普通高等教育“十二五”规划教材
大学高等数学类规划教材

丛书主编 王立冬

高等数学

（下册）

主 编 王立冬 周文书

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
大学高等数学类规划教材
丛书主编　王立冬

高等数学(下册)

主　编　王立冬　周文书
副主编　王金芝　刘　恒

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书由数学教师结合多年的教学实践经验编写而成. 本书编写过程中遵循教育教学的基本规律，对数学思想的讲解力求简单易懂，注重培养学生的思维方式和独立思考问题的能力. 每节后都配有相应的习题，习题的选配尽量典型多样，难度上层次分明，锻炼学生应用所学知识解决实际问题的能力以及创新思维能力. 书中还对重要数学概念配备英文词汇，并对微积分的发展做出突出贡献的部分数学家作了简要介绍，使学生能够了解微积分的起源，吸引学生的学习兴趣.

全书分上、下两册出版，本书为下册. 下册的主要内容包括：空间解析几何与向量代数，多元函数微分学及其应用，重积分，曲线和曲面积分，无穷级数等内容.

本书可供普通高等院校理工科类各专业学生使用，也可以供学生自学使用.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（下册）/王立冬，周文书主编. —北京：科学出版社，2015. 1

普通高等教育“十二五”规划教材 · 大学高等数学类规划教材

ISBN 978-7-03-043211-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①王… ②周… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 021648 号

责任编辑：张中兴 / 责任校对：桂伟利

责任印制：霍 兵 / 封面设计：迷底书装

科 学 出 版 社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

三河市骏立印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 1 月第 一 版 开本：720×1000 1/16

2015 年 1 月第一次印刷 印张：18

字数：363 000

定价：37.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

目录

第 8 章

空间解析几何与向量代数

Analytic Geometry in Space and Vector Algebra

17 世纪上半叶,法国数学家笛卡儿和费马创立了解析几何,其基本思想是用代数的方法研究几何问题,在中学的平面解析几何中已有所体现.为了学习多元微积分学,本章先介绍空间直角坐标系,并给出向量的概念和运算;然后,以向量为工具研究空间中的直线、平面、曲线、曲面等的图形和性质.

8.1 空间直角坐标系及两点间的距离公式

8.1.1 空间直角坐标系

在平面解析几何中,建立了平面直角坐标系,使得平面上的点与二元有序数组(x,y)之间有了一一对应关系.类似地,可以建立空间直角坐标系,使得空间中的点与三元有序数组(x,y,z)之间形成一一对应关系,这样,就可以用代数的方法研究几何问题.

过空间一定点O,作三条相互垂直的数轴,依次称为x轴(横轴)、y轴(纵轴)、z轴(竖轴),并统称为坐标轴.各轴正向之间的顺序通常按如图 8-1 所示的右手法则确定:以右手握住z轴,当右手四个手指从x轴正向以$\frac{\pi}{2}$的角度转向y轴正向时,大拇指的指向就是z轴的正向.与之相反的还有左手法则,一般习惯上都采用右手法则,这样就建立了空间直角坐标系.按右手法则建立的坐标系称为右手系,O称为坐标原点,三条坐标轴中的每两条坐标轴所确定的平面称为坐标平面,依次为xOy坐标面、yOz坐标面、zOx坐标面.三个坐标面把空间分成八个部分,每个部分称为一个卦限,共八个卦限.其中$x>0,y>0,z>0$部分为第Ⅰ卦限,第Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ卦限在xOy平面的上方并按逆时针方向来确定;$x>0,y>0,z<0$部分为第Ⅴ卦限,第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限在xOy平面的下方并仍按逆时针方向来确定(图 8-2).

