俄罗斯数学精品译丛

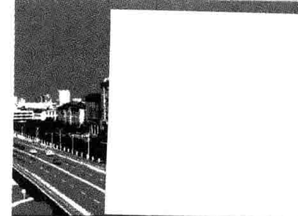
"十二五"国家重点图书

The Basic of Markov Processes

马尔科夫过程论基础

[苏联] 邓肯 著　　王梓坤 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

马尔科夫过程论基础

The Basic of Markov Processes

[苏联] 邓肯 著

王梓坤 译

HITP

哈尔滨工业大学出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

近年来，由于马尔科夫过程论的迅速发展，要求重新批判地考察理论的基础. 不把马尔科夫过程看成具有某些特性的随机函数，而把它看成一整族彼此联系的对应于各种开始条件的随机函数的必要性，以及研究在随机时刻内中断的过程的必要性. 出现了一系列新的概念，特别是强马尔科夫过程的概念. 在这个概念中，无后效性的原则比通常理解的更为广泛. 此外还有已给过程的子过程概念等等.

在世界数学文献中，本书第一次系统地建立了包含这一整套问题的马尔科夫过程的一般理论，也研究了马尔科夫过程轨道的有界性以及(在某种意义下的)连续性.

本书可推荐给概率论专门化以及邻近学科的高年级学生、研究生和数学科学工作者.

图书在版编目(CIP)数据

马尔科夫过程论基础/(苏联)邓肯著;王梓坤译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2015.1

ISBN 978-7-5603-5091-2

Ⅰ.①马… Ⅱ.①邓…②王… Ⅲ.①马尔柯夫过程-研究 Ⅳ.①O211.62

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 298452 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　刘立娟
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 11.5　字数 213 千字
版　　次　2015 年 1 月第 1 版　2015 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5091-2
定　　价　28.00 元

◎ 序

本书的目的在于研究马尔科夫随机过程论的逻辑基础.

近年来,马尔科夫过程论迅速地发展着,已经研究过这些过程的轨道性质和无穷小算子,发现了轨道行径与对应于过程的微分方程性质间的深刻联系,这种联系不仅有利于马尔科夫过程的研究,而且对研究微分方程也是有益的. 这时,积累的资料要求重新批判地考察理论的基础. 特别地,发现了马尔科夫原则"无后效性"的一般定义不够充分,于是各作者便在不同的形式下,提出了更强的"强马尔科夫"原则. 也明确了研究对象自然地应该是这样的马尔科夫过程:它们可在某随机时刻中断. 所有这些与其他的概念,由各作者在不同的形式下引进,以适应于各篇专论的具体目的. 但当时所研究的几乎都是齐次(对时间)的马尔科夫过程.

本书中建立了包括非齐次过程的一般理论,把齐次过程看成重要的特殊情形. 已经知道,用人为的方法可以化非齐次马尔科夫过程为齐次的马尔科夫过程,但需过渡到更复杂的相空间上去①. 然而,这时所得到的齐次过程在某种意义下是退化的. 因此,这种转化并非经常合适,何况本质上马尔科夫过程的一般概念比齐次马尔科夫过程的概念更为原始. 对于齐次马尔科夫过程,存在标准的时间尺度. 对一般的过程则没有这样的尺度,一切定义相对于任意单调连续的时间变换必须是不变的.

视马尔科夫过程为特殊类型的随机函数的观点,对发展理论是不充分的.

---

① 见第4章§3.

事实上，在马尔科夫过程的研究中，一般涉及的不是一个概率测度，而是整整一族这样的测度，它们对应于一切可能的开始时刻与一切可能的开始状态．因此，涉及的不是一个随机函数，而是一整族这样的函数，它们以一定的方式彼此联系着．这是一个理由，它说明为什么马尔科夫过程论相对于随机过程的一般理论，应具有人所共知的独立性．在本书中，马尔科夫过程论的建立，不需要援引任何随机过程的一般理论．

本书不宜作为初次学习马尔科夫过程论的教本．虽然形式上我们不依靠任何概率论的预备知识，但本质上，阅读本书只能有益于已经熟悉初等马尔科夫过程论的读者．例如，已阅读过费勒（W. Feller）的教本《概率论及其应用引论》第一卷，或格涅坚科（Б. В. Гнеденко）的《概率论教程》的读者．

第1章绪论中包含测度论中必要的概念与定理的简述，证明可在其他教本中找到，这里从略．第2章中给出了马尔科夫过程的一般定义，并研究了一些运算，它们可用来考察对应于已给转移函数的马尔科夫过程类．更复杂的构造子过程的运算在第3章中研究，那里发现了马尔科夫过程的子过程与其轨道的可乘泛函间的关系，研究了最重要的可乘泛函类与子过程类．第4章研究了如何根据转移函数构造马尔科夫过程．第5章中考察了强马尔科夫过程的概念．最后，第6章用来研究对转移函数应加的条件，以使在这些条件下，在对应于此函数的各马尔科夫过程中，可以找到这样的过程：它的轨道具有某种连续性或有界性．在附录中叙述了肖凯（G. Choquet）的关于一般容度论的若干结果，并且从这些结果导出了初次跑出时刻的可测性定理．书末附记中载有历史与文献的注释．

与本书紧密相关的是准备付印的专著《马尔科夫过程的无穷小算子》，它研究马尔科夫过程的分类问题．这两本书应看成关于马尔科夫过程论的统一专著的两部分．

构成本书内容的材料，作者在莫斯科大学与北京大学一系列的报告和专门课程中简述过．作者感激听众所提出的许多意见，这些意见在最后校阅底稿时已被考虑过．

尤斯凯维奇（А. А. Юшкевич）仔细地阅读过底稿．他的批改帮助消除了许多不确切的与不明确的地方．我对他所做的大量工作表示衷心的感谢．

邓肯（Е. Б. Дынкин）
1958 年 7 月 4 日

◎ 目录

绪　论

第 1 章

§1　可测空间与可测映象

1. 1. 设 $\mathscr{M}$ 为某集 Ω 的子集系,满足下列条件:

1. 1. A₁. 如果 $A \in \mathscr{M}$,则 $\overline{A} \in \mathscr{M}$①.

