浙江省“十一五”重点教材建设项目

图论及其应用

TULUN JIQI YINGYONG

（第2版）

卜月华　王维凡　吕新忠　编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

图论及其应用

（第 2 版）

卜月华　王维凡　吕新忠　编著

东南大学出版社
·南京·

内容提要

本书共9章，主要包括图的基本概念、图的连通性、树、Euler环游和Hamilton圈、图的对集和独立集、平面图、图的染色、网络流以及图论在数学建模中的应用等内容。本书不仅介绍了图论的基本概念和基本理论，也介绍了如何应用图论方法解决实际问题。

本书推理严密，内容深入浅出，清晰易懂，并配置了丰富而有趣的例题和习题。本书适合作为高等院校各专业图论课程的教材或参考书，也可以作为大学生数学建模集训的参考读物。

图书在版编目(CIP)数据

图论及其应用/卜月华，王维凡，吕新忠编著．—2版．—南京：东南大学出版社，2015.5

ISBN 978-7-5641-5674-9

Ⅰ．图… Ⅱ．①卜…②王…③吕… Ⅲ．图论—应用—高等学校—教材 Ⅳ．①O157.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第084608号

图论及其应用(第2版)

出版发行	东南大学出版社
社　　址	南京市四牌楼2号(邮编：210096)
出 版 人	江建中
责任编辑	吉雄飞(办公电话：025-83793169)
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	南京京新印刷厂
开　　本	700mm×1000mm　1/16
印　　张	15.75
字　　数	309千字
版　　次	2015年5月第2版
印　　次	2015年5月第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5641-5674-9
定　　价	35.00元

本社图书若有印装质量问题，请直接与营销部联系，电话：025-83791830。

前 言

图论是组合数学的一个重要分支，与其他的数学分支，如群论、矩阵论、概率论、拓扑学、数值分析等有着密切的联系。凡有二元关系的系统，应用图论均可建立一种合适的数学模型，因而图论在许多学科领域，如计算机科学、通讯科学、运筹学、电网络分析、化学、物理、管理以及社会科学等领域具有重要地位和广泛应用。此外，图论的理论与方法也是数学竞赛、数学建模等的理论基础和工具。因此在本书的大部分章节中介绍了一些应用实例，特别在第 9 章收集了若干图论在数学建模中的应用案例，读者可以从中掌握利用图论解决实际问题的基本方法和技巧。目前，图论已成为计算机科学、运筹学、组合优化、机电等学科的基本课程之一，国内外许多高校不仅对数学系的本科学生开设了图论课程，也面向其他专业学生开设了图论选修课程。

本书是在卜月华编写的《图论及其应用》的基础上，根据浙江省重点建设教材的要求并结合本科学生的特点和多年来的教学实践，由卜月华、王维凡和吕新忠重新编写而成。全书共分 9 章，前 6 章由卜月华编写整理，第 7 章由王维凡编写整理，第 8 章和第 9 章由吕新忠编写整理。内容不仅涉及图论的基本概念和基本理论，还力求突出图论方法的应用，尤其是在数学竞赛和数学建模中的应用。为使读者在使用本书时能自觉地调动学习积极性，更好地领悟图论的本质，每章后都配置了丰富而有趣的习题。本书适合作为高等院校各专业图论课程的教材或参考书，也可以作为大学生数学建模集训的参考读物。

在本书的再版过程中，编者参阅了国内外许多优秀的图论专著、教材及学术论文，特别参考了宋增民教授编著的《图论与网络最优化》一书，许多使用过初版《图论及其应用》一书的教师也对这一次再版工作提出了宝贵意见。在此编者表示衷心的感谢。

本书是浙江省重点建设教材，在出版过程中得到了浙江师范大学的教育部综合改革试点专业“数学与应用数学专业”的大力支持，在此深表感谢。

由于编者水平有限，在编写过程中对内容虽经反复推敲与修改，仍不可避免存在一些错误与疏漏，恳请同行专家、使用本教材的教师和学生以及其他读者不吝赐教，提出宝贵意见。

编者

2015 年 1 月

目　录

1　图的基本概念

1.1　图论发展史

图论是一门应用十分广泛、内容非常丰富的数学学科，也是近几十年来较为活跃的数学分支之一. 它起源很早，瑞士数学家欧拉(L. Euler)在1736年解决了当时颇为有名的一个数学问题，即哥尼斯城堡七桥问题，从而使他成为图论的创始人. 哥尼斯城堡位于俄罗斯的加里宁格勒，历史上曾是德国东普鲁士省的省会，普雷格尔河横贯城堡，河中有两个小岛 A 与 D，并有七座桥连接岛与河岸及岛与岛(见图1.1). 当地居民提出：是否存在一种走法，从 A,B,C,D 四块陆地中的任意一块开始，通过每一座桥恰好一次再回到起点?

