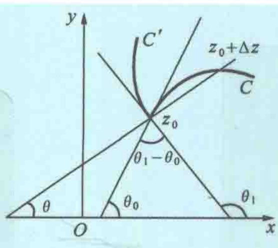
复变函数与积分变换

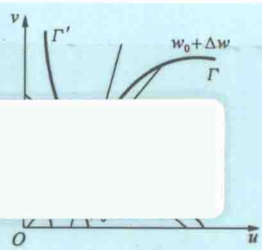
（第三版）

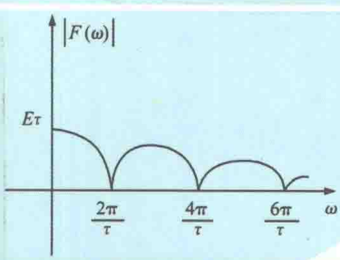
FUBIANHANSHU YU JIFENBIANHUAN

主　编　郝铁钢

副主编　马晓剑







東北林業大學出版社

复变函数与积分变换

（第三版）

主　编　郝铁钢
副主编　马晓剑

東北林業大學出版社
·哈尔滨·

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/郝铁钢主编. —3版. —哈尔滨:东北林业大学出版社,2014.7

ISBN 978-7-5674-0451-9

Ⅰ.①复… Ⅱ.①郝… Ⅲ.①复变函数-高等学校-教材②积分变换-高等学校-教材 Ⅳ.①O174.5②O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第166636号

责任编辑: 倪乃华
封面设计: 乔鑫鑫
出版发行: 东北林业大学出版社
(哈尔滨市香坊区哈平六道街6号 邮编:150040)
印　　装: 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本: 787mm×960mm 1/16
印　　张: 13.25
字　　数: 228千字
版　　次: 2014年7月第1版
印　　次: 2014年7月第1次印刷
定　　价: 22.00元

如发现印装质量问题,请与出版社联系调换。(电话:0451-82113296 82191620)

前　　言

复变函数与积分变换是工程数学系列中一门重要基础课，它广泛应用于自然科学和工程技术众多领域．我们根据多年来讲授复变函数与积分变换的经验，结合农林院校学生的特点编写这本书．

我们不仅力求简明，而且覆盖复变函数与积分变换的主要内容．本书配有大量例题和习题，这些例题和习题有助于初学者理解、认识、领会书中的定义、定理．本书便于自学，适用农林院校工科各专业．

本书由东北林业大学、北京工业职业技术学院和周口师范学院多年从事数学教学工作的教师共同编写，郝铁钢（东北林业大学）任主编、马晓剑（东北林业大学）任副主编，具体分工如下：第一章、第二章、第四章和第七章由郝铁钢编写；第三章、第五章、第六章和第八章由马晓剑编写．此外，参与本书编写的还有郭艳芬（北京工业职业技术学院）和卢梦霞（周口师范学院），全书由郝铁钢修改定稿．

为了提高课程的弹性，以便适应农林类不同专业的需要，本书第三版增加了部分内容，其中带星号章节为选学内容，也可供学生在课外阅读使用．

编者在编写过程中得到东北林业大学理学院及数学系领导的鼓励和支持，编者借此机会向他们表示感谢．

编　者

2014 年 6 月

目　　录

1 复数与复变函数

本课程所研究的函数为复变函数. 所谓复变函数就是自变量为复数的函数.

本章主要讨论复数的概念、运算、区域、映射、复变函数的概念等.

1.1 复数及其代数运算

1.1.1 复数的概念

我们将形如$z = x + iy$的数称为复数. 其中i称为虚数单位,并规定$i^2 = -1$, x, y为任意实数,称为z的实部与虚部,分别记为

$$\mathrm{Re}z = x, \mathrm{Im}z = y$$

例如,复数$z = \sqrt{3} + i$,有

$$\mathrm{Re}z = \sqrt{3}, \mathrm{Im}z = 1$$

当$y = 0$时,$z = x + iy = x + i\,0$,我们就认为它是实数x;当$x = 0$时,$z = x + iy = 0 + yi$,我们就称为它为纯虚数iy. 例如,$2 = 2 + i\,0$是实数;$3i = 0 + i\,3$为纯虚数.

