数学建模及其软件实现

王玉英　主编 / 史加荣　王建国　鲁萍　副主编

MATLAB

LINGO

SPSS

清华大学出版社

数学建模及其软件实现

王玉英　主编　/　史加荣　王建国　鲁萍　副主编

清华大学出版社
北　京

内容简介

本书将计算机应用能力培养和数学建模知识传授置于同等地位，根据具体问题选用 MATLAB 软件、SPSS 软件和 LINGO 软件对问题进行求解. 书中对于大部分问题都给出了软件求解方法及详细求解步骤，并对结果进行了分析.

全书共分 11 章，包括数学建模简介、数学规划模型、积分和微分方程模型、各种常用数据处理方法、图与网络模型分析和多属性决策分析等内容.

本书可作为本科生、研究生的数学建模课程和数学实验课程的教材，同时对于从事应用工作的工程技术人员也有一定的参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

数学建模及其软件实现/王玉英主编. --北京：清华大学出版社，2015

ISBN 978-7-302-38240-9

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①王…　Ⅲ. ①数学模型—建立模型—应用软件　Ⅳ. ①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 235144 号

责任编辑：陈　明
封面设计：傅瑞学
责任校对：王淑云
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：清华大学印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　**印　张**：18　　**字　　数**：387 千字
版　　次：2015 年 2 月第 1 版　　**印　　次**：2015 年 2 月第1 次印刷
印　　数：1～2500
定　　价：33.00 元

产品编号：059828-01

前言

FOREWORD

数学建模教学与竞赛活动现已成为各大院校正常教学工作中不可缺少的一部分. 数学建模培养了学生利用数学知识和计算机技术解决实际问题的能力,激发和锻炼了学生的创造意识和动手能力.

在大多数实际问题的数学建模过程中,数学知识和计算机应用能力缺一不可. 教学中我们发现,数学建模方面的教材很多,但多数都是以数学知识为主的,对于应用工具软件或者编写计算机程序求解模型方面涉及很少. 在数学建模和数学实验的课程教学中以及数学建模竞赛的培训过程中,我们迫切需要一本将计算机应用能力和数学知识放在同等地位的教材,由此萌发了本书的编写意图.

数学建模和实验中常用的软件为 MATLAB,但是随着信息技术的发展,在很多领域的应用中都需要用统计方法处理大量数据,因此为了培养学生解决实际问题的能力,本书中根据具体问题选用 MATLAB 和 SPSS 软件进行求解,个别问题也涉及了 LINGO 软件. 本书中对于大部分问题都给出了软件求解方法,给出详细求解步骤,并对实验结果进行了分析.

本书的编写人员既有长期从事数学建模和数学实验教学的数学专业教师,也有从事计算机软件开发和教学的计算机专业教师. 这些因素使得本书能够将计算机应用能力和数学知识的培养放在同等地位.

全书共分 11 章,第 1 章概况性地介绍了数学建模,第 2 章给出了数学规划模型和模型求解方法,第 3 章介绍了积分和微分方程模型. 第 4～9 章内容可以归结为数据处理,篇幅所限,这几章的例题中并没有给出大量数据的例子,但是对于每个例子,学生都可以按照书上的步骤使用软件进行操作. 第 10 章为图与网络模型分析,本章注重实际问题到图模型的转换. 第 11 章为多属性决策分析.

本书由王玉英担任主编,史加荣、王建国和鲁萍担任副主编. 第 1、2、11 章由史加荣执笔; 第 5～9 章由王玉英执笔; 第 3、4 章由王建国执笔,第 10 章和附录部分由鲁萍执笔. 以上只是一个框架性的分工,实际上每一部分内容都经过大家的讨论,都凝聚了大家的心血和劳动.

本书编写过程中参阅了许多专家和学者的论文论著,参阅了大量网上资源,限于篇幅,

恕不一一指明出处，在此一并向有关作者致以诚挚的谢意！

我们力图使本书成为具有创新性和实际应用价值的教材，成为一本能够激发读者学习兴趣、学以致用的教材，但由于编者水平有限，疏漏及不当之处难免，恳请有关专家和读者批评指正.