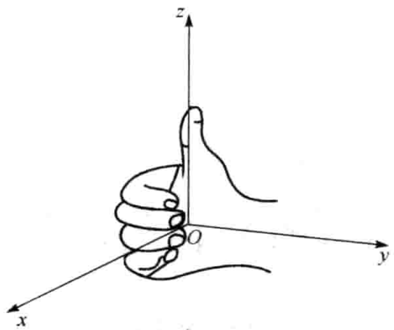

图 8-1

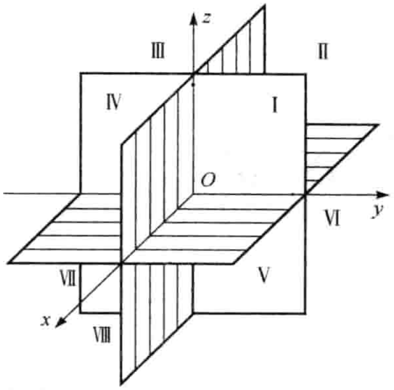

图 8-2

设 M 为空间中的任意一点,过点 M 分别作垂直于三条坐标轴的平面,与三条坐标轴分别相交于 P,Q,R 三点,这三个点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x,y 和 z,即任意点 M 都可以找到唯一的一个三元有序数组 (x,y,z) 与之对应.反之,对任意的一个三元有序数组 (x,y,z),就可以分别在 x 轴、y 轴、z 轴上找到坐标为 x,y,z 的三个点 P,Q 和 R,过三个点分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面,这三个平面就确定了唯一的交点 M,即任意的一个三元有序数组 (x,y,z) 都可以在空间中找到唯一的一点 M 与之对应.至此,空间的点 M 与三元有序数组 (x,y,z) 之间就建立了一一对应关系(图 8-3),有序数组 (x,y,z) 称为点 M 的坐标,记为 $M(x,y,z)$,并依次称 x,y,z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标.

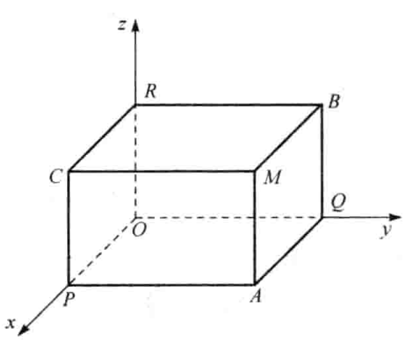

图 8-3

坐标原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$,x 轴上的点的纵坐标和竖坐标均为 0,因而可表示为 $(x,0,0)$;类似地,y 轴上的点的坐标为 $(0,y,0)$;z 轴上的点的坐标为 $(0,0,z)$. xOy 面上的点的坐标可表示为 $(x,y,0)$;yOz 面上的点的坐标可表示为 $(0,y,z)$;zOx 面上的点的坐标可表示为 $(x,0,z)$.

设点 $M(x,y,z)$ 为空间直角坐标系中的一点,则点 M 关于坐标面 xOy 的对称点为 $M_1(x,y,-z)$,关于 z 轴的对称点为 $M_2(-x,-y,z)$,关于原点的对称点为 $M_3(-x,-y,-z)$.

8.1.2　两点间的距离公式

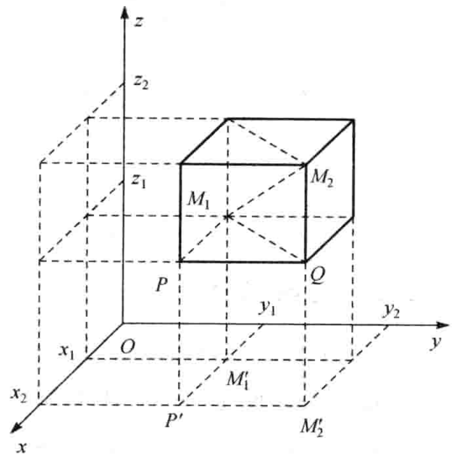

图 8-4

设空间直角坐标系中有两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，下面来求它们之间的距离 $|M_1M_2|$. 过这两个点各作三个分别垂直于坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 8-4). 因为

$$\begin{aligned}|M_1M_2|^2&=|M_1Q|^2+|QM_2|^2\\&=|M_1P|^2+|PQ|^2+|QM_2|^2\\&=|M_1'P'|^2+|P'M_2'|^2+|QM_2|^2\\&=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\\&\quad+(z_2-z_1)^2,\end{aligned}$$

所以

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特别地，点 $M(x,y,z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 1　证明：以 $A(4,3,1)$，$B(7,1,2)$，$C(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是等腰三角形.