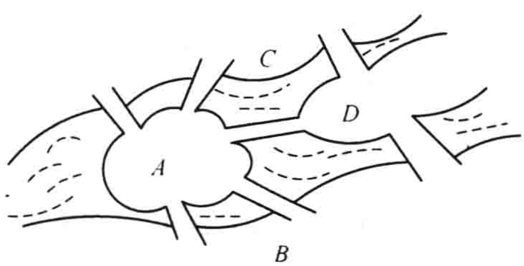

图1.1　哥尼斯城堡的七桥

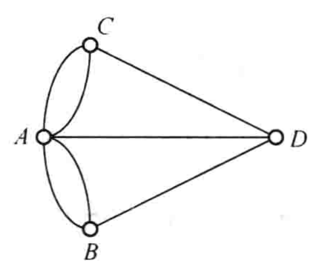

图1.2　哥尼斯城堡对应的图

欧拉为了解决这七桥问题，把它转化为一个数学问题来解决. 他认为这种走法是否存在与两岸和两个岛的大小形状及桥的长短、曲直都没有关系，重要的是两块陆地之间有几座桥连接. 他用一个点表示一块陆地的区域，用连接相应顶点的线段表示各座桥，这样就得出七桥问题的示意图(见图1.2). 于是问题就转化为在这个图中，是否能从某一点出发经过每条线段恰好一次再回到出发点. 欧拉在1736年论证了在这个图中如此走法是不存在的，并且推广了这个问题——对于一个给定的图可以如此走遍给出了一个判别法则.

基尔霍夫(Kirchhoff)在1847年运用图论解决了电路理论中求解联立方程组问题，并引进了“树”的概念. 可惜的是，他的思想方法超越了时代而长期未被重视. 1857年凯莱(Caley)非常自然的在有机化学的领域里发现了一族重要的图，称其为树，并应用树来计算饱和碳氢化合物 C_nH_{2n+2} 的同分异构体的数目.

早期的图论还与数学游戏发生密切联系，如汉密尔顿(W. R. Hamilton)的周游世界问题. 他用一个正十二面体(具有12个五边形的面和20个顶点)的20个顶

点表示世界上的20座大城市(见图1.3),提出如下问题:要求游戏者找一条沿十二面体的棱通过每个顶点恰好一次的闭路. 图1.3所示的$a,b,\cdots,s,t,a$表示出了这样的一条闭路.

20世纪后,图论的应用渗透到许多其他学科领域,如物理、化学、信息学、运筹学、管理学、博弈论、计算机网络、社会学、语言学等. 从20世纪50年代以后,由于计算机的迅速发展,有力地推动了图论的发展,使图论成为数学领域中发展最快的分支之一.

图论是组合数学的一分支,与其他的数学分支,如群论、矩阵论、概率论、拓扑学、数值分析等有着密切的联系. 对于基础图论来说,它不要求有高深复杂的数学工具,只需一些集合、二元关系和线性代数等知识,并可用一般的逻辑推理解决若干问题. 因此对年轻的数学爱好者来说,图论是他们极好的研究园地.

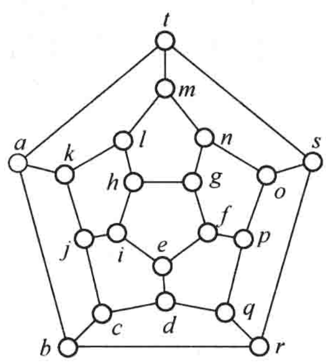

图 1.3　十二面体所对应的图

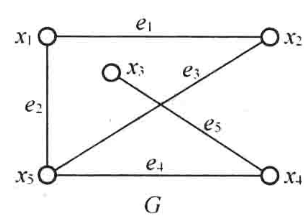

图 1.4　例 1.1 对应的一个图示

1.2　图的定义

我们这里所讨论的图并不是几何学中的图形,而是客观世界中某些具体事物间相互联系的一个数学抽象. 用顶点(小圆点)代表事物,用边表示某些事物间的二元关系,如果所讨论的某两个事物之间有某种二元关系,我们就在相应的两个顶点之间连一条边. 这种由顶点及连接这些顶点的边所组成的图就是我们图论中所研究的图(如图1.2所示,欧拉把七桥问题转化为有4个点、7条线段的这种图).

例 1.1　在一次集会中有5位代表x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,其中x_2与x_1,x_1与x_5,x_2与x_5,x_3与x_4,x_4与x_5是朋友,则我们可以用一个有5个顶点、5条边的图形来表示这5位代表间的朋友关系(见图1.4).