编 者

2014 年 10 月

目录

CONTENTS

第 1 章

绪　论

1.1　数学建模的概念

1.1.1　数学建模竞赛的产生与发展

大学生数学建模竞赛最早于 1985 年出现在美国，1987 年将全称定为 Mathematical Competition in Modeling，1988 年改全称为 Mathematical Contest in Modeling，其缩写均为 MCM. 交叉学科建模竞赛（Interdisciplinary Contest in Modeling，简称 ICM）是 1999 年新增加的数学建模赛事. 目前 MCM 和 ICM 同时进行，统称为 MCM/ICM，其中 MCM 有 A、B 两题，ICM 为 C 题，自 2015 年起 ICM 将增加 D 题. MCM/ICM 一般在每年的 2 月举行，它要求参赛队（需由同一所大学的 3 名学生组成）从 A、B 和 C 题中任选一题，并在 96 小时内完成所选问题的模型建立和求解方案，最终提交一篇完整的英文科技论文. 我国自 1989 年首次参加这一竞赛，在历届竞赛中均取得优异成绩. MCM/ICM 奖项设置等级如下：特等奖（Outstanding Winners）、特等奖提名奖（Finalist Winners）、一等奖（Meritorious Winners）、二等奖（Honorable Mentions）和三等奖（Successful Participants）.

1990 年 12 月上海市率先举办了“上海市大学生（数学类）数学模型竞赛”，1991 年 6 月上海市举办了“上海市大学生（非数学类）数学模型竞赛”. 西安市于 1992 年 4 月举办了“西安市第一届大学生数学模型竞赛”，同年 11 月中国工业与应用数学学会也举办了“1992 年全国大学生数学模型联赛”，并决定以后每年举办一次全国大学生数学建模竞赛（China Undergraduate Mathematical Contest in Modeling，简称 CUMCM），每年 9 月进行. 目前，CUMCM 由 A、B、C 和 D 四个赛题组成，其中 A 和 B 为本科组赛题，C 和 D 为专科组赛题，参赛队需在 72 小时内独立完成数学建模论文的写作. 作为全国高校规模最大的基础性学科

竞赛，CUMCM 在 2014 年吸引了 1338 所院校 25 347 个参赛队参加此项竞赛，其中包括新加坡和美国等国的一些参赛队.

1.1.2 什么是数学模型与数学建模

对于一个特定的对象，为了一个特定目标，根据特有的内在规律，做出一些必要的简化假设，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构就是数学模型. 数学结构可以是数学公式，也可以是算法、表格和图示等.

数学建模就是建立数学模型，数学建模是一种数学的思考方法，是运用数学的语言和方法，通过抽象、简化建立能近似刻画并"解决"实际问题的一种强有力的数学手段. 数学建模需要以下几方面的能力：数学知识应用能力、计算机运用能力、论文写作能力、查阅文献能力.

数学建模的特点：

(1) 模型的逼真性和可行性. 希望模型尽可能逼近研究对象，越逼真的模型越复杂，数学上有时难以处理，实用上不一定可行，通常要在逼真性与可行性之间做出折衷与抉择.

(2) 模型的渐进性. 复杂的实际问题的建模通常不可能一次完成，包括由简到繁，也包括由繁到简，以获得满意的数学模型为目标.

(3) 模型的可转移性. 模型是现实对象抽象化、理想化的产物，不为对象所属领域所独有，具有应用的极端广泛性.

(4) 模型的非预制性. 建模问题本身常常是事先没有答案的，在建立新的模型过程中有时会伴随新的数学方法或数学概念的产生.

(5) 建模还应具有条理性、局限性等特点.

1.1.3 数学模型的分类

我们可以从多种角度对数学模型进行分类.

(1) 依据对实际问题的了解程度可以分为白箱模型、灰箱模型和黑箱模型.

(2) 依据模型中的变量特征可以分为连续型模型、离散型模型或者确定性模型、随机性模型等.

(3) 依据建模中所用的数学方法可以分为初等数学模型、微分方程模型、优化模型、统计分析模型、控制论模型等.

当然，依据不同的标准，还有其他的分类方法.

1.1.4 数学建模的一般步骤

数学建模的一般步骤如下：

(1) 模型的准备. 了解问题的实际背景，明确建模的目的，搜集建模所需的各种信息(如

现象、数据等)，弄清研究对象的特征、机理等，由此初步确定用哪一类模型.