设$z_1 = x_1 + iy_1$与$z_2 = x_2 + iy_2$是两个复数. 如果$x_1 = x_2, y_1 = y_2$,则称z_1与z_2相等. 所以$z = 0$当且仅当$x = y = 0$. 另外,与实数不同,一般说来,任意两个复数都不能比较大小.

1.1.2 复数的代数运算

两个复数$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$的加法、减法及乘法定义如下:

$$(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \tag{1.1}$$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2) \tag{1.2}$$

并分别称以上两式右端的复数为z_1与z_2的和、差与积.

显然,当z_1与z_2为实数(即当$y_1 = y_2 = 0$)时,以上两式与实数的运算法则一致.

当$z_2 \neq 0$时,由于

$$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

我们有 z_1 除以 z_2 的商为

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \tag{1.3}$$

不难证明,与实数的情形一样,复数的运算也满足交换律、结合律和分配律:

$$z_1+z_2=z_2+z_1, z_1z_2=z_2z_1;$$

$$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3, (z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3);$$

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$$

我们把实部相同而虚部绝对值相等、符号相反的两个复数称为共轭复数,与 z 共轭的复数记作 $\overline{z}$. 如果 $z=x+iy$,那么 $\overline{z}=x-iy$.

共轭复数有以下性质:

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}, \overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;

(2) $\overline{\overline{z}}=z$;

(3) $z\overline{z}=[\mathrm{Re}z]^2+[\mathrm{Im}z]^2$;

(4) $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}z, z-\overline{z}=2i\mathrm{Im}z$.

这些性质作为练习,由读者自己去证明.

例 1.1 设 $z_1=5-5i, z_2=-3+4i$,求 $\frac{z_1}{z_2}$ 与 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

解:
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{5-5i}{-3+4i}=\frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}=\frac{(-15-20)+(15-20)i}{25}$$
$$=-\frac{7}{5}-\frac{1}{5}i$$

所以 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=-\frac{7}{5}+\frac{1}{5}i$.

例 1.2 设 $z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}$,求 $\mathrm{Re}z$, $\mathrm{Im}z$ 与 $z\overline{z}$.

解:
$$z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}=\frac{i}{i(-i)}-\frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=i-\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$$

所以 $\mathrm{Re}z=\frac{3}{2}, \mathrm{Im}z=-\frac{1}{2}, z\overline{z}=(\frac{3}{2})^2+(-\frac{1}{2})^2=\frac{5}{2}$.

例 1.3 设 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$ 为任意两个复数,证明 $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$.

证明
$$\begin{aligned} z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2 &= (x_1+iy_1)(x_2-iy_2)+(x_1-iy_1)(x_2+iy_2) \\ &= (x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)+(x_1x_2+y_1y_2) \\ &\quad +i(x_1y_2-x_2y_1) \\ &= 2(x_1x_2+y_1y_2) = 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \end{aligned}$$

或

$$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2 = z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}} = 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$$

1.2 复数的几何表示

1.2.1 复平面

由于一个复数 $z=x+iy$ 为一对有序实数 (x,y) 唯一确定,因此对于平面上给定的直角坐标系,复数的全体与该平面上点的全体成一一对应关系,从而复数 $z=x+iy$ 可以用该平面上坐标为 (x,y) 的点来表示,这是复数的一个常用表示方法. 此时,x 轴称为实轴,y 轴称为虚轴,两轴所在的平面称为复平面或 z 平面. 这样复数与复平面上的点一一对应,并且把点 z 作为数 z 的同义词,从而使我们能借助几何语言和方法研究复变函数的问题,也为复变函数应用于实际奠定了基础.