解　根据两点间距离公式有

$$|AB|=\sqrt{(4-7)^2+(3-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{14},$$

$$|AC|=\sqrt{(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{6},$$

$$|BC|=\sqrt{(7-5)^2+(1-2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{6},$$

显然有 $|AC|=|BC|$，故 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

习题 8.1

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点的卦限.

(1) $(1,-5,3)$；　(2) $(2,4,-1)$；　(3) $(1,-5,-6)$；　(4) $(-1,-2,1)$.

2. 根据下列条件求点 B 的未知坐标：

(1) $A(4,-7,1)$，$B(6,2,z)$，$|AB|=11$；

(2) $A(2,3,4)$，$B(x,-2,4)$，$|AB|=5$.

3. 求点 $M(4,-3,5)$ 与原点及各坐标轴之间的距离.

4. 在 z 轴上，求与点 $A(-4,1,7)$ 和点 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

5. 求点 $M(a,b,c)$ 在各坐标平面上以及各坐标轴上的垂足的坐标.

6. 求点 $M(a,b,c)$ 分别关于各坐标轴以及各坐标平面的对称点的坐标.

7. 在 yOz 坐标面上,求与三个点 $A(3,1,2)$,$B(4,-2,-2)$,$C(0,5,-1)$ 等距离的点的坐标.

8.2 向量及其运算

8.2.1 向量的概念

用一个数值来对事物的某一属性进行度量或描述是常用的方法.例如,对时间、温度、距离、质量、长度、体积等,可以用一个数值度量它们的程度或大小,这类量只有大小没有方向,称为数量(标量);但对另一类事物,如力、位移、速度、电场强度等,仅用一个数量描述很难说得清楚,只有把它们的大小和方向综合起来描述才能真正显示其含义.

定义 1 既有大小又有方向的量称为向量.

空间中的向量经常用具有一定长度且标有方向的有向线段来表示.在选定长度单位后,有向线段的长度表示向量的大小,其方向表示向量的方向.如图 8-5 所示,以 A 为起点、B 为终点的向量记为$\overrightarrow{AB}$,为简便起见,常用小写的粗体字母来表示,如用 $\boldsymbol{a}$(或 $\vec{a}$)表示$\overrightarrow{AB}$.

向量的大小称为向量的**模**(norm),记为$|\overrightarrow{AB}|$或$|\boldsymbol{a}|$,模为 1 的向量称为**单位向量**(unit vector).模等于 0 的向量称为**零向量**(zero vector),记为 $\mathbf{0}$.零向量没有规定方向,可以看成是任意方向的.

两个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,如果它们的方向相同且模相等,则称这两个向量相等,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.由此定义可知,不论 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 起点是否一致,只要大小相等,方向相同,即为相等的向量,也就是说一个向量和它经过平行移动(方向不变,起点和终点位置改变)所得的向量都是相等的.

由于向量有方向,两非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 经过平行移动起点重合后会形成两个角(图 8-6),分别设为 θ 和 γ,不妨设 $\theta\leqslant\gamma$,显然有 $\theta+\gamma=2\pi$,不难得到 $2\theta\leqslant 2\pi$,即 $\theta\leqslant\pi$.将两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间所夹的较小的角 θ 定义为两向量的夹角,记为$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,容易得到夹角 θ 的范围为$[0,\pi]$.当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时,$\theta=0$;当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时,$\theta=\pi$.

如果两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反,就称这两个向量平行,记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.因零向量的方向是任意的,所以可以认为零向量平行于任何向量.若将两个平行向量的起点放在同一点,它们的终点和公共起点将在同一条直线上,所以两个向量平行也称为两向量共线.

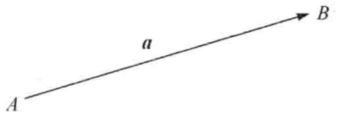

图 8-5

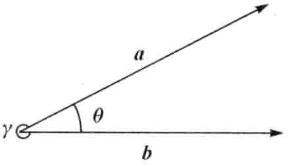

图 8-6

8.2.2　向量的线性运算

1. 向量的加减法

定义 2　设有向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC(图 8-7)，则向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. 这种作出两个向量之和的方法称为向量加法的**三角形法则**.