值得注意的是,在图1.4中两条边e_3与e_5有一个交叉点,但这个点并不是我们所关注的顶点,只是两条边的交叉点. 下面我们给图下一个明确的数学定义.

定义 1.2.1　设$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$是一个非空有限集合,$E(G)=\{e_1,e_2,\cdots,e_q\}$是与$V(G)$不相交的有限集合. 一个**图**$G$是指一个有序三元组$(V(G)$,

$E(G),\psi_G)$，其中 ψ_G 是**关联函数**，它使 $E(G)$ 中每一个元素对应于 $V(G)$ 中的一个无序元素对(可以相同).

如例 1.1 中，五位代表之间的朋友关系所对应的图为 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$，其中 $V(G)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，$E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$，$\psi_G(e_1)=x_1x_2$，$\psi_G(e_2)=x_1x_5$，$\psi_G(e_3)=x_2x_5$，$\psi_G(e_4)=x_4x_5$，$\psi_G(e_5)=x_3x_4$.

图 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$ 中，$V(G)$ 和 $E(G)$ 分别称为 G 的顶点集合和边集合. $V(G)$ 中的元素称为 G 的**顶点(或点)**，$E(G)$ 中的元素称为 G 的**边**，$p(G)=|V(G)|$ 和 $q(G)=|E(G)|$ 分别称为图 G 的点数(或**阶**)和边数.

一个图 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$ 可以用平面上一个图形表示. 用平面上的小圆圈表示图 G 的顶点，用点与点之间的连线表示 G 中的边. 明显的，同一个图可以有许多形状不同的图形表示.

例 1.2　图 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$，其中 $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，$E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$，$\psi_G(e_1)=v_1v_1$，$\psi_G(e_2)=v_1v_2$，$\psi_G(e_3)=v_2v_3$，$\psi_G(e_4)=v_2v_3$，$\psi_G(e_5)=v_3v_4$，$\psi_G(e_6)=v_4v_1$.

这个图 G 是具有 4 个顶点、6 条边的图，其图形如图 1.5 所示.

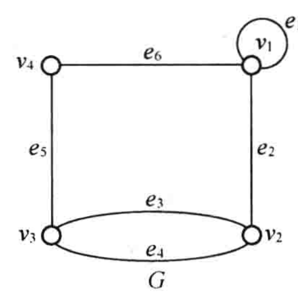

图 1.5　例 1.2 对应的一个图示

在一个图 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$ 中，如果 $\psi_G(e)=uv$，我们就说边 e 连接顶点 u 和 v，称 u 和 v 是 e 的**端点**，也称 u 和 v **相邻**；同时也称 u(或 v) 与 e **关联**. 与同一个顶点关联的若干条边称为是**相邻的**. 两个端点重合为一个顶点的边称为**环**. 关联于同一对顶点的二条或二条以上的边称为**重边**(或**平行边**). 如图 1.5 所示的图 G 中，边 $\psi_G(e_1)=v_1v_1$ 是 G 的一个环，两条边 $e_3(\psi_G(e_3)=v_2v_3)$ 和 $e_4(\psi_G(e_4)=v_2v_3)$ 是 G 的重边. 一个图 G 如果没有环和重边，则称该图为**简单图**. 如图 1.4 所示的图便是一个简单图.

如果一个图 G 的顶点集 $V(G)$ 和边集 $E(G)$ 都是有限集，则称该图为**有限图**，否则称为**无限图**. 本书仅讨论有限图. 只有一个顶点所构成的图称为**平凡图**，其他所有图称为非平凡图. 显然，至少有一个顶点才能称为图，所以我们总要求一个图的顶点集合是非空的.

一般的，我们将图 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$ 简记为 $G=(V(G),E(G))$ 或 $G=(V,E)$. 在图 $G=(V,E)$ 中，若边 e 连接顶点 u 和 v，可记为 $e=uv$.

从图的定义不难发现，我们所讨论的图与图的几何形状没有关系，即与顶点的位置(但两个不同的顶点不能重合)及连接它们的边的曲、直、长、短都没有关系(但一条边除了两个端点外，不再通过其他顶点). 我们所关注的只是各顶点之间是否有边或有几条边连接. 例如，图 1.4 所示的 G 也可以画成图 1.6 所示的图 H. 显

然，这两个图都表明了这五位代表间的朋友关系. 我们把这种不存在本质差别的两个图称为是同构的.