在复平面上,复数 z 还与从原点指向点 $z=x+iy$ 的平面向量一一对应,因此复数 z 也能用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示(图 1 – 1). 向量的长度称为 z 的模或绝对值,记作

$$|z| = r = \sqrt{x^2+y^2} \tag{1.4}$$

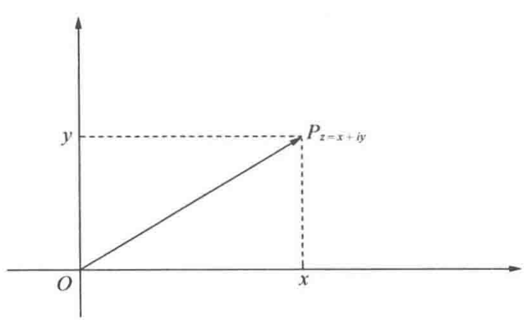


图 1 – 1

显然,下列各式成立:

$$|x| \leqslant |z|, |y| \leqslant |z|, |z| \leqslant |x| + |y|, z\bar{z} = |z|^2 = |z^2|$$

在 $z \neq 0$ 的情况,以正实轴为始边,以表示 z 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 为终边的角的弧度数 θ 称为 z 的辐角,记作

$$\mathrm{Arg}z = \theta$$

这时有

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \tag{1.5}$$

我们知道,任何一个复数 $z \neq 0$ 都有无穷多个辐角. 如果 θ_1 是其中的一个,那么

$$\mathrm{Arg}z = \theta_1 + 2k\pi(k \text{ 为任意整数}) \tag{1.6}$$

就给出了 z 的全部辐角. 在 $z(\neq 0)$ 的辐角中,我们把满足 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值,记作 $\theta_0 = \arg z$. 当 $z = 0$ 时,$|z| = 0$,而辐角不确定.

易见的计算公式如下:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x} & x > 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & x = 0, y > 0 \\ \dfrac{-\pi}{2} & x = 0, y < 0 \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi & x < 0, y \geqslant 0 \\ \arctan\dfrac{y}{x} - \pi & x < 0, y < 0 \end{cases}$$

根据复数的运算法则可知,两个复数 z_1 和 z_2 的加、减法运算和相应向量的加、减法运算一致,如图 1 - 2 所示.

我们又知道,$|z_1 - z_2|$ 表示点 z_1 与 z_2 之间的距离,因此由图(1 - 2) 我们有

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \text{ (三角不等式)} \tag{1.7}$$

$$|z_1 - z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big| \tag{1.8}$$

一对共轭复数 z 和 $\bar{z}$,通过计算知 $|z| = |\bar{z}|$,如果 z 不在负实轴和原点上,还有

$$\arg z = -\arg\bar{z}$$

利用直角坐标与极坐标的关系

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

还可以把它表示成下面的形式

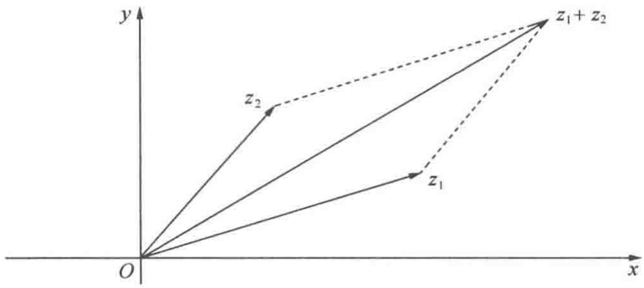


图 1 - 2

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1.9}$$

称为复数的三角表示式.

再利用欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

我们又可以得到

$$z = re^{i\theta}$$

这种表示形式称为复数的指数表示形式.

复数的各种表示形式可以相互转换,以适应讨论不同问题时的需要.

例 1.4 将下列复数化为三角表示式与指数表示式.

(1)$z = -\sqrt{12} - 2i$;(2)$z = \sin\dfrac{\pi}{5} + i\cos\dfrac{\pi}{5}$.

解:(1) 显然,$r = |z| = \sqrt{12+4}$. 由于 z 在第三象限,由式(1.5) 知

$$\theta = \arctan\left(\frac{-2}{-\sqrt{12}}\right) - \pi = \arctan\frac{\sqrt{3}}{3} - \pi = -\frac{5}{6}\pi$$

因此,z 的三角表示式为

$$z = 4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right]$$

z 的指数表示式为 $z = 4e^{-\frac{5}{6}\pi i}$.