(2) 问题的假设. 由于实际问题比较复杂，直接建模比较困难，所以合理的假设可以简化建模的难度，但也不能过于简化，否则所得到的模型与实际问题会有比较大的差异. 合理的假设既要符合客观事实，又要有一定的依据. 由于考虑问题的视点不同，所作的简化假设不同，因而对同一问题会得到不同的数学模型. 作假设的依据，首先是出于对问题内在规律的认识，其次是来自对数据、现象的分析，或者是二者的结合.

(3) 模型的建立. 主要任务是说明建模的思路与依据，要充分表述自己的思路与所用到的依据，表述要简洁、清晰，论据要充分，推理及运算要正确.

(4) 模型的求解. 对于已经建立的模型给出一个正确的解答，应用所学过的知识，也可以借助于计算机，并应用相应的数学软件等.

(5) 模型分析. 对模型求解进行数学上的分析，主要是进行误差分析、稳定性分析及灵敏性分析等.

(6) 模型的检验与推广. 把数学上的分析结果“翻译”回到实际问题，并用实际的现象、数据与之比较，检验模型的合理性和适用性. 这是建模成败的关键. 模型检验的结果如果不符合或者部分不符合实际，应该对模型简化假设部分再做进一步的修改、补充，重新建立模型. 针对已经建立的模型指出其优点与不足，同时将模型改进、推广以适应更大的应用范围.

1.2 建模实例

例 1-1 某委员会要从一批科研成果中通过无记名投票选出若干优秀成果，但在有些成果的完成者中包括委员会评委，应如何处理此问题才算公平？

解 一般公平的做法是按得票多少排序，然后从中依次取为优秀成果，但对非评委的成果完成者有失公平，因为我们总可以假设评委对自己的成果投赞成票. 那么评委对自己的成果应如何回避？若不参加自己的成果投票对评委又不公平.

假设有 n 个评委，有某项成果涉及 m 个评委，若回避以后该成果得了 k 票，$k \leqslant n-m$，则该项成果得票率为

$$r_1(k) = \frac{k}{n-m}$$

但这 m 个评委不会接受，因为如果自己参加投票得票率应为

$$r_2(k) = \frac{k+m}{n}$$

而且有 $r_1(k) < r_2(k)$. 因此只能定出相对更公平的原则，设得票多少的度量函数为 $q(k)$，且 $q(k)$ 满足

(1) $q(k)$是k的单调递增函数；

(2) $r_1(k) \leqslant q(k) \leqslant r_2(k)$，$0 \leqslant k \leqslant n-m$，$m>0$；

(3) $q(0)=0$，$q(n-m)=1$，即除自己外其他人未投票，则得票度量为0，若其他人都投了赞成票，则得票度量为1.

依据以上条件，可以取得票度量函数为

$$q(k)=\sqrt{r_1(k)r_2(k)}=\sqrt{\frac{k(k+m)}{n(n-m)}},\quad 0 \leqslant m < n$$

当然度量函数$q(k)$也可以有其他的选择方式，只要满足上述三个条件即可.

例 1-2(渡河问题) 一个人带着一只狼、一只羊、一些菜过河，河上只有一只船，每次除了人只能带一样东西. 如果人不在，狼就要吃羊、羊就要吃菜，问该人是否可以过得去河.

解 引入向量$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$，其中$x_1,x_2,x_3,x_4$分别表示人、狼、羊、菜四种物品的位置. 当物品在开始位置时对应值为1，在对岸时取值为0，则依题意岸上的所有允许状态共有10种，分别为

$$(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1),(1,0,1,0)$$
$$(0,1,0,1),(0,0,0,1),(0,0,1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,0)$$

其中$(1,1,1,1)$为初始状态，$(0,0,0,0)$为结束状态.