1. 1. A₂. 如果 $A_i \in \mathscr{M}(i=1,2,\cdots)$,则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{M}$ 且 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{M}$.

这时我们说,子集系 $\mathscr{M}$ 是空间 Ω 中的 σ - 代数. 令 $\mathscr{C}$ 为空间 Ω 中的某一子集系,空间 Ω 中一切含 $\mathscr{C}$ 的 σ - 代数的交仍是 σ - 代数. 我们称它为 $\mathscr{C}$ 产生的 σ - 代数,并记为 $\sigma(\mathscr{C})$.

如果 $\mathscr{M}$ 为空间 Ω 中的 σ - 代数,又 $\widetilde{\Omega} \in \mathscr{M}$,则含于 $\widetilde{\Omega}$ 中的 $A \in \mathscr{M}$ 全体构成空间 $\widetilde{\Omega}$ 中的 σ - 代数. 我们记此 σ - 代数为 $\mathscr{M}[\widetilde{\Omega}]$.

我们称空间 Ω 的子集系 $\mathscr{C}$ 为 π - 系,如果:

1. 1. Б. 由 $A_1, A_2 \in \mathscr{C}$ 得 $A_1A_2 \in \mathscr{C}$ ②.

我们称族 $\mathscr{F}$ 为 λ - 系,如果它满足下列条件:

1. 1. B₁. $\Omega \in \mathscr{F}$.

1. 1. B₂. 如果 $A_1, A_2 \in \mathscr{F}$ 且 $A_1A_2 = \varnothing$③,则 $A_1 \cup A_2 \in \mathscr{F}$.

1. 1. B₃. 如果 $A_1, A_2 \in \mathscr{F}$ 且 $A_1 \supseteq A_2$,则 $A_1 \setminus A_2 \in \mathscr{F}$.

---

① 以 $\overline{A}$ 表示 A 在 Ω 中的补集,即 $\Omega \setminus A$.

② 我们将更多地用 AB 来记集 A 与 B 的交,有时也用记号 $A \cap B$ 及 $\{A, B\}$.

③ 记号 $\varnothing$ 表示空集.

1.1.B_4. 如果 $A_1,\cdots,A_n,\cdots\in\mathscr{F}$且 $A_n\uparrow A$①,则 $A\in\mathscr{F}$.

注意,如果某集系 $\mathscr{M}$ 同时既是 π - 系又是 λ - 系,则它是 σ - 代数. 实际上,由 1.1.B_1 及 1.1.B_3 推得 1.1.A_1. 再由关系式 $A\cup B=A\cup(B\backslash AB)$及性质 1.1.Б,1.1.$\mathrm{B}_3$ 及 1.1.B_2 可知,如果 $A,B\in\mathscr{M}$,则 $A\cup B=A\cup(B\backslash AB)\in\mathscr{M}$. 因此,如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{M}$,则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\in\mathscr{M}$. 今设 $A_n\in\mathscr{M}(n=1,2,\cdots)$,则 $A_n'=\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k\in\mathscr{M}$. 既然 $A_n'\uparrow\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$,故由 1.1.$\mathrm{B}_4$,$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{M}$. 由关系式

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n}$$

得 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{M}$. 因此条件 1.1.$\mathrm{A}_2$ 满足.

引理 1.1 如果 λ - 系 $\mathscr{F}$ 包含 π - 系 $\mathscr{C}$,则 $\mathscr{F}$ 包含 $\sigma(\mathscr{C})$.

证 一切含 π - 系 $\mathscr{C}$的 λ - 系的交 $\mathscr{F}'$,显然是 λ - 系. 今证此交同时又是 π - 系. 由此立得引理的结论.

容易看出,对一切 $B\in\mathscr{C}$,使 $AB\in\mathscr{F}'$的集 A 所成的总体 $\mathscr{F}_1$是 λ - 系. 既然 $\mathscr{F}_1\supseteq\mathscr{C}$,故 $\mathscr{F}_1\supseteq\mathscr{F}'$. 这表示如果 $A\in\mathscr{F}'$,$B\in\mathscr{C}$,则 $AB\in\mathscr{F}'$.

现在令 $B\in\mathscr{F}_2$,如果 $BA\in\mathscr{F}'$对一切 $A\in\mathscr{F}'$成立,易见 $\mathscr{F}_2$是 λ - 系. 如上所证 $\mathscr{F}_2\supseteq\mathscr{C}$,因此 $\mathscr{F}_2\supseteq\mathscr{F}'$. 这表示如果 $A,B\in\mathscr{F}'$,则 $AB\in\mathscr{F}'$. 从而 $\mathscr{F}'$是 π - 系.