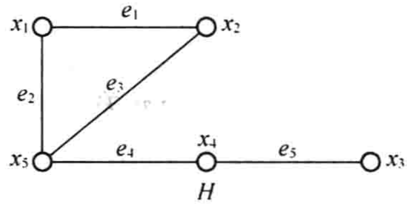

图 1.6　例 1.1 的另外一个图示

定义 1.2.2　设 $G_1=(V_1,E_1)$ 与 $G_2=(V_2,E_2)$ 是两个图，若存在一一对应 $\varphi_1:V_1\to V_2$ 及一一对应 $\varphi_2:E_1\to E_2$，使对每条边 e，$e=uv\in E_1$ 当且仅当 $\varphi_2(e)=\varphi_1(u)\varphi_1(v)\in E_2$，则称 G_1 和 G_2 是**同构**的，记为 $G_1\cong G_2$.

对于两个简单图，其同构定义可简化如下.

定义 1.2.3　设 $G_1=(V_1,E_1)$ 与 $G_2=(V_2,E_2)$ 是两个简单图，若存在一一对应 $\varphi:V_1\to V_2$，使得对 G_1 中任意两个顶点 u 和 v，$uv\in E_1$ 当且仅当 $\varphi(u)\varphi(v)\in E_2$，则称 G_1 和 G_2 是**同构**的，记为 $G_1\overset{\varphi}{\cong}G_2$ 或 $G_1\cong G_2$.

例如，对图 1.7 所示的两个图 G_1 和 G_2，我们可以建立顶点之间的对应关系如下：

$$\varphi: x_1\leftrightarrow v_1,\ x_2\leftrightarrow v_2,\ x_3\leftrightarrow v_3,\ y_1\leftrightarrow u_1,\ y_2\leftrightarrow u_2,\ y_3\leftrightarrow u_3.$$

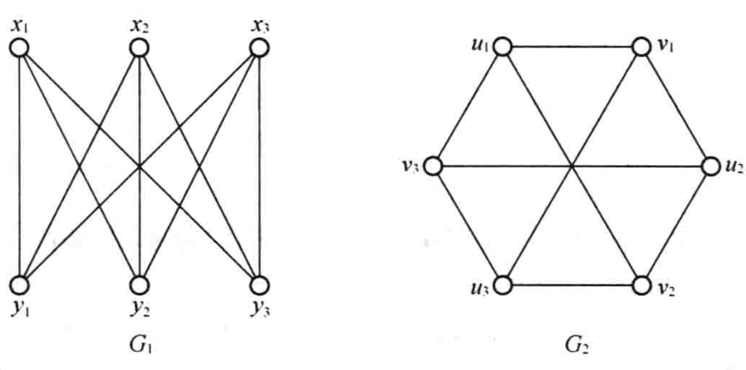

图 1.7　两个同构的图

容易看出，G_1 中的三个顶点 x_1,x_2,x_3 互不相邻，y_1,y_2,y_3 互不相邻，而 $x_iy_j\in E(G_1)(i=1,2,3;j=1,2,3)$. 在 φ 对应下，G_2 中的三个顶点 v_1,v_2,v_3 互不相邻，u_1,u_2,u_3 互不相邻，而 $v_iu_j=\varphi(x_i)\varphi(y_j)\in E(G_2)(i=1,2,3;j=1,2,3)$. 由图的同构定义，$G_1\cong G_2$.

对于两个同构的图，易见它们有相同的结构，差异只是顶点和边的名称不同，或两个图的形状不同. 由于我们主要关注的是图的结构性质，所以在画图时常常省略顶点和边的标号. 一个无标号图就认为是同构图的等价类的代表.

关于图的同构,有一个著名的重构猜想.

Ulam 猜想(S. M. U(1929),P. T. Kelly(1941)) 设 G 与 H 是两个阶数相同的图,若存在这两个图的顶点序列的一个排序 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$ 和 $V(H)=\{u_1,u_2,\cdots,u_p\}$,使 $G-v_i\cong H-u_i(i=1,2,\cdots,p)$,则 $G\cong H$.

注:$G-v$ 表示从图 G 中删除顶点 v 和与 v 关联的所有边所得到的图.

这个猜想至今尚未完全解决.

通过前面的讨论可发现,一个图实质上给出了顶点之间的一种二元关系.因而在客观世界中,一些事物间若带有某种二元关系,就可以用一个图来描述这些事物之间的相互关系.像人与人之间的朋友关系、同学关系、相互认识关系等均可用一个图来描述.一般情况下,用图的顶点表示某个问题中所讨论的对象,而边表示这些对象之间的某种二元关系,所构成的图就描述了这些对象之间的二元关系,我们可以通过对该图的讨论去解决相应的问题.

例 1.3 一个团体由 2011 个人组成,其中任意 4 名成员中必有 1 名成员与其他 3 名成员互相认识.

(1) 证明:任意的 4 个人中必存在 1 人,他与其余的 2010 个人互相认识.

(2) 该团体中与所有其他人都互相认识的人最少有几个?

