

2016 [张宇考研数学系列丛书]

世纪
云图
理工社

张宇



CLASSIC

考研数学题源探析

经典1000题

(解析分册·数学三)

1000
EXERCISES
ON MATHS

□ Mr. Zhang

张宇 © 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

世纪
图



[张宇]

张宇



CLASSIC

考研数学题源探析 经典1000题

(解析分册·数学三)

张宇  主编

编委(按姓氏拼音顺序): 蔡燧林 胡金德 刘国辉 杨洋 亦一(笔名)

于吉霞 曾凡(笔名) 张乐 张心琦 张宇 郑利娜 朱杰

 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学题源探析经典 1000 题. 解析分册. 数学三 / 张宇主编. — 北京: 北京理工大学出版社, 2015. 3

ISBN 978-7-5682-0292-3

I. ①张… II. ①张… III. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 030365 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室)

82562903(教材售后服务热线)

68948351(其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 三河市天利华印刷装订有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 17.75

字 数 / 440 千字

版 次 / 2015 年 3 月第 1 版 2015 年 3 月第 1 次印刷

定 价 / 46.80 元(共 2 册)

责任编辑 / 高 芳

文案编辑 / 胡 莹

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 边心超

图书出现印装质量问题,请拨打售后服务热线,本社负责调换

· 目录 ·

C O N T E N T S

第一篇 微积分

第 1 章 函数、极限、连续 (1)

- 一、选择题 (1)
- 二、填空题 (4)
- 三、解答题 (6)

第 2 章 一元函数微分学 (23)

- 一、选择题 (23)
- 二、填空题 (28)
- 三、解答题 (30)

第 3 章 一元函数积分学 (54)

- 一、选择题 (54)
- 二、填空题 (58)
- 三、解答题 (65)

第 4 章 多元函数微分学 (96)

- 一、选择题 (96)
- 二、填空题 (99)
- 三、解答题 (99)

第 5 章 二重积分 (112)

- 一、选择题 (112)
- 二、填空题 (114)
- 三、解答题 (115)

第 6 章 无穷级数 (124)

- 一、选择题 (124)
- 二、填空题 (128)
- 三、解答题 (131)

第 7 章 常微分方程与差分方程 (143)

- 一、选择题 (143)
- 二、填空题 (144)
- 三、解答题 (150)

第二篇 线性代数

- 一、选择题 (165)
- 二、填空题 (175)
- 三、解答题 (186)

第三篇 概率论与数理统计

- 一、选择题 (227)
- 二、填空题 (233)
- 三、解答题 (242)

★ 第一篇 微积分

第 1 章 函数、极限、连续

一、选择题

1. 1. (D) 【解析】对于命题 ①, 由数列收敛的定义可知, 若数列 $\{u_n\}$ 收敛于 A , 则对任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在自然数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有

$$|u_n - A| < \epsilon,$$

则当 $n_i > N$ 时, 恒有

$$|u_{n_i} - A| < \epsilon,$$

因此数列 $\{u_{n_i}\}$ 也收敛于 A , 可知命题正确.

对于命题 ②, 不妨设数列 $\{x_n\}$ 为单调增加的, 即

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots,$$

其中某一给定子数列 $\{x_{n_i}\}$ 收敛于 A , 则对任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在自然数 N , 当 $n_i > N$ 时, 恒有

$$|x_{n_i} - A| < \epsilon.$$

由于数列 $\{x_n\}$ 为单调增加的数列, 对于任意的 $n > N$, 必定存在 $n_i \leq n \leq n_{i+1}$, 有

$$-\epsilon < x_{n_i} - A \leq x_n - A \leq x_{n_{i+1}} - A < \epsilon,$$

从而

$$|x_n - A| < \epsilon.$$

可知数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A . 因此命题正确.

对于命题 ③, 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = A, \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = A$, 由极限的定义可知, 对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 必定存在自然数 N_1, N_2 :

当 $2n > N_1$ 时, 恒有

$$|x_{2n} - A| < \epsilon;$$

当 $2n+1 > N_2$ 时, 恒有

$$|x_{2n+1} - A| < \epsilon.$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 总有

$$|x_n - A| < \epsilon.$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$. 可知命题正确.

故答案选择(D).

【注】本题命题 ③ 为 2015 年考研实考题, 提醒读者注意基本功训练.