1.2. 由某集 Ω 及此集的子集 σ - 代数 $\mathscr{A}$ 所组成的对偶$(\Omega,\mathscr{A})$,称为可测空间.

可测空间的重要例子是空间$(I_t^s,\mathscr{B}_t^s)$,这里 $I_t^s=[s,t]$是数线段,而 $\mathscr{B}_t^s$是此线段的子集 σ - 代数,它由 I_t^s中一切区间产生. s 及 t 可取无穷值,并且我们认为 $I_{+\infty}^{-\infty}=(-\infty,+\infty)$,$I_t^{-\infty}=(-\infty,t)$,$I_{+\infty}^{s}=[s,+\infty)$.

设$(\Omega_1,\mathscr{A}_1)$及$(\Omega_2,\mathscr{A}_2)$为两个可测空间. 空间 Ω_1 到 Ω_2 的映象② α 称为可测的,如果 $\mathscr{A}_2$ 中任一集的完全原象属于 $\mathscr{A}_1$. 当映象只定义在子集 $\widetilde{\Omega}_1\subset\Omega_1$ 时,这个定义仍被采用.

我们指出,如果 $\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{A}_2$,则为使映象 α 是可测的,只需 $\mathscr{C}$ 中任一集的

---

① 记号 $A_n\uparrow A$ 表示 $A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_n\subseteq\cdots$,且 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 类似地,记号 $A_n\downarrow A$ 表示 $A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots\supseteq A_n\supseteq\cdots$,且 $A=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

② 请注意"Ω_1 到 Ω_2 的映象"与以后的"Ω_1 到 Ω_2 上的映象"不同. 前者有时也称为"Ω_1 到 Ω_2 中的映象". ——译者注

完全原象属于 $\mathscr{A}_1$，而且 $\Omega_2=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}C_n$，这里 $C_n\in\mathscr{C}$（为证此结果，只要注意完全原象属于 $\mathscr{A}_1$ 的集构成 Ω_2 中的 σ－代数）.

显然，如果 α 是 $(\Omega_1,\mathscr{A}_1)$ 到 $(\Omega_2,\mathscr{A}_2)$ 的可测映象，β 是 $(\Omega_2,\mathscr{A}_2)$ 到 $(\Omega_3,\mathscr{A}_3)$ 的可测映象，则 $\beta\alpha$ 是 $(\Omega_1,\mathscr{A}_1)$ 到 $(\Omega_3,\mathscr{A}_3)$ 的可测映象，只要 β 的定义域包含 $\alpha(\Omega_1)$.

映象最重要的特殊情况是函数，即到数直线 $I_{+\infty}^{-\infty}$ 中的映象. 设 $\mathscr{A}$ 是 Ω 的子集 σ－代数. 我们说，函数 $\xi(\omega)$ $(\omega\in\Omega)$ 关于 $\mathscr{A}$ 可测，或 $\mathscr{A}$－可测，如果它所决定的 $(\Omega,\mathscr{A})$ 到 $(I_{+\infty}^{-\infty},\mathscr{B}_{+\infty}^{-\infty})$ 的映象可测，即如果对任意的 $\Gamma\in\mathscr{B}_{+\infty}^{-\infty}$

$$\{\omega:\xi(\omega)\in\Gamma\}\in\mathscr{A}$$

既然诸区间 $(t,+\infty)$ 产生 σ－代数 $\mathscr{B}_{+\infty}^{-\infty}$，故为使函数 $\xi(\omega)$ $\mathscr{A}$－可测，只需对任意的 t

$$\{\omega:\xi(\omega)>t\}\in\mathscr{A}$$

函数的 $\mathscr{A}$－可测性的概念可自动地推广到下述情形：集系 $\mathscr{A}$ 不是在全空间 Ω 中，而是在此空间的某子集 $\widetilde{\Omega}$ 内的 σ－代数. 容易看出，这时任意的 $\mathscr{A}$－可测函数 ξ 的定义域重合于 $\widetilde{\Omega}$.

设 $\mathscr{L}$ 为 Ω 上某函数系，它满足条件：

1.2.A. 如果 $\xi\in\mathscr{L}$ 且

$$\eta(\omega)=\begin{cases}\xi(\omega) & (\text{当 }\xi(\omega)\geqslant 0\text{ 时})\\ 0 & (\text{当 }\xi(\omega)<0\text{ 时})\end{cases}$$

则 η 及 $\xi-\eta$ 属于 $\mathscr{L}$.

函数系 $\mathscr{H}$ 称为 $\mathscr{L}$－系，如果满足以下诸条件：

1.2.Б$_1$. $1\in\mathscr{H}$.

1.2.Б$_2$. $\mathscr{H}$ 中任意两函数的线性组合也属于 $\mathscr{H}$.

1.2.Б$_3$. 如果 $\xi_n\in\mathscr{H}$，$0\leqslant\xi_n(\omega)\uparrow\xi(\omega)$①，且 $\xi(\omega)$ 有界或属于 $\mathscr{L}$，则 $\xi\in\mathscr{H}$.

引理 1.2 如果 $\mathscr{L}$－系 $\mathscr{H}$ 包含 π－系 $\mathscr{C}$ 中一切集的示性函数②，则 $\mathscr{H}$ 包

---

① 如果 $a_n\to a$ 且 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots$，则记作 $a_n\uparrow a$. 同样，记号 $a_n\downarrow a$ 表示 $a_n\to a$，而且 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant\cdots$

② 我们称函数

$$\chi_A(\omega)=\begin{cases}1 & (\text{如果 }\omega\in A)\\ 0 & (\text{如果 }\omega\,\overline{\in}\,A)\end{cases}$$

为集 A 的示性函数（或特征函数）.