解 (1) 我们先证明"任意 4 名成员中必有 1 名成员,他与该团体中其他所有成员互相认识".由于这个问题考虑的是 2011 个人之间的相互认识关系,因此我们可以用 2011 个顶点表示 2011 个人,两个顶点相邻当且仅当所对应的两个人互相认识.所构造的图 G 是一个具有 2011 个顶点的简单图,其条件是任意的 4 个顶点中必有一个顶点与另外的 3 个顶点相邻,我们只要证明图 G 中的任意 4 个顶点中必有一个顶点与其余 2010 个顶点相邻.

若结论不成立,则存在 4 个顶点 v_1,v_2,v_3,v_4,使得对每个顶点 $v_i(i=1,2,3,4)$,G 中存在一个顶点 u_i 与 v_i 不相邻.由条件,v_1,v_2,v_3 和 v_4 中有一个顶点与其他三个顶点相邻,不妨设为 v_1.若 $u_1\neq u_2$,则 v_1,v_2,u_1,u_2 中没有一个顶点与其余三个顶点相邻,矛盾;若 $u_1=u_2$,但 $u_2\neq u_3$,则 v_1,v_3,u_1,u_3 中没有一个顶点与其余三个顶点相邻,矛盾;若 $u_1=u_2=u_3$,则 v_1,v_2,v_3,u_1 中没有一个顶点与其余三个顶点相邻,矛盾.

(2) 由上面所得结论,这 2011 名成员中至多有 3 人,他们当中的每个人至多与该团中的 2009 个人互相认识,所以该团中至少有 2008(2011 − 3) 个人,他们中的每个人与该团中其他所有的成员互相认识.

1.3 顶点的度

定义 1.3.1 图 $G=(V,E)$ 中,与顶点 v 相关联的边数(每个环计算二次) 称

为顶点 v 的**度**，记为 $d_G(v)$（或 $d(v)$）. 度为 0 的顶点称为**孤立顶点**.

我们称 $\delta(G)=\min\limits_{v\in V}\{d_G(v)\}$ 和 $\Delta(G)=\max\limits_{v\in V}\{d_G(v)\}$ 为 G 的**最小度**和**最大度**.

例如，图 1.8 所示的图 G 中 $d_G(u_1)=4$，$d_G(u_2)=5$，$d_G(u_3)=2$，$d_G(u_4)=3$，$d_G(u_5)=4$，$\delta(G)=2$，$\Delta(G)=5$.

如果 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$，称非负整数序列 $(d(v_1),d(v_2),\cdots,d(v_p))$ 为图 G 的**度序列**.

例如，图 1.8 所示的图 G 的度序列为 $(4,5,2,3,4)$.

设 S 是 $V(G)$ 的一个非空子集，v 是 G 的一个顶点，称

$$N_S(v)=\{u\in S\mid uv\in E(G)\}$$

为 v 在 S 中的**邻域**. 特别当 $S=V(G)$ 时，则简记 $N_G(v)$ 为 $N(v)$. 明显的，当 G 是简单图时，$d_G(v)=|N(v)|$.

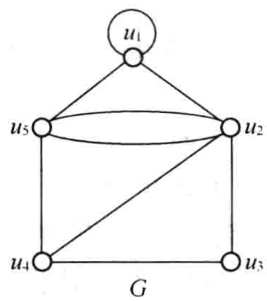

图 1.8　度序列为(4,5,2,3,4)的图

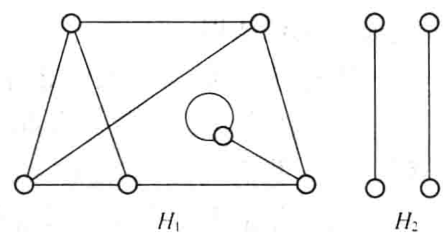

图 1.9　两个正则图

定义 1.3.2　如果一个图中每个顶点的度是某一个固定整数 k，则称该图是 $\boldsymbol{k}$ **-正则图**.

例如，图 1.9 所示的 H_1 与 H_2 分别是 3 -正则图和 1 -正则图.

从顶点度的定义不难发现，由于每条边有两个端点，从而每条边对 $\sum\limits_{v\in V(G)} d_G(v)$ 的贡献恰好是 2，因而可得以下结论.

定理 1.3.1（度和公式）　对每一个图 $G=(V,E)$，均有

$$\sum_{v\in V} d_G(v)=2q(G).$$

为了方便起见，我们把度为奇数的顶点称为**奇点**，度为偶数的顶点称为**偶点**.

推论 1.3.2　在任何图 $G=(V,E)$ 中，奇点的个数为偶数.