1. 2. (D) 【解析】令 $g(x) = \varphi(\varphi(x))$, 注意 $\varphi(x)$ 是奇函数, 有

$$g(-x) = \varphi(\varphi(-x)) = \varphi(-\varphi(x)) = -\varphi(\varphi(x)) = -g(x).$$

【注】复合函数的奇偶性: 若 $f(x)$ 是偶函数, $\varphi(x)$ 是奇函数, 则在 4 个复合函数 $f(\varphi(x)), f(f(x)), \varphi(f(x)), \varphi(\varphi(x))$ 中, 只有 $\varphi(\varphi(x))$ 是奇函数, 其余均为偶函数.

1.3. (B) 【解析】注意在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内, $\sin x$ 是增函数, $\cos x$ 是减函数.

任取 $x_1, x_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $x_1 < x_2$, 有 $\cos x_1 > \cos x_2$, 所以 $\sin(\cos x_1) > \sin(\cos x_2)$, 即 $f(x)$ 是减函数; 由于 $\sin x_1 < \sin x_2$, 所以 $\cos(\sin x_1) > \cos(\sin x_2)$, 即 $\varphi(x)$ 是减函数.

【注】复合函数的单调性: 若 $f(x)$ 是增函数, $\varphi(x)$ 是减函数, 则 $f(\varphi(x)), \varphi(f(x))$ 是增函数, 而 $f(\varphi(x)), \varphi(f(x))$ 是减函数.

1.4. (C) 【解析】因为 $f(x+2k) = \frac{1}{f(x+k)} = f(x)$, 故 $f(x)$ 是周期函数.

1.5. (D) 【解析】 $f(-x) = \begin{cases} (-x)^2, & -x \leq 0, \\ (-x)^2 + (-x), & -x > 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ x^2 - x, & x < 0. \end{cases}$

1.6. (C) 【解析】令 $u(x) = \frac{2}{x}, v(x) = \frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时可排除(A); 令 $u(x) = v(x) = \frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时可排除(B); 令 $u(x) = \frac{1}{x}, v(x) = -\frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时可排除(D).

1.7. (D) 【解析】如 $\alpha(x) = x \sin \frac{1}{x}, \beta(x) = x$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 都是无穷小, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在, 故 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 无法比较阶的高低.

1.8. (A) 【解析】对于任意给定的正数 M , 总存在着点 $x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}, n > \frac{2M - \pi}{4\pi}$, 使 $|f(x_n)| = |2n\pi + \frac{\pi}{2}| > M$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界.

(C) 错, 对于任意给定的正数 M , 无论 x 取多么大的正数, 总有 $x_n = |2n\pi| > x$ (只要 $|n| > \frac{x}{2\pi}$), 使 $f(x_n) = x_n \sin x_n = 0 < M$, 故当 $x \rightarrow \infty$ 时 $f(x)$ 不是无穷大. 千万不要将无穷大与无界混为一谈.

1.9. (C) 【解析】由题设可知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1+ax}{1+bx}}{x^3} \neq 0$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+bx)e^x - (1+ax)}{x^3(1+bx)} \neq 0$. 因为 $x \rightarrow 0$ 时, 分母趋于零, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} [be^x + (1+bx)e^x - a] = 0$, 得到 $b+1-a=0$.

又假设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+bx)e^x - (1+ax)}{x^3(1+bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2b+1)e^x + bxe^x}{6x + 12bx^2}$ 成立, 则必须有 $2b+1=0$, 即 $b=-\frac{1}{2}$, 再结合 $b+1-a=0$, 得 $a=\frac{1}{2}$.

1.10. (B) 【解析】令 $\frac{1}{x} = t$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sin \frac{1}{x}} - 1}{(1 + \frac{1}{x})^\alpha - (1 + \frac{1}{x})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\sin t} - 1}{(1+t)[(1+t)^{\alpha-1} - 1]} = \frac{1}{\alpha-1} (\alpha \neq 1)$.

1.11. (D) 【解析】设 $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时为无界变量, 不是无穷大. 令 $g(x) = x$, 当 $x \rightarrow 0$ 时为无穷小, 可排除(A). 设 $x \rightarrow 0$ 时, 令 $f(x) = x^2, g(x) = \frac{1}{x}$ 可排除(B), (C).