船的所有允许运载状态共4个，分别为

$$(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(1,0,0,0)$$

由于每种物品只有一个，因此本问题可以采用二进制运算，即$1+1=0$，$1+0=1$，$0+0=0$. 当运算结果不是允许状态或重复已经应用过的允许状态时，则该结果不再继续，当运算结果为允许状态时，可以继续进行下去，直到出现结束状态. 如果某一步有多个允许状态，则说明有多种方法可以实现过河. 具体运算过程如下：

$$\text{第 1 步：}(1,1,1,1)+\begin{cases}(1,0,1,0)\\(1,1,0,0)\\(1,0,0,1)\\(1,0,0,0)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(0,1,0,1) & \text{允许}\\(0,0,1,1) & \text{不允许}\\(0,1,1,0) & \text{不允许}\\(0,1,1,1) & \text{不允许}\end{cases}$$

$$\text{第 2 步：}(0,1,0,1)+\begin{cases}(1,0,1,0)\\(1,1,0,0)\\(1,0,0,1)\\(1,0,0,0)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(1,1,1,1) & \text{重复}\\(1,0,0,1) & \text{不允许}\\(1,1,0,0) & \text{不允许}\\(1,1,0,1) & \text{允许}\end{cases}$$

$$\text{第 3 步：}(1,1,0,1)+\begin{cases}(1,0,1,0)\\(1,1,0,0)\\(1,0,0,1)\\(1,0,0,0)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(0,1,1,1) & \text{不允许}\\(0,0,0,1) & \text{允许}\\(0,1,0,0) & \text{允许}\\(0,1,0,1) & \text{重复}\end{cases}$$

以下在两个允许状态里选择一个，对另外一个同样处理.

$$\text{第 4 步：}(0,0,0,1)+\begin{cases}(1,0,1,0)\\(1,1,0,0)\\(1,0,0,1)\\(1,0,0,0)\end{cases}\to\begin{cases}(1,0,1,1) & \text{允许}\\(1,1,0,1) & \text{重复}\\(1,0,0,0) & \text{不允许}\\(1,0,0,1) & \text{不允许}\end{cases}$$

$$\text{第 5 步：}(1,0,1,1)+\begin{cases}(1,0,1,0)\\(1,1,0,0)\\(1,0,0,1)\\(1,0,0,0)\end{cases}\to\begin{cases}(0,0,0,1) & \text{不允许}\\(0,1,1,1) & \text{不允许}\\(0,0,1,0) & \text{允许}\\(0,0,1,1) & \text{不允许}\end{cases}$$

$$\text{第 6 步：}(0,0,1,0)+\begin{cases}(1,0,1,0)\\(1,1,0,0)\\(1,0,0,1)\\(1,0,0,0)\end{cases}\to\begin{cases}(1,0,0,0) & \text{不允许}\\(1,1,1,0) & \text{重复}\\(1,0,1,1) & \text{不允许}\\(1,0,1,0) & \text{允许}\end{cases}$$

$$\text{第 7 步：}(1,0,1,0)+\begin{cases}(1,0,1,0)\\(1,1,0,0)\\(1,0,0,1)\\(1,0,0,0)\end{cases}\to\begin{cases}(0,0,0,0) & \text{允许}\\(0,1,1,0) & \text{不允许}\\(0,0,1,1) & \text{不允许}\\(0,0,1,0) & \text{不允许}\end{cases}$$

经过 7 步后到达终止状态(0, 0, 0, 0)，所以需要摆渡 7 次完成过河. 从终止状态(0, 0, 0, 0) 回溯到初始状态(1, 1, 1, 1)，可得摆渡过程为(1, 0, 1, 0)，(1, 0, 0, 0)，(1, 1, 0, 0)，(1, 0, 1, 0)，(1, 0, 0, 1)，(1, 0, 0, 0)，(1, 0, 1, 0). 即带羊过河、人回来、带狼过河、带羊回来、带菜过河、人回来、带羊过河 7 个步骤.

例 1-3（公平席位分配） 某校有 200 名学生，甲系 100 名，乙系 60 名，丙系 40 名，若学生代表会议设 20 个席位，问三系各有多少个席位？

解 设 N 为总人数，M 为席位总数，n_1, n_2, n_3 分别为甲、乙、丙系的人数，m_1, m_2, m_3 分别为甲、乙、丙系的席位数. 按惯例分配代表席位是按人数比例分配，则有

$$m_i = M \cdot \frac{n_i}{N}, \quad i = 1,2,3$$

20 个席位的分配结果为

系别	人数	所占比例	分配方案	席位数
甲	100	100/200	(50/100)×20=10	10
乙	60	60/200	(30/100)×20=6	6
丙	40	40/200	(20/100)×20=4	4

如果现在丙系有 6 名学生分别转到甲、乙系各 3 名，按上述方法的分配结果为

系别	人数	所占比例	分配方案	席位数
甲	103	103/200＝51.5％	10.3	10
乙	63	63/200＝31.5％	6.3	6
丙	34	34/200＝17.0％	3.4	4

丙系人数少了，但席位数不变，显得不公平.