证明　我们把图 G 的顶点集 V 划分为两部分 V_1 和 V_2，其中 V_1 是 G 中所有的奇点，V_2 是 G 中所有的偶点，则 $V=V_1\cup V_2$，$V_1\cap V_2=\varnothing$. 由定理 1.3.1 得

$$2q(G)=\sum_{v\in V} d_G(v)=\sum_{v\in V_1} d_G(v)+\sum_{v\in V_2} d_G(v),$$

而 $\sum\limits_{v\in V_2} d_G(v)$ 是偶数，所以 $\sum\limits_{v\in V_1} d_G(v)$ 也是一个偶数，即推得 $|V_1|$ 是偶数. □

推论 1.3.3 非负整数序列$(d_1,d_2,\cdots,d_p)$是某个图的度序列当且仅当$\sum\limits_{i=1}^{p}d_i$是偶数.

证明 由定理 1.3.1 可知必要性成立. 对于充分性,取 p 个相异顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_p$,若 d_i 是偶数,就在 v_i 处作$\dfrac{d_i}{2}$个环;若 d_i 是奇数,在 v_i 处作$\dfrac{d_i-1}{2}$个环. 由于$\sum\limits_{i=1}^{p}d_i$ 为偶数,故 $d_1,d_2,\cdots,d_p$ 中有偶数个奇数项,从而将所有与奇数 d_i 相对应的这些顶点 v_i 两两配对并连上一条边. 最后所得图的度序列就是$(d_1,d_2,\cdots,d_p)$. □

需要注意的是,以非负整数序列$(d_1,d_2,\cdots,d_p)$$\left(\sum\limits_{i=1}^{p}d_i\text{ 是偶数}\right)$为度序列的图一般有很多.

例如,图 1.10 所示的 G_1 和 G_2 的度序列均是(7,3,1,4,6,5).

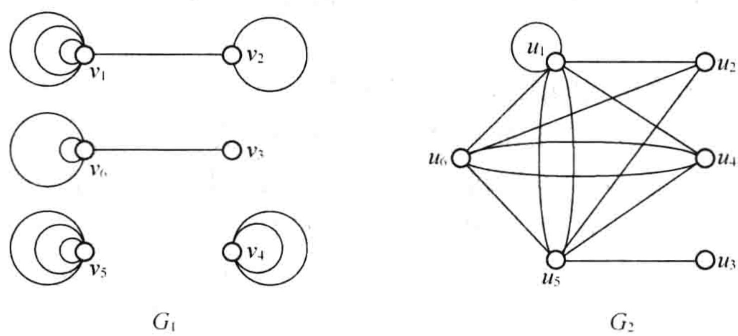

图 1.10 度序列为(7,3,1,4,6,5)的两个图

简单图的度序列称为**图序列**. 图序列的讨论或判断要比度序列的讨论困难得多,即使知道非负整数序列$(d(v_1),d(v_2),\cdots,d(v_p))$是图序列,要构造相应的简单图仍是相当困难的.

Erdös 和 Callai 在 1960 年给出了图序列的一个判别方法.

定理 1.3.4 非负整数序列$(d_1,d_2,\cdots,d_p)$$(d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_p)$是图序列当且仅当$\sum\limits_{i=1}^{p}d_i$是偶数,并且对一切整数 $k(1\leqslant k\leqslant p-1)$,有

$$\sum_{i=1}^{k}d_i\leqslant k(k-1)+\sum_{i=k+1}^{p}\min\{k,d_i\}.$$

此定理的证明从略.

下面我们给出几个例子,作为上述定理或推论的应用.

例 1.4 在平面上有 n 个点,即 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,其中任两个点之间的距离至少是 1. 证明:在这 n 个点中,距离为 1 的点对数不超过 $3n$.

证明 首先建立一个图 $G=(V,E)$,其中 V 就取 S 中的 n 个点,V 中的两个

顶点有边连接当且仅当这两点之间的距离恰好为 1，则所得图 G 是一个简单图，S 中距离为 1 的点对数就是 G 的边数. 因此，我们只需证明 $q(G) \leqslant 3n$.

任取 $x_i \in V$，假设 G 中与 x_i 相邻的顶点为 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}$ $(k = d_G(x_i))$，则 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}$ 必分布在以 x_i 为圆心的单位圆周上，所以 $k \leqslant 6$，即 $d_G(x_i) \leqslant 6, i = 1, 2, \cdots, n$. 现由定理 1.3.1 得

$$2q(G) = \sum_{i}^{n} d_G(x_i) \leqslant 6n,$$

即 $q(G) \leqslant 3n$.

例 1.5 某次会议有 n 人参加，其中有些人互相认识，但每两个互相认识的人都没有共同的熟人，每两个互不认识的人都恰好有两个共同的熟人. 证明：每一个参加者都有同样数目的熟人.

证明 作图 $G = (V, E)$，V 中有 n 个顶点，分别代表参加会议的 n 名代表，V 中两个顶点相邻当且仅当这两个顶点所对应的代表互相认识，则只要证明 G 是一个正则图.