由向量加法的定义，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$ 是显然成立的. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，根据向量加法的三角形法则，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的长度等于两向量的长度之和；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 中长度较长的向量的方向相同，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的长度等于两向量长度之差.

若两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时，可通过另种方式作出 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和. 将 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的起点移至同一点，以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的对角线所表示的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和(图 8-8)，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这种作出两个向量之和的方法称为向量相加的**平行四边形法则**.

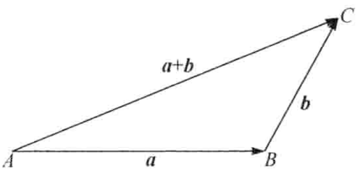

图 8-7

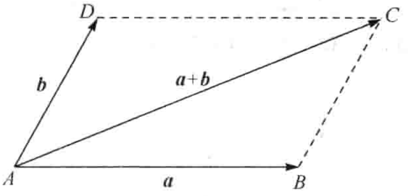

图 8-8

向量的加法满足交换律和结合律：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

对于(1)，从图 8-8 中可以看出

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

对于(2)，如图 8-9 所示，先作出 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，再将其与 $\boldsymbol{c}$ 相加，得到和 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$；另将 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 相加，则得同一结果，可见(2)成立.

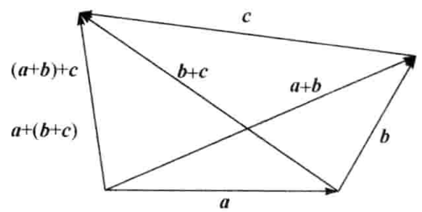

图 8-9

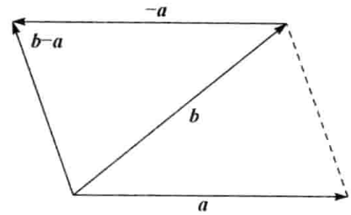

图 8-10

设有向量 $\boldsymbol{a}$,称与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量,记为 $-\boldsymbol{a}$. 两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差则定义为

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}),$$

因此向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差可看成是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $-\boldsymbol{a}$ 的和(图 8-10). 特别地,当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时,有

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

若将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O,显然,从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 指向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 的向量 $\overrightarrow{AB}$ 即是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(图 8-11).

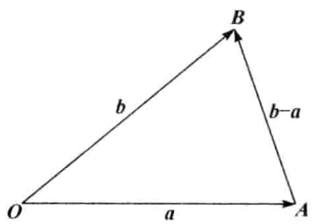

图 8-11

2. 向量的数乘

定义 3 设 $\boldsymbol{a}$ 是一个向量,λ 是一个实数,规定数 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量,记为 $\lambda\boldsymbol{a}$. 该向量的大小、方向按如下方法确定:

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$;

(2) 当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的大小是 $\boldsymbol{a}$ 的大小的 λ 倍,方向不变;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的大小是 $\boldsymbol{a}$ 的大小的 $|\lambda|$ 倍,方向相反(图 8-12).

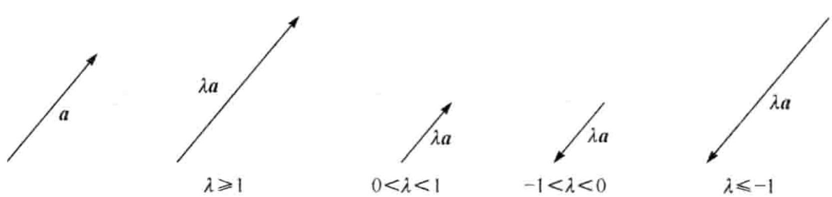

图 8-12

向量的数乘满足结合律与分配律(λ,μ 为实数):

(1) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

以上运算规律均可从数乘的定义给出证明,请读者自己完成. 这里仅以(3)为

例，给出一个几何解释(图 8-13)($\lambda>0$).

向量的加法运算和数乘运算统称为向量的**线性运算**.

通常把与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，记为 $\boldsymbol{a}^0$，显然，$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$，$\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$(图 8-14).