为了在表决提案时可能出现 10∶10 的平局，再设一个席位（专家人数常为奇数），则 21 个席位的分配结果为

系别	人数	所占比例	分配方案	席位数
甲	103	103/200＝51.5％	10.815	11
乙	63	63/200＝31.5％	6.615	7
丙	34	34/200＝17.0％	3.570	3

总席位增加一席，丙系反而减少一席，这样也不公平.

惯例分配方法：按比例分配完取整数的名额后，剩下的名额分给小数部分较大者. 这样分配有时存在不公平现象，能否给出更公平的席位分配方案？

(1) 衡量公平分配的度量指标

用$\frac{n_i}{m_i}$表示每个席位代表的人数，称$\left|\frac{n_1}{m_1}-\frac{n_2}{m_2}\right|$为甲系对乙系的“绝对不公平度”（代表人数之差）. $\frac{n_i}{m_i}(i=1,2)$值越大，每个席位代表的人数就越多，$\left|\frac{n_1}{m_1}-\frac{n_2}{m_2}\right|$值越小，对甲乙两系的分配越趋于公平. 但

$$n_1=150, m_1=10, \frac{n_1}{m_1}=15, n_2=100, m_2=10, \frac{n_2}{m_2}=10, \text{此时} \left|\frac{n_1}{m_1}-\frac{n_2}{m_2}\right|=5;$$

$$n_1=1050, m_1=10, \frac{n_1}{m_1}=105, n_2=1000, m_2=10, \frac{n_2}{m_2}=100, \text{此时} \left|\frac{n_1}{m_1}-\frac{n_2}{m_2}\right|=5.$$

二者的绝对不公平度相同，但后者对甲的不公平度大大降低. 所以绝对不公平度不能很好反映分配的公平性. 下面给出相对不公平度的定义.

若$\frac{n_1}{m_1}>\frac{n_2}{m_2}$，则定义

$$r_1(m_1,m_2)=\frac{\frac{n_1}{m_1}-\frac{n_2}{m_2}}{\frac{n_2}{m_2}}=\frac{n_1 m_2}{n_2 m_1}-1$$

为对甲的相对不公平度；若$\frac{n_1}{m_1}<\frac{n_2}{m_2}$，则称

$$r_2(m_1,m_2)=\frac{\frac{n_2}{m_2}-\frac{n_1}{m_1}}{\frac{n_1}{m_1}}=\frac{n_2m_1}{n_1m_2}-1$$

为对乙的相对不公平度. 制定席位分配方案的原则应使 r_1 或 r_2 尽可能的小.

不失一般性, 假设 $\frac{n_1}{m_1}>\frac{n_2}{m_2}$, 考虑下面两种情形.

① $\frac{n_1}{m_1+1}>\frac{n_2}{m_2}$, 说明即使给甲增加 1 席, 仍对甲不公平, 所增加这一席位必须给甲.

② $\frac{n_1}{m_1+1}<\frac{n_2}{m_2}$, 说明当对甲不公平时, 给甲增加 1 席, 对乙又不公平. 如果给甲增加 1 席, 则对乙的相对不公平度为

$$r_2(m_1+1,m_2)=\frac{\frac{n_2}{m_2}-\frac{n_1}{m_1+1}}{\frac{n_1}{m_1+1}}=\frac{n_2(m_1+1)}{n_1m_2}-1$$

那么是否该将这一席给乙呢? 基于前述假设, 一定有 $\frac{n_1}{m_1}>\frac{n_2}{m_2+1}$, 这说明当对甲不公平时, 如果给乙增加 1 席, 对甲更加不公平. 此时对甲的相对不公平度为

$$r_1(m_1,m_2+1)=\frac{\frac{n_1}{m_1}-\frac{n_2}{m_2+1}}{\frac{n_2}{m_2+1}}=\frac{n_1(m_2+1)}{n_2m_1}-1$$

我们可以比较对甲乙的相对不公平度, 决定这一席的分配. 若 $r_2(m_1+1,m_2)<r_1(m_1,m_2+1)$, 则这一席位给甲, 否则给乙.