根据题意，如此构造的图 G 满足以下两条：

(1) 若 x 与 y 在 G 中相邻，则不存在 $u \in V$，使 ux 与 uy 均是 G 中的边；

(2) 若 x 与 y 在 G 中不相邻，则恰好存在两个不同于 x 和 y 的顶点 u 与 v，使 $\{ux, uy, vx, vy\} \subseteq E(G)$，并根据(1)，$uv \notin E(G)$.

现对 G 的任意一个顶点 x，记 $d_G(x) = k$，并设 G 中 x 的邻域为

$$N_G(x) = \{x_1, x_2, \cdots, x_k\}.$$

由(1)，对 $1 \leqslant i \neq j \leqslant k$，$x_i$ 与 x_j 不相邻，再由(2)，G 中存在不同于 x 的一个顶点 y_{ij}，使 y_{ij} 分别与 x_i 和 x_j 相邻，而 x 不与 y_{ij} 相邻. 明显的，当 $\{i, j\} \neq \{s, t\}$ 时，$y_{ij} \neq y_{st}$(参见图 1.11). 这类顶点 y_{ij} $(1 \leqslant i \neq j \leqslant k)$ 共有 $\binom{k}{2}$ 个，即 G 中至少有 $\binom{k}{2}$ 个顶点与 x 不相邻.

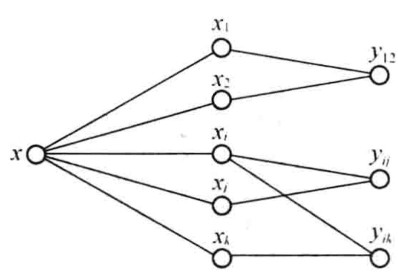

图 1.11 例 1.5 的证明

另一方面，若还有不同于 y_{ij} $(1 \leqslant i \neq j \leqslant k)$ 的顶点 y 与 x 不相邻，则由(2)，存在两个顶点 u 和 v，它们都与 x 和 y 相邻，因而 $u, v \in N_G(x)$，也即存在 $1 \leqslant i_0 \neq j_0 \leqslant k$，使 $u = x_{i_0}, v = x_{j_0}$，由上可知 $y = y_{i_0 j_0}$，矛盾.

因此 G 中与 x 不相邻的顶点只能是 $\{y_{ij} \mid 1 \leqslant i \neq j \leqslant k\}$，所以

$$V = \{x\} \cup N_G(x) \cup \{y_{ij} \mid 1 \leqslant i \neq j \leqslant k\},$$

即得

$$n = 1 + k + \frac{k(k-1)}{2},$$

或

$$\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}k-(n-1)=0.$$

因此，k 是方程

$$\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t-(n-1)=0 \tag{1.3-1}$$

的一个正根. 由顶点 x 的任意性，即得 G 中每一个顶点的度都是方程(1.3-1)的正根. 而此方程只有一个正根$\frac{\sqrt{1+8(n-1)}-1}{2}$，所以 G 中每个顶点的度是

$$k=\frac{\sqrt{1+8(n-1)}-1}{2},$$

所以 G 是 k-正则图.

注：从证明过程可知，并不是对所有的自然数 n 都存在满足上述条件的图.

例 1.6　证明：每个碳氢化合物的分子所含的氢原子数是偶数.

证明　因为每个碳氢化合物的分子由氢原子与碳原子组成，其原子价分别为 1 价与 4 价. 让每个原子对应于图的一个顶点，如果两个原子是连接着的，那么对应的两个顶点就相邻. 如图 1.12 所示，C_3H_8 对应于图 G，在这个图中，对应于碳与氢原子的顶点的度分别是 4 与 1，所以氢原子的个数是偶数.

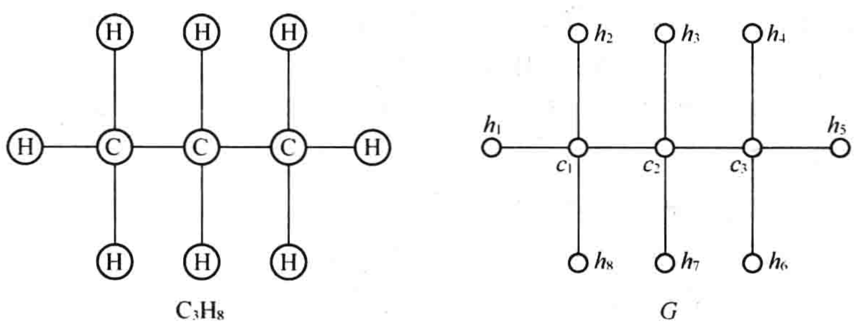

图 1.12　C_3H_8 对应的图

1.4　子图与图的运算

在研究和描述图的性质以及图的局部结构时，子图的概念是必不可少的.