含 $\mathscr{L}$ 中一切关于 $\sigma(\mathscr{C})$ - 可测的函数.

证 具有属于 $\mathscr{H}$ 的示性函数的集构成 λ - 系 $\mathscr{F}$. 既然 $\mathscr{F} \supseteq \mathscr{C}$,故由引理 1.1,$\mathscr{F} \supseteq \sigma(\mathscr{C})$.

设 ξ 为属于 $\mathscr{L}$ 而且关于 $\sigma(\mathscr{C})$ - 可测的非负函数. 令

$$\Gamma_{k^n} = \left\{ \frac{k}{2^n} \leqslant \xi(\omega) < \frac{k+1}{2^n} \right\}$$

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{2^{2n}} \frac{k}{2^n} \chi_{\Gamma_{kn}}$$

显然,$0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$,且由 1.2. Б$_3$,$\xi \in \mathscr{H}$.

由于 1.2. A,任意 $\sigma(\mathscr{C})$ - 可测函数 $\eta \in \mathscr{L}$ 可表为 $\mathscr{L}$ 中两非负 $\sigma(\mathscr{C})$ - 可测函数之差. 如上所证,后两者均属于 $\mathscr{H}$. 因此 $\eta \in \mathscr{H}$.

1.3. 令 $\mathscr{A}_i$ 为集 Ω_i 的子集 σ - 代数$(i = 1, 2, \cdots, n)$. 我们以 $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ 表示全体$(\omega_1, \cdots, \omega_n)$,其中 $\omega_i \in \Omega_i$. 又以 $\mathscr{A}_1 \times \cdots \times \mathscr{A}_n$ 表示由形如 $A_1 \times \cdots \times A_n, A_i \in \mathscr{A}_i$ 的诸子集所产生的 σ - 代数(我们指出,诸集 $A_1 \times \cdots \times A_n$ 组成 π - 系). 当 $\Omega_1 = \cdots = \Omega_n = \Omega$ 时,我们用 Ω^n 代替 $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$;当 $\mathscr{A}_1 = \cdots = \mathscr{A}_n = \mathscr{A}$ 时,以 $\mathscr{A}^n$ 代替 $\mathscr{A}_1 \times \cdots \times \mathscr{A}_n$.

今设已给空间 Ω_i 的无穷序列,以及每个空间 Ω_i 中的子集 σ - 代数 $\mathscr{A}_i$. 我们以 $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n \times \cdots$ 表示序列$(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots)$,$\omega_i \in \Omega_i$ 所成的空间,以 $\mathscr{A}_1 \times \cdots \times \mathscr{A}_n \times \cdots$ 表示此空间中由子集

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times \cdots \qquad (1.1)$$
$$(n = 1, 2, \cdots; A_i \in \mathscr{A}_i)$$

所产生的 σ - 代数.

当因子均相同时,缩写为 Ω^∞ 及 $\mathscr{A}^\infty$. 我们指出,形如(1.1)的子集全体是 π - 系.

引理 1.3 令 α_i 为$(\Omega, \mathscr{A})$到$(\Omega_i, \mathscr{A}_i)$的可测映象($i$ 或取值 $1, 2, \cdots, n$,或取一切自然数),则由公式

$$\alpha(\omega) = \{\alpha_1(\omega), \alpha_2(\omega), \cdots\}$$

所定义的空间$(\Omega, \mathscr{A})$到$(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots, \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \times \cdots)$的映象 α 是可测的.

证 设 i 取一切自然数为值. 在 $\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \times \cdots$ 中,映象 α 下,完全原象属于 $\mathscr{A}$ 的集合的总体显然是 σ - 代数. 这个 σ - 代数包含一切形如(1.1)的集,因此它包含 $\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \times \cdots$

引理 1.4 设 $\mathscr{A}_i$ 是空间 Ω_i $(i = 1, 2)$ 的子集 σ - 代数,$f(\omega_1, \omega_2)$ $(\omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2)$是 $\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2$ - 可测函数,则对任意固定的 $\omega_2 \in \Omega_2$,$f(\omega_1, \omega_2)$ 是 ω_1 的 $\mathscr{A}_1$ - 可测函数.

证 以 $\mathscr{L}$ 表示空间 $\Omega_1\times\Omega_2$ 上所有的函数全体. 使引理正确的全体函数 $f(\omega_1,\omega_2)$ 所成的系 $\mathscr{H}$ 显然是 $\mathscr{L}$ - 系. 此系包含任意集 $A_1\times A_2$ 的示性函数. 根据引理 1.2, 它包含一切关于 σ - 代数 $\mathscr{A}_1\times\mathscr{A}_2$ 可测的函数.

引理 1.5 设对应于某集 T 中每一个 t, 有一取值于可测空间 $(E,\mathscr{B})$ 的函数 $x_t(\omega)(\omega\in\Omega)$. 为使函数 $\xi(\omega)(\omega\in\Omega)$ 关于由集 $\{\omega:x_t(\omega)\in\Gamma\}(t\in T,\Gamma\in\mathscr{B})$ 所产生的 σ - 代数 $\mathscr{N}_T$ 可测, 必须且只需

$$\xi(\omega)=f[x_{t_1}(\omega),x_{t_2}(\omega),\cdots,x_{t_n}(\omega),\cdots] \tag{1.2}$$

其中 $t_1,t_2,\cdots,t_n,\cdots\in T$, 而且 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ 是空间 E^∞ 中的 $\mathscr{B}^\infty$ - 可测函数.