(2) Q 值分配法

观察到 $r_2(m_1+1,m_2)<r_1(m_1,m_2+1)$ 等价于 $\frac{n_2(m_1+1)}{n_1m_2}<\frac{n_1(m_2+1)}{n_2m_1}$, 即等价于 $\frac{n_2^2}{m_2(m_2+1)}<\frac{n_1^2}{m_1(m_1+1)}$. 另外, 当 $\frac{n_1}{m_1+1}>\frac{n_2}{m_2}$ 时, 也有 $\frac{n_2^2}{m_2(m_2+1)}<\frac{n_2^2}{m_2^2}<\frac{n_1^2}{(m_1+1)^2}<\frac{n_1^2}{m_1(m_1+1)}$, 即 $\frac{n_2^2}{m_2(m_2+1)}<\frac{n_1^2}{m_1(m_1+1)}$.

将(1)中①②两种情况归结到一起, 记 $Q_i=\frac{n_i^2}{m_i(m_i+1)}$ $(i=1,2)$, 则增加的一个席位应分配给 Q 值较大的一方. 这样的分配席位方法称为 Q 值方法.

对于有 k 个单位的情况, 设 i 方人数为 n_i, 已占有 m_i 个席位, 当总席位增加 1 席时, 计算

$$Q_i=\frac{n_i^2}{m_i(m_i+1)},\quad i=1,2,\cdots,k$$

则增加的1席应分给 Q 值最大的一方.

③ 本例中 $Q_1=\frac{10\times10}{103\times(103+1)}=0.0093$，$Q_2=\frac{6\times6}{63\times(63+1)}=0.0089$，$Q_3=\frac{4\times4}{34\times(34+1)}=0.0134$，所以增加的一席应该分给乙系.

例 1-4(银行贷款问题) 某人欲向银行贷款50万用于买房,采用等额还款的方式20年还清.假设银行贷款年利率为6.5%,且20年内保持不变,问此人每月需要向银行还款数额为多少?

解 设贷款金额为 A_0,贷款月数为 N,年利率为 R,月利率为 r,第 n 个月底欠银行的钱数为 A_n,每个月还款钱数为 x,则有 $r=\frac{R}{12}$.根据题意,建立如下的数学模型:

$$\begin{cases}A_n=A_{n-1}(1+r)-x, & n=1,2,\cdots,N\\ A_N=0\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}A_1&=A_0(1+r)-x\\ A_2&=A_1(1+r)-x=A_0\,(1+r)^2-x(1+(1+r))\\ A_3&=A_2(1+r)-x=A_0\,(1+r)^3-x(1+(1+r)+(1+r)^2)\\ &\cdots\end{aligned}$$

利用数学归纳法可以证明

$$A_n=A_0\,(1+r)^n-x(1+(1+r)+\cdots+(1+r)^{n-1}),\quad n\geqslant1$$

即 $A_n=A_0\,(1+r)^n-x\frac{1-(1+r)^n}{1-(1+r)}$.令 $A_N=0$,可得

$$x=\frac{A_0r\,(1+r)^N}{(1+r)^N-1}$$

由上式可知 $x>A_0r$.将 $A_0=500\,000$，$r=\frac{0.065}{12}$，$N=240$ 代入得 $x=3727.87$.因此,共计需要还款89.468 776万元,利息为39.468 776万元.

此外,根据 x 的计算公式还可以推导出

$$A_0=x\frac{(1+r)^N-1}{r\,(1+r)^N},\quad N=\frac{\ln x-\ln(x-A_0r)}{\ln(1+r)}$$

利用此公式,在确定需要贷款总金额 A_0 和每月能够还款钱数 x 后,可以计算出需要还款的月数.

例 1-5(椅子平稳问题) 正方形椅子在不平地面上可以放稳吗?

解 模型假设如下:

(1) 设四条腿一样长,与地面接触是一个点.

(2) 地面高度是连续变化的,可以看成连续曲面.

(3) 在任何位置至少有3条腿同时着地.