②指数函数：$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，$f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$，$f(0)=1$；

③对数函数：$f(xy)=f(x)+f(y)$，$f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$，$f(1)=0$.

(5)会画 $y=a^{|x|}$,$y=\log_a|x|$,$y=|\log_a x|(a>0,a\neq 1)$的图像.

9.图像问题.

(1)注意以下两个函数图像.

①形如 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$的函数能变为形如 $y=n\pm\dfrac{1}{x-m}$的函数,其图像是关于点(m,n)对称的反比例函数图像;

②形如 $y=ax+\dfrac{b}{x}$的"双曲函数",若 $ab>0$,则为"对勾函数";若 $ab<0$,则为单调函数.

(2)图像变换.

①平移变换;

②伸缩变换;

③对称变换:

函数 $y=f(-x)$的图像与函数 $y=f(x)$的图像关于 y 轴对称.

函数 $y=-f(x)$的图像与函数 $y=f(x)$的图像关于 x 轴对称.

函数 $y=-f(-x)$的图像与函数 $y=f(x)$的图像关于原点对称.

④翻折变换:

$y=f(|x|)$与 $y=f(x)$之间的关系,$y=|f(x)|$与 $y=f(x)$之间的关系.

(3)研究问题方法.

会由图像特征研究函数性质,能用性质描绘函数图像,养成用图像、性质分析思考问题,即数形结合思想解题的习惯.

查漏补缺

1.函数是数集到数集的特殊映射,其对应法则必须满足自变量在定义域内的任意性,函数值的唯一性

例8 已知集合 $A=\{1,2,3,\cdots,23\}$,求证:不存在这样的函数 $f:A\to\{1,2,3\}$,使得对任意的整数 $x_1,x_2\in A$,若$|x_1-x_2|\in\{1,2,3\}$,则 $f(x_1)\neq f(x_2)$.

变式1 函数 $y=f(x)$的图像与直线 $x=a(a\in\mathbf{R})$的交点个数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 0 或 1　　D. 可多于 1

2.结合函数图像研究函数性质

如图 1-4 所示,以函数为核心,其核心内容包括函数的图像与性质,函数的图像包括基本初等函数的图像的作法及图像变换,函数的性质主要包括函数的定义域、解析式、值域、奇偶性、单调性、周期性,对称性及特殊点.函数知识的外延主要体现在函数与方程(函数零点)及函数与不等式的结合.而函数与方程(函数零点)及函数与不等式问题可通过转化思想,利用函数图像与性质求解.

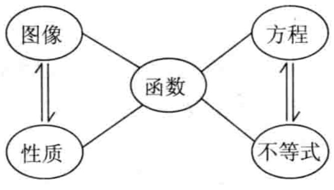

图 1-4

例9 关于 x 的方程$(x-a)(x-b)=2(a<b)$的两实根为 α,β,且 $\alpha<\beta$,试比较 α,β,a,b 的大小.

变式 1　已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+4x,x\geqslant 0\\4x-x^2,x<0\end{cases}$，若 $f(2-a^2)>f(a)$，则实数 a 的取值范围是(　　).

A. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$　　B. $(-1,2)$

C. $(-2,1)$　　D. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

3. **已知函数的解析式研究函数的性质**

给出函数的解析式，常常需要同学们能够有意识地通过函数的解析式来研究函数的性质，如函数的奇偶性、单调性、周期性及函数值的分布等，进而解决函数的有关问题.

已知函数 $f(x)=x^2-\cos x$，对于 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的任意 x_1,x_2，有如下条件：① $x_1>x_2$；② $x_1^2>x_2^2$；③ $|x_1|>x_2$，其中能使 $f(x_1)>f(x_2)$ 恒成立的条件序号是________.

4. **构造函数的解析式研究函数的性质看似与函数无关的问题，如果我们能够分析其本质特点，引入变量并根据其模型构造函数，利用函数性质求解. 这才是函数的真正魅力**

例 10　若 $\alpha,\beta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，且 $\alpha\sin\alpha-\beta\sin\beta>0$，则下列结论正确的是(　　).

A. $\alpha>\beta$　　B. $\alpha+\beta>0$　　C. $\alpha<\beta$　　D. $\alpha^2>\beta^2$

变式 1　比较 $\frac{\ln\pi}{\pi},\frac{1}{\mathrm{e}},\ln\sqrt{2}$ 这三个实数的大小，并说明理由.