证 由公式(1.2)定义的 Ω 到数直线 $I_{+\infty}^{-\infty}=(-\infty,+\infty)$ 的映象可表示为乘积 $f\alpha$, 其中

$$\alpha(\omega)=\{x_{t_1}(\omega),x_{t_2}(\omega),\cdots,x_{t_n}(\omega),\cdots\}$$

对任意的 $t\in T$, $x_t(\omega)$ 确定一个 $(\Omega,\mathscr{N}_T)$ 到 $(E,\mathscr{B})$ 的可测映象. 由引理 1.3, α 是 $(\Omega,\mathscr{N}_T)$ 到 $(E^\infty,\mathscr{B}^\infty)$ 的可测映象. 由条件知, f 决定 $(E^\infty,\mathscr{B}^\infty)$ 到 $(I_{+\infty}^{-\infty},\mathscr{B}_{+\infty}^{-\infty})$ 的可测映象. 因此 $\xi=f\alpha$ 是 $(\Omega,\mathscr{N}_T)$ 到 $(I_{+\infty}^{-\infty},\mathscr{B}_{+\infty}^{-\infty})$ 的可测映象, 从而形为(1.2)的一切函数为 $\mathscr{N}_T$ - 可测.

今以 $\mathscr{L}$ 表示全体函数 $\xi(\omega)(\omega\in\Omega)$, $\mathscr{H}$ 表示形为(1.2)的函数 ξ 的集, 又 $\mathscr{C}$ 表示形为

$$\{x_{t_1}\in\Gamma_1,\cdots,x_{t_n}\in\Gamma_n\} \tag{1.3}$$

$$(n=1,2,\cdots;t_1,\cdots,t_n\in T;\Gamma_1,\cdots,\Gamma_n\in\mathscr{B})$$

的全体 ω - 集所成的集系.

集(1.3)的示性函数等于

$$\chi_{\Gamma_1}[x_{t_1}(\omega)]\cdots\chi_{\Gamma_n}[x_{t_n}(\omega)]$$

因此, 它可表示为(1.2)的形式, 且属于 $\mathscr{H}$. 显然, $\mathscr{H}$ 是 $\mathscr{L}$ - 系, 而 $\mathscr{C}$ 是 π - 系, 故由定理 1.2, $\mathscr{H}$ 包含一切关于 $\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{N}_T$ 可测的函数 $\xi(\omega)$.

§2 测度与积分

1.4. 设 $(\Omega,\mathscr{M})$ 为某可测空间. 非负函数 $\varphi(A)(A\in\mathscr{M})$ 称为测度①, 如果

① 1.4 小节中的一切定义与论断都适用于当函数 $\varphi(A)$ 除取有限值外, 还取 $+\infty$ 为值的情形(特别地, 无穷直线上的普通勒贝格测度便是这种函数). 然而, 我们只会在一些特殊例子中碰到这类函数. 因此, 凡未特别声明的地方, 测度 φ 都将理解为只取有限值的函数.

对 $\mathscr{M}$ 中任意有限或可数多个两两不相交的集 $A_1, A_2, \cdots, \varphi(\cup A_k) = \sum \varphi(A_k)$，满足条件 $\varphi(\Omega) = 1$ 的测度称为概率测度.

设 φ 为 σ－代数 $\mathscr{M}$ 上的测度. 令 f 为定义在空间 Ω 的某子集 Ω_f 上的 $\mathscr{M}$－可测函数，又设 A 含于 Ω_f. 我们说，f 在集 A 上 φ－可积，如果存在有限极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{n}\varphi\left\{\omega:\omega\in A,\frac{k}{n}<f(\omega)\leqslant\frac{k+1}{n}\right\}$$

及

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{-\infty}\frac{k+1}{n}\varphi\left\{\omega:\omega\in A,\frac{k}{n}<f(\omega)\leqslant\frac{k+1}{n}\right\}\text{①}$$

这些极限的和称为函数 f 在集 A 上按测度 φ 的积分（勒贝格），并记为

$$\int_A f(\omega)\varphi(\mathrm{d}\omega)$$

以上两个极限中有一个为无穷，而另一个为有穷，则认为积分值是 $\pm\infty$（第一个极限为无穷时取积分值 $+\infty$，第二个极限为无穷时取积分值 $-\infty$）.