定义 1.4.1　$G=(V,E)$ 和 $H=(V',E')$ 是两个图，如果 $V'\subseteq V$ 和 $E'\subseteq E$，则称 H 是 G 的**子图**，记为 $H\subseteq G$.

例如，图 1.13 中，H_1，H_2 和 H_3 都是 G 的子图，其中 H_1 称为是 G 的三角形子图.

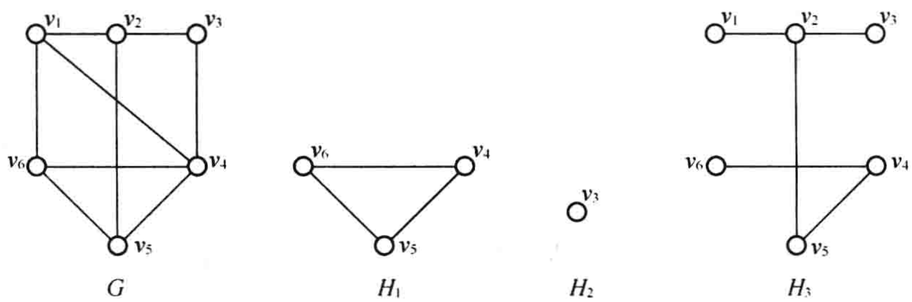

图 1.13　图 G 的三个子图

如果 H 是 G 的子图，并且 $V(H)=V(G)$，则称 H 是 G 的**生成子图**. 图 1.13 中的 H_3 就是 G 的一个生成子图.

如果 H 是 G 的子图，其中 $V(H)=V(G)$ 和 $E(H)=E(G)$ 至少有一个不成立，就称 H 是 G 的**真子图**.

假设 V' 是 $V(G)$ 的一个非空真子集，则 $G\backslash V'$ 表示从 G 中删去 V' 内的所有顶点以及与这些顶点相关联的边所得到的子图. 若 $V'=\{v\}$，常把 $G\backslash\{v\}$ 简记为 $G-v$. 用 $G[V']$ 表示 $G\backslash(V\backslash V')$，称为 V' 的**导出子图**. 在图 1.13 中，H_1 就是由 $\{v_4, v_5, v_6\}$ 导出的子图，即 $H_1=G[\{v_4, v_5, v_6\}]$.

关于边子图也有类似的定义. 设 E' 是 $E(G)$ 的一个子集，$G-E'$ 表示在 G 中删去 E' 中所有的边所得到的子图；而在 G 中加上边集 $E''(E''\cap E(G)=\varnothing)$ 内的所有边所得的图记为 $G+E''$. 同样用 $G-e$ 或 $(G+f, f\notin E(G))$ 表示 $G\backslash\{e\}(G+\{f\})$. 用 $G[E']$ 表示以 E' 为边集，以 E' 中所有边的端点为顶点集合所构成的图，称为 E' 的**导出子图**.

图 1.14 画出了各种不同类型的边子图.

从图 G 中删去所有的环，并使每一对相邻的顶点只留下一条边，即可得 G 的一个生成子图，称为 G 的**基础简单图**. 图 1.14 中的 $G\backslash\{e_1, e_7\}$ 就是 G 的一个基础简单图.

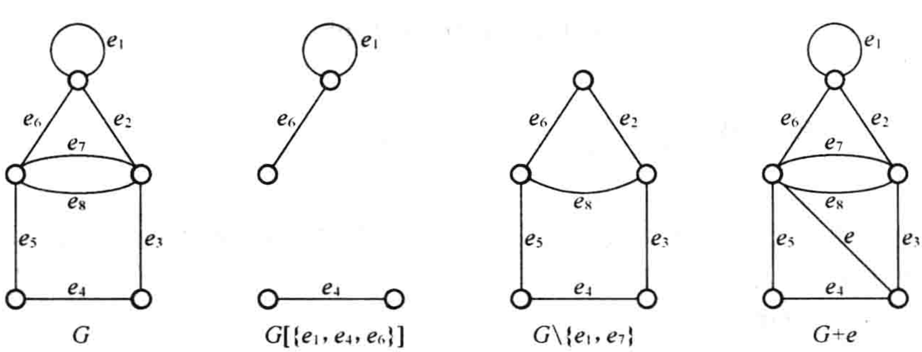

图 1.14　图 G 的三个边子图

简单图 $G=(V,E)$ 的**补图** G^c 是指和 G 有相同顶点集 V 的一个简单图，G^c 的两个顶点相邻当且仅当它们在 G 中不相邻. 图 1.15 中，G^c 是 G 的补图.