变式 2　比较 $\frac{\ln 2}{2},\frac{\ln 3}{3},\frac{\ln 5}{5}$ 的大小.

第三章　三角函数的图像与性质

知识点与方法

(1)正(余)弦函数图像中的五点作图法常用于画图及求解析式.

在由图像求解析式时，若已知对称中心和对称轴，可列出 $\begin{cases}\omega x_1+\varphi=2k\pi\\\omega x_2+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}\\\omega x_3+\varphi=2k\pi+\pi\\\cdots\\\omega x_5+\varphi=2k\pi+2\pi\end{cases}$，$k\in\mathbf{Z}$，求出 ω,φ.

(2)图像的变换.

相位变换——针对自变量而言,振幅(周期)变换——伸缩变换、翻折变换($y=\sin|x|$,$y=|\sin x|$).

(3)求函数定义域不需对函数做变形,其他如值域、最值、单调性、周期性、奇偶性、对称中心和对称轴都需将其化为一个角的一个三角函数,即 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$,$y=A\cos(\omega x+\varphi)$,$y=A\tan(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\omega>0)$再求解.

查漏补缺

1. 利用同角三角函数关系式进行相关计算

同角三角函数有如下基本关系.

平方关系:$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$;商数关系:$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

(1)若已知角的象限条件,先确定所求三角函数的符号,再利用直角三角形三角函数的定义求未知三角函数值.

(2)若无象限条件,一般"弦化切".

例12 已知 $\tan\theta=2$,则 $\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta=$( ).

A. $-\dfrac{4}{3}$　　B. $\dfrac{5}{4}$　　C. $-\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

变式1 已知 $\tan\alpha=2$,则$\dfrac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=$( ).

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. 3　　C. $-\dfrac{1}{3}$　　D. -3

2. 诱导公式在计算、化简中的作用

例13 $\sin585°$的值为( ).

A. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

变式1 记 $\cos(-70°)=k$,那么 $\tan110°=$( ).

A. $\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k}$　　B. $-\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k}$　　C. $\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}}$　　D. $-\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}}$

3. 三角函数线在确定函数值范围上的应用

例14 若 $\theta\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right)$,则点 $P(\sin\theta+\cos\theta,\sin\theta-\cos\theta)$在直角坐标系内位于( ).

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

变式1 若 $0\leqslant\alpha<2\pi$,$\sin\alpha>\sqrt{3}\cos\alpha$,则 $\alpha\in$( ).

A. $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$　　B. $\left(\dfrac{\pi}{3},\pi\right)$　　C. $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right)$　　D. $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{3\pi}{2}\right)$

4. 由三角函数图像的对称求参数问题

例15 如果函数 $y=3\cos(2x+\varphi)$的图像关于点$\left(\dfrac{4\pi}{3},0\right)$中心对称,那么$|\varphi|$的最小值为( ).

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{4}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

变式1 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)(x\in\mathbf{R},\omega>0)$的最小正周期为 π,将 $y=f(x)$的图像向左平移$|\varphi|$个单位长度,所得图像关于 y 轴对称,则 φ 的一个值是( ).

A. $\dfrac{\pi}{2}$　　B. $\dfrac{3\pi}{8}$　　C. $\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\dfrac{\pi}{8}$

5. 综合运用三角函数相关公式及图像平移规律(特别注意 x 的系数不是 1 的情况)解决函数图像平移问题

例16 将函数 $y=\sin(2x+\varphi)$ 的图像沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位后，得到一个偶函数的图像，则 φ 的一个可能取值为(　　).

A. $\frac{3\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. 0　　D. $-\frac{\pi}{4}$

变式 1 将函数 $y=\sqrt{3}\cos x+\sin x(x\in\mathbf{R})$ 的图像向左平移 $m(m>0)$ 个单位长度后，所得到的图像关于 y 轴对称，则 m 的最小值是(　　).

A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

6. 熟悉三角函数图像与周期性的关系，会求三角函数的单调区间

例17 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x(\omega>0)$，若 $y=f(x)$ 的图像与直线 $y=2$ 的相邻交点的距离等于 π，则 $f(x)$ 的单调递增区间是(　　).

A. $\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right],k\in\mathbf{Z}$　　B. $\left[k\pi+\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{11\pi}{12}\right],k\in\mathbf{Z}$

C. $\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right],k\in\mathbf{Z}$　　D. $\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2\pi}{3}\right],k\in\mathbf{Z}$

变式 1 如果存在正整数 ω 和实数 φ 使得函数 $f(x)=\cos^2(\omega x+\varphi)(\omega,\varphi$ 为常数)的图像如图 1-5 所示(图像经过点(1,0))，那么 ω 的值为________.