我们假定读者已熟悉勒贝格积分的基本性质. 特别地，下列性质今后会起重要作用：

1.4. A. 如果 $0\leqslant f_n(\omega)\uparrow f(\omega)$ 对一切 $\omega\in A$ 成立，则

$$\lim\int_A f_n(\omega)\varphi(\mathrm{d}\omega) = \int_A f(\omega)\varphi(\mathrm{d}\omega) \tag{1.4}$$

1.4. Б. 如果对一切 $\omega\in A, f_n(\omega)\to f(\omega)$，$|f_n(\omega)| < g(\omega)$ 且 g 在 A 上 φ－可积，则

$$\lim\int_A f_n(\omega)\varphi(\mathrm{d}\omega) = \int_A f(\omega)\varphi(\mathrm{d}\omega) \tag{1.5}$$

1.4. B.（富比尼定理）令 $\mathscr{M}_i$ 为 Ω_i 中的 σ－代数，φ_i 是 $\mathscr{M}_i$ 上的测度（$i = 1,2$）. 设 $f(\omega_1,\omega_2)$ 是 $\Omega_1\times\Omega_2$ 上 $\mathscr{M}_1\times\mathscr{M}_2$－可测函数，且

$$\int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2}|f(\omega_1,\omega_2)|\varphi_2(\mathrm{d}\omega_2)\right]\varphi_1(\mathrm{d}\omega_1) < \infty$$

则

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2}f(\omega_1,\omega_2)\varphi_2(\mathrm{d}\omega_2)\right]\varphi_1(\mathrm{d}\omega_1) = \\ &\int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1}f(\omega_1,\omega_2)\varphi_1(\mathrm{d}\omega_1)\right]\varphi_2(\mathrm{d}\omega_2)\text{②}\end{aligned} \tag{1.6}$$

---

① 当说到 φ－可积函数而未指出集 A 时，则是指在全定义域上的 φ－可积函数.

② 如果 f 非负，则要求等式(1.6)中左方积分的绝对收敛性条件是多余的.

下面的性质是 1.4.A 的特殊情形:

1.4.A$_1$. 如果 $A_n \uparrow A$,则 $\varphi(A_n) \uparrow \varphi(A)$.

1.5. 试证以下两个有用的引理.

引理 1.6　设 α 为$(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$到$(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$的可测映象,又 φ 是 $\mathscr{A}_1$ 上的测度,则公式

$$\psi(\Gamma) = \varphi\{\alpha(\omega) \in \Gamma\} \quad (\Gamma \in \mathscr{A}_2) \tag{1.7}$$

定义 $\mathscr{A}_2$ 上一测度. 对任意 $\mathscr{A}_2$ - 可测函数 f

$$\int_{\Omega_2} f(\omega_2)\psi(\mathrm{d}\omega_2) = \int_{\Omega_1} f[\alpha(\omega_1)]\varphi(\mathrm{d}\omega_1) \tag{1.8}$$

(更精确些,如果这两个积分中至少有一个存在,则另一个也存在,且两个积分相等).

证　引理的第一个结论是显然的.

以 $\mathscr{L}$ 表示一切 ψ - 可积函数的总体. 显然,使等式(1.8)成立的全体函数构成 $\mathscr{L}$ - 系. 此系包含 $\mathscr{A}_2$ 中任一集的示性函数. 由引理 1.2,它包含 $\mathscr{L}$ 中一切 $\mathscr{A}_2$ - 可测函数. 因此, 如果对 f, 等式(1.8)左方的积分存在,则 f 满足等式(1.8). 同样验证,等式(1.8)对任意使(1.8)右方的积分存在的函数 f 成立.

引理 1.7　设 U,V,Z 为三个空间,$\mathscr{A}_U, \mathscr{A}_V, \mathscr{A}_Z$ 为这些空间的子集 σ - 代数,$F(u,z)(u \in U, z \in Z)$ 为关于 $\mathscr{A}_U \times \mathscr{A}_Z$ 可测的函数,$P_v(v \in V)$ 是 σ - 代数 $\mathscr{A}_Z$ 上的测度,并且对任意 $\Gamma \in \mathscr{A}_Z$,函数 $P_v(\Gamma)$ 为 $\mathscr{A}_V$ - 可测. 如果积分

$$G(u,v) = \int_Z F(u,z)P_v(\mathrm{d}z) \tag{1.9}$$

对一切 $u \in U, v \in V$ 收敛,则它是 $\mathscr{A}_U \times \mathscr{A}_V$ - 可测函数①.

证　以 $\mathscr{L}$ 表示全体使积分 $\int_Z F(u,z)P_v(\mathrm{d}z)$ 对一切 $u \in U, v \in V$ 收敛的 $\mathscr{A}_U \times \mathscr{A}_V$ - 可测函数 $F(u,z)$. 使 $G(u,v)$ 为 $\mathscr{A}_U \times \mathscr{A}_V$ - 可测的全体函数 $F(u,z)$ 的系 $\mathscr{H}$ 显然是 $\mathscr{L}$ - 系,它包含任意集 $A_U \times A_Z(A_U \in \mathscr{A}_U, A_Z \in \mathscr{A}_Z)$ 的示性函数. 因为这些集构成 π - 系,故由引理 1.2,$\mathscr{H}$ 包含 $\mathscr{L}$ 中一切 $\mathscr{A}_U \times \mathscr{A}_Z$ - 可测函数.

§3　条件概率与条件数学期望

1.6. 总体$(\Omega, \mathscr{M}, P)$称为概率空间,其中 Ω 为某集,$\mathscr{M}$ 为它的子集 σ - 代

---

①　如果函数 F 非负,则要求积分的收敛是多余的.