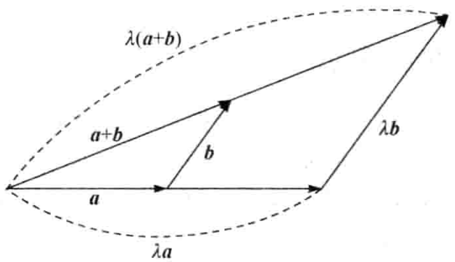

图 8-13

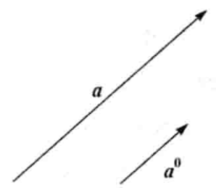

图 8-14

由数乘向量的定义易得下面的结论.

定理 1　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，那么向量 $\boldsymbol{b}$ 平行 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

定理 1 为数轴的建立提供了理论基础. 数轴是确定了原点、单位长度和正方向的一条直线. 由于一个单位向量已经确定了方向，同时又确定了单位长度，所以，只需给定一个点就行了，也就是说，给定一个单位向量和一点即可确定一条数轴.

设点 O 和单位向量 $\boldsymbol{i}$ 确定了一个数轴，如图 8-15 所示，对于数轴上任意一点 P，对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$，因为 $\overrightarrow{OP}\,/\!/\,\boldsymbol{i}$，由定理 1 知，必存在唯一的实数 x，使 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$. 这样向量 $\overrightarrow{OP}$ 就与实数 x 建立了一一对应关系. 以后也称 x 为有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的值，并将其定义为点 P 的坐标. 这样就完成了数轴上的点与实数的一一对应.

例 1　已知菱形 $ABCD$ 的对角线 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DA}$.

解　如图 8-16 所示，由向量的平行四边形法则

图 8-15

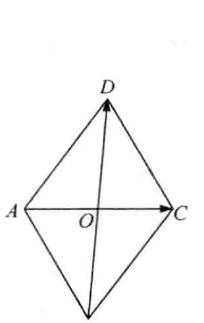

图 8-16

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),$$

$$\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),$$

同理，$\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$\overrightarrow{DA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

8.2.3 向量的分解与向量的坐标表示

为了将向量的几何运算转化为代数运算，将向量按三个坐标轴方向进行分解，用三元有序数组表示向量. 任给空间一向量 $\boldsymbol{a}$，将其平行移动，使其起点与坐标原点重合，终点记为 $P(x,y,z)$. 过 P 点作三条坐标轴的垂直平面，与 x 轴、y 轴、z 轴的交点分别为 A,B,C(图 8-17). 于是有

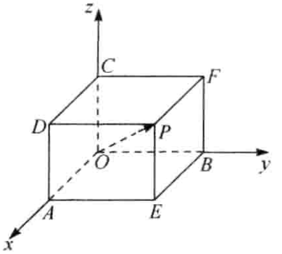

图 8-17

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},$$

其中$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$分别称为向量$\overrightarrow{OP}$在 x 轴、y 轴、z 轴上的分量.

以 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示与 x 轴、y 轴、z 轴正向一致的单位向量，并称为基本单位向量，于是

$$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k},$$

因而

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

上式称为向量$\overrightarrow{OP}$的坐标分解式. x,y,z 称为$\overrightarrow{OP}$的坐标，记为 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$.

显然，给定向量 $\boldsymbol{a}$，就确定了点 P 以及$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$三个分量，进而确定三个有序数 x,y,z. 反过来，给定三个有序数 x,y,z，也可确定向量 $\boldsymbol{a}$ 与点 P. 可见，向量 $\boldsymbol{a}$、点 P 与三个有序数 x,y,z 之间存在一一对应关系.

设 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的坐标表示分别为$(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$，就可将空间任一起点为 $A(x_1,y_1,z_1)$，终点为 $B(x_2,y_2,z_2)$的向量$\overrightarrow{AB}$用坐标表示，如图 8-18 所示. 因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

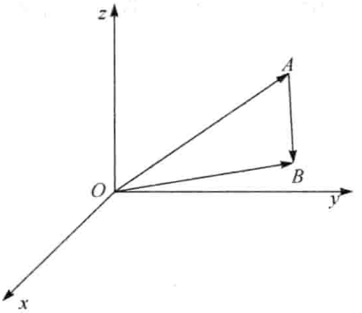

图 8-18

所以$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，这说明向量$\overrightarrow{AB}$的坐标等于终点坐标与起点坐标之差. 有了向量的坐标表示就可以把向量的几何运算转化为代数运算.