(2) 显然,$r = |z| = 1$,又

$$\sin\frac{\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{3}{10}\pi$$

$$\cos\frac{\pi}{5} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{3}{10}\pi$$

故 z 的三角表示式为

$$z = \cos\frac{3}{10}\pi + i\sin\frac{3}{10}\pi$$

z 的指数表示式为 $z = e^{\frac{3}{10}\pi i}$.

例 1.5 设 z_1, z_2 为两个任意复数,试证明:

(1) $|z_1\overline{z_2}| = |z_1||z_2|$;

(2) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

证明:(1) $|z_1\overline{z_2}| = \sqrt{(z_1\overline{z_2})(\overline{z_1\overline{z_2}})} = \sqrt{(z_1\overline{z_2})(\overline{z_1}z_2)} = \sqrt{(z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2})}$

$= |z_1||z_2|$;

(2) 上面我们已经用几何的方法得到了三角不等式,现在用复数的运算来证明它. 因为

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2})$$
$$= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2}$$

由例 1.3,

$$z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$$

所以

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z_2}|$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2$$

两边开方就得到所要证明的三角不等式.

下面的例子表明,很多平面图形能用复数形式的方程(或不等式)来表示;也可以由给定的复数形式的方程(或不等式)来确定它所表示的平面图形.

例 1.6 将通过两点 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 的直线用复数形式的方程来表示.

解:我们知道,通过点 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 的直线可以用参数方程来表示为

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

因此它的复数形式的参数方程为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad (-\infty < t < +\infty)$$

由此得知,由 z_1 到 z_2 的直线段的参数方程可以写成

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

取 $t = \frac{1}{2}$,得知线段 z_1 与 z_2 的中点为

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

例 1.7 求以 $z_0 = x_0 + iy_0$ 为中心,以 R 为半径的圆周参数方程的形式.

解:在解析几何中,该圆的参数方程为$\begin{cases} x = x_0 + R\cos\theta \\ y = y_0 + R\sin\theta \end{cases}$ $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$,

故有复数形式 $z = z_0 + Re^{i\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

例 1.8 求下列方程所表示的曲线:

(1) $|z + i| = 2$;

(2) $|z - 2i| = |z + 2|$;

(3) $\mathrm{Im}(i + \bar{z}) = 4$.

解:(1) 在几何上不难看出,方程 $|z + i| = 2$ 表示所有与点 $-i$ 距离为 2 的点的轨迹,即中心为 $-i$、半径为 2 的圆. 下面用代数方法求出该圆的直角坐标方程.

设 $z = x + iy$,方程变为

$$|x + (y + 1)i| = 2$$

也就是

$$\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = 2$$

或

$$x^2 + (y + 1)^2 = 4$$

(2) 几何上,该方程表示到点 $2i$ 和 -2 距离相等的点的轨迹,所以方程表示的曲线就是连接点 $2i$ 和 -2 的线段的垂直平分线,它的方程为 $y = -x$. 这一方程也可以用代数的方法求得,但需要读者自己完成.

(3) 设 $z = x + iy$,那么

$$i + \bar{z} = x + (1 - y)i$$

所以

$$\mathrm{Im}(i + \bar{z}) = 1 - y$$

从而立即可得所求曲线的方程为 $y = -3$,这是一条平行于 x 轴的直线.

1.2.2 复球面

除了用平面内的点或向量来表示复数外,还可以用球面上的点来表示复数. 现在我们来介绍这种表示方法.

取一个与复平面切于原点 $z = 0$ 的球面,球面上的一点 S 与原点重合(图 1 - 3).

通过 S 作垂直于复平面的直线与球面相交于另一点 N,我们称 N 为北极,S 为南极.