数，P 为 $\mathscr{M}$ 上的概率测度. Ω 中的点称为基本事件，$\mathscr{M}$ 中的元称为事件，值 $P(A)$ 称为事件的概率. 每一 $\mathscr{M}$ - 可测函数 $\xi(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ 称为随机变量. 积分 $\int_{\Omega} \xi(\omega) P(\mathrm{d}\omega)$（如果它有意义）称为 ξ 的数学期望，并记为 $M\xi$. 不是定义在全空间 Ω 上，而只是定义在它的子集 Ω_{ξ} 上的 $\mathscr{M}$ - 可测函数 ξ，我们也称为随机变量（由 ξ 的 $\mathscr{M}$ - 可测性得 $\Omega_{\xi} \in \mathscr{M}$）. 这种随机变量的数学期望定义为

$$M\xi = \int_{\Omega_{\xi}} \xi(\omega) P(\mathrm{d}\omega)$$

设 $\widetilde{\Omega} \subseteq \Omega$ 且 $\varphi(\omega)$ 及 $\psi(\omega)$ 为两个函数，它们的定义域包含 $\widetilde{\Omega}$. 如果 $P(\widetilde{\Omega}, \varphi \neq \psi) = 0$，则我们说 $\varphi = \psi$ 在 $\widetilde{\Omega}$ 上几乎正确（在测度 P 的意义下），并写成

$$\varphi = \psi \quad (\text{п. н.}\ \widetilde{\Omega}, P)$$

表达式

$$\varphi < \psi \quad (\text{п. н.}\ \widetilde{\Omega}, P), \varphi_n \to \varphi \quad (\text{п. н.}\ \widetilde{\Omega}, P)$$

等的意义都类似.

设 $\mathscr{A}$ 为 $\widetilde{\Omega} \subseteq \Omega$ 中的 σ - 代数，并且 $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{M}$. 又设函数 $\xi(\omega)$ 在集 $\widetilde{\Omega}$ 上为 P - 可积，我们定义 ξ 关于 $\mathscr{A}$ 的条件数学期望为如下的任意 $\mathscr{A}$ - 可测函数（记为 $M(\xi \mid \mathscr{A})$），它对任一 $A \in \mathscr{A}$，满足关系式

$$\int_A \xi(\omega) P(\mathrm{d}\omega) = \int_A M(\xi \mid \mathscr{A}) P(\mathrm{d}\omega) \tag{1.10}$$

可以证明，这样的函数恒存在. 容易看到，除 σ - 代数 $\mathscr{A}$ 中任意有 P - 测度为 0 的集外，它被确定. 既然从等式 $M(\xi \mid \mathscr{A}) = \varphi$ 及 $M(\xi \mid \mathscr{A}) = \psi$ 尚不能断定 $\varphi(\omega) = \psi(\omega)$ 对一切 ω 成立，而只能有 $\varphi = \psi(\text{п. н.}\ \widetilde{\Omega}, P)$ 的结论，故为避免自相矛盾，我们不写成 $M(\xi \mid \mathscr{A}) = \varphi$，而记成 $M(\xi \mid \mathscr{A}) = \varphi(\text{п. н.}\ \widetilde{\Omega}, P)$.

顺便指出，函数 ξ 在 $\widetilde{\Omega}$ 外的值对函数 $M(\xi \mid \mathscr{A})$ 没有任何影响.

如果 $B \in \mathscr{M}$，则示性函数 $\chi_B(\omega)$ 是 $\mathscr{M}$ - 可测函数. 我们称函数 $M(\chi_B \mid \mathscr{A})$ 为事件 B 关于 σ - 代数 $\mathscr{A}$ 的条件概率，并记为 $P(B \mid \mathscr{A})$. 这个函数也可表示为如下的 $\mathscr{A}$ - 可测函数，它对任意 $A \in \mathscr{A}$，满足关系式

$$P(AB) = \int_A P(B \mid \mathscr{A}) P(\mathrm{d}\omega) \tag{1.11}$$

（它除 $\mathscr{A}$ 中 P - 测度为 0 的 ω - 集外被确定）.

现在举几个例子①.

1.6.1. 令 $\mathscr{A}_0$ 为含两个元的 σ - 代数:空集 $\varnothing$ 及全空间 Ω. 这时一切 $\mathscr{A}_0$ - 可测函数只能是常数. 再于关系式(1.10)中令 $A=\Omega$,我们便得

$$M(\xi \mid \mathscr{A}_0)=M\xi$$

1.6.2. 令 $A\in\mathscr{M}$,并设 $0<P(A)<1$. 四集 $\{0,A,\bar{A},\Omega\}$ 构成 σ - 代数 $\mathscr{A}$. 我们有

$$M(\xi \mid \mathscr{A})=\begin{cases}\dfrac{1}{P(A)}\displaystyle\int_A \xi(\omega)P(\mathrm{d}\omega) & (\text{对 } \omega\in A)\\ \dfrac{1}{P(\bar{A})}\displaystyle\int_{\bar{A}} \xi(\omega)P(\mathrm{d}\omega) & (\text{对 } \omega\in \bar{A})\end{cases}$$

$$P(B \mid \mathscr{A})=\begin{cases}\dfrac{P(BA)}{P(A)} & (\text{对 } \omega\in A)\\ \dfrac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})} & (\text{对 } \omega\in \bar{A})\end{cases}$$

这些公式建立了关于某 σ - 代数的条件数学期望与条件概率的一般概念,与在出现了某事件 A 的条件下,众所周知的数学期望与概率的初等概念间的联系.

现在来推导条件数学期望与条件概率的一些基本性质. 在这些性质的陈述中,$\mathscr{A}$ 表示 $\tilde{\Omega}\subseteq\Omega$ 中的 σ - 代数,并假定 $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{M}$.