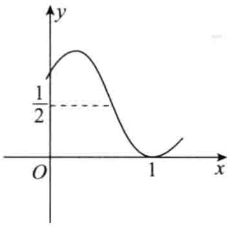

图 1-5

7. 根据三角函数的图像求三角函数的解析式

已知函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的图像求函数的解析式时，常用的解题思想、方法是数形结合及函数与方程思想. 即由图中的最大值或最小值确定 A，由周期确定 ω，由图像上已知点的坐标来确定 φ，但由图像求得的 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的解析式一般不唯一，只有限定 φ 的取值范围，才能得出唯一解. 将若干个点代入函数式，求得相关待定系数 A,ω,φ. 这里需要注意的是，要认清选择的点属于"五点"中的哪一个位置点，并能正确代入式中，依据五点画图法原理，点的序号与式子的对应关系是：

"第一点"(即图像上升时与 x 轴的交点)为 $\omega x_1+\varphi=0$；

"第二点"(即图像的最高点)为 $\omega x_2+\varphi=\frac{\pi}{2}$；

"第三点"(即图像下降时与轴的交点)为 $\omega x_3+\varphi=\pi$；

"第四点"(即图像的最低点)为 $\omega x_4+\varphi=\frac{3\pi}{2}$；

"第五点"(即下一周期图像上升时与 x 轴的交点)为 $\omega x_5+\varphi=2\pi$.

例18 函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图像如图 1-6 所示，则 ω,φ 的值分别是(　　).

A. $2,-\frac{\pi}{3}$　　B. $2,-\frac{\pi}{6}$　　C. $4,-\frac{\pi}{6}$　　D. $4,\frac{\pi}{3}$

变式 1 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A,\omega,\varphi$ 是常数，$A>0,\omega>0)$ 的部分图像如图 1-7 所示，则 $f(0)=$________.

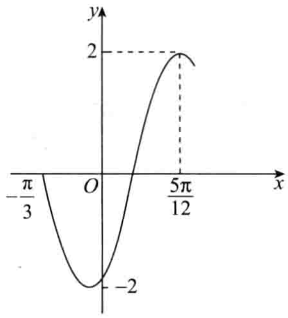

图 1-6

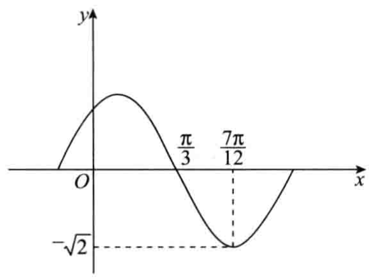

图 1-7

第四章　三角恒等变换

知识点与方法

三角恒等变换中常用的变形.

(1)对于含有 $\sin\alpha\pm\cos\alpha$,$\sin\alpha\cos\alpha$ 的问题,利用$(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=1\pm2\sin\alpha\cos\alpha$,建立 $\sin\alpha\pm\cos\alpha$ 与 $\sin\alpha\cos\alpha$ 的关系.

例如:已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{3}$,求 $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$.

(2)对于含有 $\sin\alpha$,$\cos\alpha$ 的齐次式(如$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$,$\sin\alpha\cos\alpha$),与 $\tan\alpha$ 的关系,利用 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

(3)对于形如 $\cos^2\alpha+\sin\alpha$ 与 $\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha$ 的变形,前者用平方关系 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 化为二次型函数,而后者用降幂公式化为一个角的三角函数.

(4)含 $\tan\alpha+\tan\beta$ 与 $\tan\alpha\tan\beta$ 时考虑 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$.

(5)辅助角公式:$a\sin\alpha\pm b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha\pm\varphi)$,其中 $\tan\varphi=\frac{b}{a}$,角 φ 的终边恒过点(a,b),常见的有 $\sin\alpha\pm\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha\pm\frac{\pi}{4}\right)$,$\sin\alpha\pm\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha\pm\frac{\pi}{3}\right)$,$\sqrt{3}\sin\alpha\pm\cos\alpha=2\sin\left(\alpha\pm\frac{\pi}{6}\right)$.

(6)$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$ 的变形应用:

$$\left.\begin{array}{l}1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}\\1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}\end{array}\right\}\text{和差化积,}\qquad\left.\begin{array}{l}\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}\\\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}\end{array}\right\}\text{降幂公式.}$$

查漏补缺

1. 两角和差公式运用过程中经常涉及角的变换

在已知某些角的三角函数值,求其他三角函数值问题中,关键是建立未知函数值的角与已知函数值角的关系,并根据角的关系选择公式.