对于复平面内任意一点 z,如果用一直线段把点 z 与北极 N 连接起来,那么该直线段一定与球面相交于异于 N 的一点 P. 反过来,对于球面上任何一个异于 N 的点 P,用一直线段把 P 与 N 连接起来,这条直线段的延长线就与复平面相交于一点 z. 这就说明:球面上的点,除去北极 N 外,与复平面内的点之间

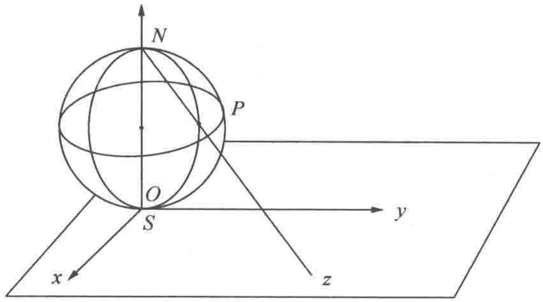


图1－3

存在着一一对应关系. 前面已经讲过，复数可以看作是复平面内的点，因此球面上的点，除去北极 N 外，与复数一一对应. 这就是我们可以用球面上的点来表示复数的原因.

但是，对于球面上的北极 N，还没有复平面内的一个点与它对应. 从图1－3中容易看到，当 z 点无限地远离原点时，或者说，当复数 z 的模 $|z|$ 无限地变大时，点 P 就无限地接近于 N. 为了使复平面与球面上的点无例外地都能一一对应起来，我们规定：复平面上有一个唯一的"无穷远点"，它与球面上的北极 N 相对应. 相应地，我们又规定：复数中有一个唯一的"无穷大"与复平面上的无穷远点相对应，并把它记作 ∞，因而球面上的北极 N 就是复数无穷大 ∞ 的几何表示. 这样一来，球面上的每一个点都有唯一的一个复数与它对应，这样的球面称为复球面.

我们把包括无穷远点在内的复平面称为扩充复平面，不包括无穷远点在内的复平面称为有限平面，或者就称复平面. 对于复数 ∞ 来说，实部、虚部与辐角的概念均无意义，但它的模则规定为正无穷大，即 $|\infty| = +\infty$. 对于其他每一个复数 z，则有 $|z| < +\infty$. 复球面能把扩充复平面的无穷远点明显地表示出来，这就是它比复平面优越的地方.

为了今后的需要，关于 ∞ 的四则运算作如下规定：

加法：$\alpha + \infty = \infty + \alpha \ (\alpha \neq \infty)$

减法：$\alpha - \infty = \infty - \alpha \ (\alpha \neq \infty)$

乘法：$\alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha \ (\alpha \neq 0)$

除法：$\dfrac{\alpha}{\infty} = 0, \dfrac{\infty}{\alpha} = \infty \ (\alpha \neq \infty), \dfrac{\alpha}{0} = \infty \ (\alpha \neq 0$，但可为 $\infty)$

至于其他运算：$\infty \pm \infty, 0 \cdot \infty, \dfrac{\infty}{\infty}$，我们不规定其意义. 像在实变数中一

样,$\dfrac{0}{0}$仍然不确定.这里我们引进的扩充复平面与无穷远点,在很多讨论中,能够带来方便.但在本书以后各处,如无特殊声明,所谓“平面”一般仍指有限平面,所谓“点”仍指有限平面上的点.

1.3 复数的乘幂与方根

1.3.1 乘积与商

设有两个复数

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

那么

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

于是

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2| \tag{1.10}$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2 \tag{1.11}$$

从而有下面定理.

定理 1.1 两个复数乘积的模等于它们的模的乘积;两个复数乘积的辐角等于它们的辐角的和.

因此,当利用向量来表示复数时,可以说表示乘积 z_1z_2 的向量是从表示 z_1 的向量旋转一个角度 $\mathrm{Arg}z_2$,并伸长(缩短)到 $|z_2|$ 倍得到的.特别当 $|z_2| = 1$ 时,乘法变成了只是旋转.例如,iz 相当于将 z 逆时针旋转 $90°$,$-z$ 相当于将 z 逆时针旋转 $180°$.又当 $\arg z_2 = 0$ 时,乘法就变成了只是伸长(缩短).