1.12. (B) 【解析】方法一 若 $f(x) + \sin x$ 在点 x_0 处连续, 则 $f(x) = [f(x) + \sin x] - \sin x$

在点 x_0 处也连续, 与已知矛盾.

方法二 排除法. 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处间断, $f(x)\sin x = 0$ 在 $x=0$ 处连续.

若设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ $f(x)$ 在点 $x=0$ 处间断, 但 $f^2(x) = 1$, $|f(x)| = 1$ 在 $x=0$ 处都连续. 故可排除(A), (C), (D).

1. 13. (A) 【解析】有限个无穷小的和、差、积、绝对值还是无穷小量.

$$\begin{aligned} 1. 14. (C) \quad \text{【解析】} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)} - e^x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (e^{\frac{x^3}{3}+o(x^3)} - 1)}{x^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x^3}{3}+o(x^3)} - 1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^n} = C \neq 0, \end{aligned}$$

则 $n=3$ 时, $C = \frac{1}{3}$.

1. 15. (A) 【解析】由泰勒公式 $\sin ax = ax - \frac{1}{6}a^3x^3 + o(x^3) (x \rightarrow 0)$,

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-a)x + \frac{1}{6}a^3x^3 + o(x^3)}{-bx^3} = 1 \\ \Rightarrow a &= 1, -\frac{1}{6b} = 1 \Rightarrow a = 1, b = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

1. 16. (C) 【解析】由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3ax^2 + b}{(e^{\sin^2 x} - 1)\cos x}$, 当 $b \neq 0$ 时, 该极限为 ∞ , 于是, $b = 0$.

从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3ax^2 + b}{(e^{\sin^2 x} - 1)\cos x} \stackrel{\text{等价无穷小代换}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3ax^2}{\sin^2 x} = 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}.$$

1. 17. (D) 【解析】

$$f(x) = \ln \frac{1+x^2}{1+\sin^2 x} = \ln \left(1 + \frac{x^2 - \sin^2 x}{1 + \sin^2 x} \right) \sim \frac{x^2 - \sin^2 x}{1 + \sin^2 x} \sim x^2 - \sin^2 x (x \rightarrow 0).$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^{n-1}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(n-1)x^{n-2}} \\ &\stackrel{\text{当 } n=4}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

因此, $n=4$.

【注】更希望读者看出: $x^2 - \sin^2 x = (x + \sin x)(x - \sin x) \sim 2x \cdot \frac{1}{6}x^3 = \frac{1}{3}x^4$, 这样便可直接得出答案.

1. 18. (D) 【解析】分母不为零, 故 $\lambda \leq 0$; 又 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, 故 $k > 0$.

1. 19. (D) 【解析】由 $f(x)$ 的表达式可知 $x=0, x=1$ 为其间断点.

$$x \rightarrow 1^+, x-1 \rightarrow 0^+, \frac{x}{x-1} \rightarrow +\infty, e^{\frac{x}{x-1}} \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow 0;$$

$$x \rightarrow 1^-, x-1 \rightarrow 0^-, \frac{x}{x-1} \rightarrow -\infty, e^{\frac{x}{x-1}} \rightarrow 0, f(x) \rightarrow -1;$$

$$x \rightarrow 0^+, \frac{x}{x-1} \rightarrow 0^-, e^{\frac{x}{x-1}} - 1 \rightarrow 0^-, f(x) \rightarrow -\infty;$$

$$x \rightarrow 0^-, \frac{x}{x-1} \rightarrow 0^+, e^{\frac{x}{x-1}} - 1 \rightarrow 0^+, f(x) \rightarrow +\infty.$$

故 $x = 1$ 是第一类间断点, $x = 0$ 是第二类间断点, 选(D).

1. 20. (A) 【解析】 $x = 0$ 和 $x = 1$ 为 $f(x)$ 的间断点, 其余点连续.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln |x|}{|x-1|} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \ln |x| \cdot x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln |x|}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

则 $x = 0$ 为可去间断点.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln |x|}{|x-1|} \sin x = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{|x-1|} \sin x = \begin{cases} \sin 1, & x \rightarrow 1^+, \\ -\sin 1, & x \rightarrow 1^-, \end{cases}$$

因 $x \rightarrow 1$ 时, $\ln x = \ln(1+x-1) \sim x-1$, 则 $x = 1$ 为跳跃间断点. 答案选择(A).