1.6.A. 如果 ξ 为 $\mathscr{A}$ - 可测,且在 $\tilde{\Omega}$ 上 P - 可积,则

$$M(\xi \mid \mathscr{A})=\xi \quad (\text{п. н. } \tilde{\Omega},P)$$

1.6.A$_1$. 对任一常数 c

$$M(c \mid \mathscr{A})=c \quad (\text{п. н. } \tilde{\Omega},P)$$

1.6.Б. 如果 ξ 及 η 在 $\tilde{\Omega}$ 上 P - 可积,且

$$\xi\geqslant\eta \quad (\text{п. н. } \tilde{\Omega},P) \tag{1.12}$$

则

$$M(\xi \mid \mathscr{A})\geqslant M(\eta \mid \mathscr{A}) \quad (\text{п. н. } \tilde{\Omega},P) \tag{1.13}$$

1.6.Б$_1$. 对每一 $A\in\mathscr{M}$

$$0\leqslant P(A \mid \mathscr{A})\leqslant 1 \quad (\text{п. н. } \tilde{\Omega},P) \tag{1.14}$$

---

① 在例 1.6.1 及 1.6.2 中,σ - 代数 $\mathscr{A}$ 不包含非空的测度为 0 的集,因此对任意 ξ,函数 $P(\xi \mid \mathscr{A})$ 唯一确定.

如果 $P(\widetilde{\Omega}\backslash A\widetilde{\Omega})=0$,则

$$P(A|\mathscr{A})=1 \quad (\text{п. н.}\ \widetilde{\Omega},P) \tag{1.15}$$

1.6. В. 如果 ξ_1 及 ξ_2 在 $\widetilde{\Omega}$ 上 P – 可积,c_1 及 c_2 为两个任意常数,则

$$M(c_1\xi_1+c_2\xi_2|\mathscr{A})=c_1M(\xi_1|\mathscr{A})+c_2M(\xi_2|\mathscr{A}) \quad (\text{п. н.}\ \widetilde{\Omega},P)$$

1.6. Г. 如果 ξ 在 $\widetilde{\Omega}$ 上 P – 可积,且

$$0\leqslant\xi_n\uparrow\xi \quad (\text{п. н.}\ \widetilde{\Omega},P)$$

则

$$M(\xi_n|\mathscr{A})\uparrow M(\xi|\mathscr{A}) \quad (\text{п. н.}\ \widetilde{\Omega},P)$$

1.6. Γ_1. 如果 $A_n\uparrow A$,则

$$P(A_n|\mathscr{A})\uparrow P(A|\mathscr{A}) \quad (\text{п. н.}\ \widetilde{\Omega},P)$$

1.6. Д. 如果 η 在 $\widetilde{\Omega}$ 上 P – 可积,且

$$|\xi_1|\leqslant\eta,\cdots,|\xi_n|\leqslant\eta,\cdots;\xi_n\to\xi \quad (\text{п. н.}\ \widetilde{\Omega},P)$$

则

$$M(\xi_n|\mathscr{A})\to M(\xi|\mathscr{A}) \quad (\text{п. н.}\ \widetilde{\Omega},P)$$

1.6. Е. 如果 $\xi\eta$ 及 η 在 $\widetilde{\Omega}$ 上 P – 可积,且 ξ 为 $\mathscr{A}$ – 可测,则

$$M(\xi\eta|\mathscr{A})=\xi M(\eta|\mathscr{A}) \quad (\text{п. н.}\ \widetilde{\Omega},P)$$

1.6. Ж. 设 $\Omega\supseteq\widetilde{\Omega}_1\supseteq\widetilde{\Omega}_2$,$\mathscr{A}_1$ 为 $\widetilde{\Omega}_1$ 中的 σ – 代数,$\mathscr{A}_2$ 为 $\widetilde{\Omega}_2$ 中的 σ – 代数,且 $\mathscr{A}_1\subseteq\mathscr{M}$,$\mathscr{A}_2\subseteq\mathscr{M}$,又 $A_1\widetilde{\Omega}_2\in\mathscr{A}_2$ 对一切的 $A_1\in\mathscr{A}_1$ 成立①. 如果函数 $\xi\eta$ 及 η 在 $\widetilde{\Omega}_2$ 上 P – 可积,函数 ξ 在 $\widetilde{\Omega}_1\backslash\widetilde{\Omega}_2$ 上等于零,并在 $\widetilde{\Omega}_2$ 上派生一 $\mathscr{A}_2$ – 可测函数,则

$$M(\xi\eta|\mathscr{A}_1)=M(\xi M(\eta|\mathscr{A}_2)|\mathscr{A}_1) \quad (\text{п. н.}\ \widetilde{\Omega}_1,P)^{②} \tag{1.16}$$

如果 $A\in\mathscr{A}_2$,$B\in\mathscr{M}$,则

---

① 此即 $\mathscr{A}_1[\widetilde{\Omega}_2]\subseteq\mathscr{A}_2$,当 $\widetilde{\Omega}_1=\widetilde{\Omega}_2$ 时,这要求化为更简单的条件

$$\mathscr{A}_1\subseteq\mathscr{A}_2$$

② 在乘积 $\xi M(\eta|\mathscr{A}_2)$ 中,$\widetilde{\Omega}_1\backslash\widetilde{\Omega}_2$ 上,第一个因子等于零,而第二个因子无定义. 我们认为,乘积在 $\widetilde{\Omega}_1\backslash\widetilde{\Omega}_2$ 上有定义,并且等于零.