设 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，即

$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(x_1\pm x_2)\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{k}\\&=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2),\\\lambda\boldsymbol{a}&=(\lambda x_1)\boldsymbol{i}+(\lambda y_1)\boldsymbol{j}+(\lambda z_1)\boldsymbol{k}\\&=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1).\end{aligned}$$

例 2　设 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$，并求 $\boldsymbol{d}$ 的各个分量及在 y 轴上的坐标.

解　因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}&=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}\\&=2(-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})-(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})\\&=2\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

$\boldsymbol{d}$ 在 x 轴上、y 轴、z 轴上的分量分别为 $2\boldsymbol{i}$，$-8\boldsymbol{j}$，$-\boldsymbol{k}$；$\boldsymbol{d}$ 在 y 轴上的坐标为 -8.

例 3　在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 上一点，若 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，求证 D 是 BC 的中点.

证明　如图 8-19 所示，有

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}),$$

即 $2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，从而 $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$.

根据向量加法的三角形法则，推得

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DB},$$

即 $|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{DB}|$. 因为 D 点在 BC 上，故 D 是 BC 的中点.

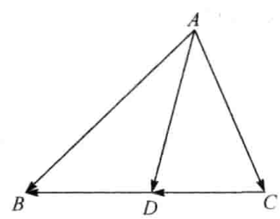

图 8-19

8.2.4　向量的模和方向余弦

与平面解析几何中用倾斜角表示直线对坐标轴的倾斜程度相类似，这里可以用向量 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$ 与三条坐标轴正向之间的夹角 α,β,γ 来表示向量的方向. 由于是向量之间的夹角，所以各夹角的范围均为 $[0,\pi]$，α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，相应的 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**.

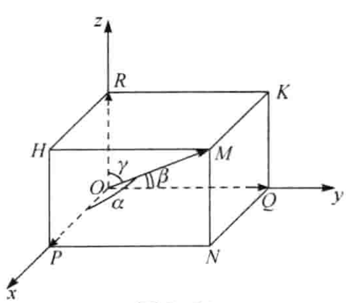

图 8-20

如图 8-20 所示，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$，根据两点间的距离公式可得向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

在 $\triangle OPM$，$\triangle OQM$，$\triangle OMR$ 中，有

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

将以上三式平方后相加,即可得到

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

即任一向量的方向余弦的平方和等于1,同时也说明方向余弦所构成的向量$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$是单位向量,且与向量$\boldsymbol{a}$的方向相同.

例4　设两点$A(2,0,-3)$和$B(3,\sqrt{2},-2)$,求向量$\overrightarrow{AB}$的模、方向余弦、方向角及与向量$\overrightarrow{AB}$平行的单位向量$\boldsymbol{e}$.

解　设坐标原点为$O(0,0,0)$,则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3-2,\sqrt{2}-0,-2-(-3))=(1,\sqrt{2},1),$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+1^2}=2,$$

向量$\overrightarrow{AB}$的方向余弦分别为

$$\cos\alpha=\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\gamma=\frac{1}{2},$$

根据方向角的范围为$[0,\pi]$,所以得到

$$\alpha=\frac{\pi}{3},\quad \beta=\frac{\pi}{4},\quad \gamma=\frac{\pi}{3},$$

与向量$\overrightarrow{AB}$平行的单位向量为$\boldsymbol{e}=\pm\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\pm\dfrac{1}{2}(1,\sqrt{2},1)$.

习题 8.2

1. 下列说法是否正确,为什么?

(1) $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$是单位向量;　　(2) $-\boldsymbol{i}$不是单位向量;

(3) 与三坐标轴的正向夹角相等的向量,其方向角均为$\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}$.

2. 设$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{p}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,求下列向量.

(1) $2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$;　　(2) $\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$;

(3) $\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}+2\boldsymbol{p}$;　　(4) $2\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$.