1. 21. (C) 【解析】去掉绝对值符号, 将 $f(x)$ 写成分段函数,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x \in (0, 1) \cup (1, +\infty), \\ -\frac{1}{x+1}, & x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0), \end{cases}$$

则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, 故 $x = 0$ 为跳跃间断点.

1. 22. (A) 【解析】不妨设 $f(x)$ 单调增加, 且 $|f(x)| \leq M$, 对任一点 $x_0 \in (a, b)$, 当 $x \rightarrow x_0^-$ 时, $f(x)$ 随着 x 增加而增加且有上界, 故 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 存在; 当 $x \rightarrow x_0^+$ 时, $f(x)$ 随着 x 减小而减小且有下界,

故 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 存在, 故 x_0 只能是第一类间断点.

二、填空题

1. 23. na 【解析】令 $x = -1$, 则 $f(1) = f(-1) + f(2)$, 因 $f(x)$ 是奇函数, 得到 $f(2) = f(1) - f(-1) = 2f(1) = 2a$. 再令 $x = 1$, 则 $f(3) = f(1) + f(2) = 3f(1) = 3a$, 现用数学归纳法证明 $f(n) = na$.

当 $n = 1, 2, 3$ 时, 已知或者已证. 假设 $n \leq k$ 时, 有 $f(k) = ka$. 当 $n = k+1$ 时, $f(k+1) = f(k-1) + f(2) = (k-1)a + 2a = (k+1)a$, 故对一切正整数 n , 有 $f(n) = na$, 令 $x = 0$, 则 $f(2) = f(0) + f(2)$, 即 $f(0) = 0 = 0 \cdot a$, 又 $f(x)$ 是奇函数, 故对一切负整数 n 有 $f(n) = -f(-n) = -(-na) = na$. 所以对一切整数 n , 均有 $f(n) = na$.

1. 24. $e^{\frac{1}{100}x^2}$ 【解析】当 x 充分大时, 有重要关系: $e^{ax} \gg x^\beta \gg \ln^\gamma x$, 其中 $a, \beta, \gamma > 0$, 故本题填 $e^{\frac{1}{100}x^2}$.

1. 25. $\frac{1}{2}$ 【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}$.

1. 26. 0 【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$.

1. 27. e^6 【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{\sin x}} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 3x}{\sin x} \right\} = e^6$.

1. 28. $-\frac{\sqrt{2}}{6}$ 【解析】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x})(\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x})}{(x+2)(x-1)(\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x})}$

$$= \frac{1}{6\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(1-x)}{x-1} = -\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

$$1.29. -\frac{1}{6} \quad \text{【解析】} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{(e^{x^2} - 1)\ln(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^2(-x)} = -\frac{1}{6}.$$

$$1.30. e^6 \quad \text{【解析】} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x-2}\right)^{2x-1} = \exp\left\{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3(2x-1)}{x-2}\right\} = e^6.$$

$$1.31.2 \quad \text{【解析】} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}})(\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}})}{(\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}})} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n}}{(\sqrt{n+3\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}})} = 2.$$

$$1.32.5, \frac{1}{4^5} \quad \text{【解析】} \text{原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{2}{x}\right)\left(1 - \frac{3}{x}\right)\left(1 - \frac{4}{x}\right)\left(1 - \frac{5}{x}\right)}{\left(4 - \frac{1}{x}\right)^a} x^{5-a} = 4^{-a}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{5-a} = \beta > 0, \text{ 所以 } \alpha = 5, \beta = \frac{1}{4^5}.$$

1.33. -3 【解析】当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\ln \frac{1-ax^2}{1+ax^2} = \ln\left(1 - \frac{2ax^2}{1+ax^2}\right) \sim -\frac{2ax^2}{1+ax^2} \sim -2ax^2, \\ \frac{1}{10000}x^4 + \sin^2(\sqrt{6}x) \sim \sin^2(\sqrt{6}x) \sim 6x^2,$$

故 $a = -3$.

$$1.34. -\frac{2}{9}; 2 \quad \text{【解析】} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\cos \frac{2x}{3}\right)}{Ax^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \cos \frac{2x}{3} - 1\right)}{Ax^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{2x}{3} - 1}{Ax^k} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\left(\frac{2x}{3}\right)^2}{Ax^k} = -\frac{2}{9} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{Ax^k} = 1.$$

则 $k = 2, -\frac{2}{9A} = 1$, 即 $A = -\frac{2}{9}$.