例 19　设 $\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=-\frac{1}{9}$,$\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=\frac{2}{3}$,且$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$,$0<\beta<\frac{\pi}{2}$,求 $\cos(\alpha+\beta)$的值.

2. 形如 $a=\sin^2x+b\cos^2x+c\sin x\cos x$（可化为 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$）和可化为二次型 $a\sin^2x+b\sin x+c$ 或 $a\cos^2x+b\cos x+c$ 函数的问题是高考常考的题型，要求学生熟练掌握

例 20　若 $2\sin x+\cos x=\sqrt{5}$，则 $\tan x=$________.

变式 1　设当 $x=\theta$ 时，函数 $f(x)=3\sin x-4\cos x$ 取得最大值，则 $\cos\theta=$________.

例 21　已知函数 $f(x)=2\cos 2x+\sin^2x-4\cos x$.

(1)求 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$的值；

(2)求 $f(x)$的最大值和最小值.

变式 1　已知函数 $f(x)=\sin^2\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{2}\right)$的最小正周期为 π.

(1)求 ω 的值；

(2)求函数 $f(x)$在区间$\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$上的取值范围.

3. 三角函数值有时是通过角终边上点坐标给出，再由此计算有关函数值

例 22　如图 1-8 所示，在平面直角坐标系 xOy 中，以 Ox 轴为始边作两个锐角 α,β，它们的终边分别与单位圆相交于 A,B 两点，已知 A,B 的纵坐标分别为$\frac{\sqrt{2}}{10},\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(1)求 $\tan(\alpha+\beta)$的值；

(2)求 $\alpha+2\beta$ 的值.

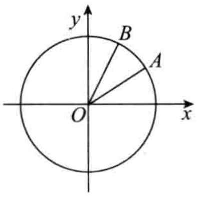

图 1-8

变式 1　如图 1-9 所示，在直角坐标系 xOy 中，角 α 的顶点是原点，始边与 x 轴正半轴重合，终边交单

位圆于点 A,且 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$. 将角 α 的终边按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$,交单位圆于点 B. 记 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

(1)若 $x_1=\frac{1}{3}$,求 x_2;

(2)分别过 A,B 作 x 轴的垂线,垂足依次为 C,D. 记△AOC 的面积为 S_1,△BOD 的面积为 S_2. 若 $S_1=2S_2$,求角 α 的值.

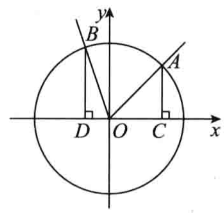

图 1-9

第五章　解三角形

知识点与方法

解三角形中常见结论.

(1)三角形中正弦、余弦、正切满足的关系式:$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$,$a>b\Leftrightarrow A>B\Leftrightarrow\sin A>\sin B\Leftrightarrow\cos A<\cos B$.

(2)三角形形状判断(一般用余弦定理):

直角三角形$\Leftrightarrow a^2+b^2=c^2$;锐角三角形$\Leftrightarrow a^2+b^2>c^2$($c$ 为最大边);钝角三角形$\Leftrightarrow a^2+b^2<c^2$($c$ 为最大边).

(3)在锐角三角形 ABC 中:

①$A+B>\frac{\pi}{2}$,$C+B>\frac{\pi}{2}$,$A+C>\frac{\pi}{2}$;

②任意角的正弦值都大于其他角的余弦值.

(4)在△ABC 中,A,B,C 成等差数列$\Leftrightarrow B=60°$;在△ABC 中,A,B,C 成等差数列,且 a,b,c 成等比数列$\Leftrightarrow$三角形为等边三角形.

查漏补缺

解三角形是高考重点考查内容,在选择题、填空题和解答题中都有涉及,其中求角、求边、边角互化、判定三角形形状以及最值(或范围)问题为主要考点

例23　(1)在△ABC 中,$b=1$,$c=\sqrt{3}$,$C=\frac{2\pi}{3}$,则①$a=$________;②$B=$________.

(2)在△ABC 中,若 $a=2$,$b+c=7$,$\cos B=-\frac{1}{4}$,则 $b=$________.

变式 1　在△ABC 中,$a=3$,$b=2\sqrt{6}$,$B=2A$.

(1)求 $\cos A$ 的值;