读者要正确理解等式(1.11).由于辐角的多值性,因此,该等式两端都是由无穷多个数构成的两个数集,等式(1.11)表示两端可能取值的全体是相同的.也就是说,对于左端的任一值,右端必有一值和它相等,并且反过来也一样.例如,设 $z_1 = -1, z_2 = i$,则

$$z_1z_2 = -i$$

$$\mathrm{Arg}z_1 = \pi + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$$\mathrm{Arg}z_2 = \frac{\pi}{2} + 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$$\mathrm{Arg}z_1z_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

代入等式(1.11)得

$$\frac{3\pi}{2}+2(m+n)\pi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

要使上式成立,必须且只需 $k=m+n+1$. 只要 m 与 n 各取一确定的值,总可选取值 k 使 $k=m+n+1$,反之也一样. 若取 $m=n=0$,则取 $k=1$;若取 $k=-1$,则可取 $m=0,n=-2$ 或 $m=-2,n=0$.

如果用指数形式来表示复数:

$$z_1=r_1e^{i\theta_1},z_2=r_2e^{i\theta_2}$$

那么定理 1.1 可以简明地表示为 $z_1z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

由此逐步可证,如果

$$z_k=r_ke^{i\theta_k}=r_k(\cos\theta_k+i\sin\theta_k),(k=1,2,\cdots,n)$$

那么

$$\begin{aligned}z_1z_2\cdots z_n&=r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]\\&=r_1r_2\cdots r_ne^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}\end{aligned}$$

按照商的定义,当 $z_1\neq 0$ 时,有

$$z_2=\frac{z_2}{z_1}z_1$$

由式(1.10)、式(1.11)就有

$$|z_2|=\left|\frac{z_2}{z_1}\right||z_1|,\mathrm{Arg}z_2=\mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)+\mathrm{Arg}z_1$$

于是

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=\frac{|z_2|}{|z_1|},\mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)=\mathrm{Arg}z_2-\mathrm{Arg}z_1$$

由此得下面的定理.

定理 1.2 两个复数的商的模等于它们的模的商;两个复数的商的辐角等于被除数与除数的辐角之差.

如果用指数形式表示复数 $z_1=r_1e^{i\theta_1},z_2=r_2e^{i\theta_2}$

那么定理 1.2 可以简明地表示为 $\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{r_2}{r_1}e^{i(\theta_2-\theta_1)}\quad(r_1\neq 0)$ (1.12)

1.3.2 幂与根

n 个相同复数 z 的乘积称为 z 的 n 次幂,记作 z^n,即

$$z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot\cdots\cdot z}_{n个}$$

在前面式子中,令从 z_1 到 z_n 的所有复数都等于 z,那么对于任何正整数 n,

我们有

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \tag{1.13}$$

如果我们定义$z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$,那么当n为负整数时上式也是成立的.作为练习,由读者自己证明.

特别当z的模$r = 1$,即$z = \cos\theta + i\sin\theta$时,由式(1.13)有

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{1.14}$$

这就是德莫弗公式.

公式(1.13)与(1.14)有广泛的应用.下面我们用它们来求方程$w^n = z$的根w,其中z为已知复数.我们即将看到,当z的值不等于零时,就有n个不同的w值与它对应.每一个这样的值称为z的n次根,都记作$\sqrt[n]{z}$,即

$$w = \sqrt[n]{z}$$

为了求出根w,我们令$z = re^{i\mathrm{Arg}z}$和$\arg z = \theta$,所以有

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{z} &= r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{1}{n}\mathrm{Arg}z} = r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{1}{n}(\theta+2k\pi)}\\ &= r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{1}{n}(\theta + 2k\pi) + i\sin\frac{1}{n}(\theta + 2k\pi)\right) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)\end{aligned}$$

因此,方程的n个根为

$$w = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0,1,2,\cdots,n-1) \tag{1.15}$$

例 1.9 求$\sqrt[2]{1 + i}$.

解:因为$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

所以

$$\sqrt[2]{1 + i} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2}\right) \quad (k = 0,1)$$

即

$$w_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

$$w_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9}{8}\pi + i\sin\frac{9}{8}\pi\right)$$

1.4 区 域

现在我们来研究复变数的问题.同实变数一样,每一个复变数都有自己的