3. 已知$\boldsymbol{m}=(2,3,1)$,$\boldsymbol{n}=(1,-4,0)$,求下列向量的模、方向余弦及方向角.

(1) $\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$;　　(2) $2\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}$.

4. 已知向量$\boldsymbol{m}=a\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$和向量$\boldsymbol{n}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+b\boldsymbol{k}$共线,求系数$a$和$b$.

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 两个方向余弦分别为 $\cos\alpha=\dfrac{2}{7}$，$\cos\beta=\dfrac{3}{7}$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 z 轴的方向角是钝角，求 $\cos\gamma$.

6. 已知两点 $M_1(4,2,1)$ 和 $M_2(3,0,2)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

7. 设向量 $\boldsymbol{m}$ 的方向余弦分别满足下列条件，给出向量与坐标轴或坐标平面的位置关系.

(1) $\cos\alpha=0$；　　(2) $\cos\beta=1$；

(3) $\cos\gamma=-1$；　　(4) $\cos\alpha=\cos\beta=0$.

8. 试用向量方法证明：若四边形的对角线互相平分，则该四边形是平行四边形.

8.3　向量的数量积与向量积

8.3.1　向量的数量积

由中学物理知识可知，若有质点在常力作用下，沿直线从点 A 移动到点 B，其位移为 $\overrightarrow{AB}$，则常力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}|\,|\overrightarrow{AB}|\cos\theta,$$

其中，θ 为常力 $\boldsymbol{F}$ 的方向与位移方向之间的夹角(图 8-21).

与之相类似的问题在工程技术中很常见，都涉及两个向量的模及夹角余弦的乘积运算，于是，可抽象出向量的数量积概念.

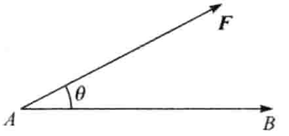

图 8-21

定义 1　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 两个向量之间的夹角为 θ，则称 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**(scalar product)，或称**内积**(inner product)，或称**点积**(dot product)，记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

由此定义可知，上述常力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 W 就是力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\overrightarrow{AB}$ 的内积，即 $W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}$.

内积满足以下运算性质：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$；

(3) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

由内积的定义，容易得出下面的结论：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$；

(2) 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

对上述结论(2)给予证明.

证明 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,且 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$,$|\boldsymbol{b}|\neq 0$,则有 $\cos\theta=0$,从而 $\theta=\frac{\pi}{2}$,故 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$;

此外,若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则有 $\theta=\frac{\pi}{2}$,从而 $\cos\theta=0$,于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$,内积的坐标表达式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是两两互相垂直的单位向量,所以有

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0,$$
$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1.$$

因此

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,$$

即两向量的数量积等于它们同名坐标的乘积之和. 由于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都是非零向量时有

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}},$$

即为两向量夹角余弦的表示式. 不难看出,两非零向量互相垂直的充要条件为

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

8.3.2 向量在轴上的投影

设有一轴 u,它由单位向量 $\boldsymbol{e}$ 及定点 O 确定(图 8-22),则对任给的向量 $\boldsymbol{a}$,作 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$,并由 P 点作与 u 轴垂直的平面交 u 轴于点 P',则点 P' 称为点 P 在 u 轴上的投影,向量 $\overrightarrow{OP'}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的分向量. 设 $\overrightarrow{OP'}=\lambda\boldsymbol{e}$,则数 λ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的**投影**(projection),记为 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{a}_u$.

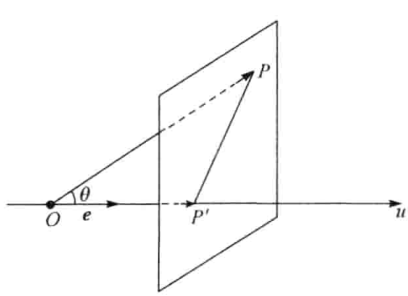

图 8-22

设向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标为 (a_x,a_y,a_z),即 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,由此定义可知

$$\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}=a_x,\quad \mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a}=a_y,\quad \mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}=a_z.$$

关于向量在轴上的投影有下面两个定理.

定理 1 设 u 轴与向量 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 θ,则向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的投影等于向量 $\boldsymbol{a}$ 的模乘以