1.35. $\frac{1}{3}; 1$ 【解析】当 $x \rightarrow -1$ 时,

$$\sqrt[3]{x} + 1 \stackrel{t=x+1}{=} \sqrt[3]{t-1} + 1 = -(\sqrt[3]{1-t} - 1) \sim -\left(-\frac{1}{3}t\right) = \frac{x+1}{3}.$$

故 $A = \frac{1}{3}, k = 1$.

1.36. $-\frac{1}{32}; 2$ 【解析】当 $x \rightarrow \pi$ 时,

$$\sqrt[4]{\sin \frac{x}{2}} - 1 = \sqrt[4]{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)} - 1$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt[4]{1 + \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) - 1 \right]} - 1 \\
 &\sim \frac{1}{4} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) - 1 \right] \\
 &\sim \frac{1}{4} \cdot \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\pi - x}{2} \right)^2 \right] = -\frac{1}{32} (x - \pi)^2.
 \end{aligned}$$

故 $A = -\frac{1}{32}, k = 2$.

1.37.1 【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x (\sin x + \cos x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x + a) = a$. $f(x)$ 在零点处连续, 可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = a.$$

1.38. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 【解析】 因为

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \left[1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1} \right],$$

而

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \left[1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+2} \right],$$

所以 $\frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+2}}$, 由于 $\left| \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right| < 1$, 这样 $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

三、解答题

1.39. 【解】 由 $f[g(x)] = \begin{cases} 1, & \frac{1}{e} < g(x) < 1, \\ g(x), & 1 \leq g(x) < e \end{cases}$ 得到 $f[g(x)] = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0, \\ e^x, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$

【注】在求 $f[g(x)]$ 时, 既要把解析式 $f(x)$ 中的 x 都换为 $g(x)$, 同时要把表示自变量变化范围的地方的 x 换为 $g(x)$, 并由得到的不等式求出复合函数的自变量的变化范围.

1.40. 【解】 本题同样考查分段函数的复合方法. 下面用解析法求解.

首先, 广义化为 $f[g(x)] = \begin{cases} [g(x)]^2 - 1, & g(x) \leq 0, \\ \ln g(x), & g(x) > 0. \end{cases}$

由 $g(x)$ 的表达式知,

(1) 当 $g(x) \leq 0$, 即 $\{2e^x - 1 \leq 0\} \cap \{x \leq 0\}$ 或 $\{x^2 - 1 \leq 0\} \cap \{x > 0\}$, 而

$$\{2e^x - 1 \leq 0\} \cap \{x \leq 0\} = \{x \leq -\ln 2\} \cap \{x \leq 0\} = \{x \leq -\ln 2\},$$

$$\{x^2 - 1 \leq 0\} \cap \{x > 0\} = \{-1 \leq x \leq 1\} \cap \{x > 0\} = \{0 < x \leq 1\}.$$

(2) 当 $g(x) > 0$, 即 $\{2e^x - 1 > 0\} \cap \{x \leq 0\}$ 或 $\{x^2 - 1 > 0\} \cap \{x > 0\}$, 而

$$\{2e^x - 1 > 0\} \cap \{x \leq 0\} = \{x > -\ln 2\} \cap \{x \leq 0\} = \{-\ln 2 < x \leq 0\},$$

$$\{x^2 - 1 > 0\} \cap \{x > 0\} = \{x > 1 \text{ 或 } x < -1\} \cap \{x > 0\} = \{x > 1\}.$$

$$\text{综上, 得 } f[g(x)] = \begin{cases} (2e^x - 1)^2 - 1, & x \leq -\ln 2, \\ \ln(2e^x - 1), & -\ln 2 < x \leq 0, \\ (x^2 - 1)^2 - 1, & 0 < x \leq 1, \\ \ln(x^2 - 1), & x > 1. \end{cases}$$

1.41.【解】(1) 若 $0 \leq x < \frac{1}{2}$, 则 $\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{1 + (2x)^n + x^{2n}} \leq 1 \cdot \sqrt[n]{3}$,

若 $\frac{1}{2} \leq x < 2$, 则 $2x < \sqrt[n]{1 + (2x)^n + x^{2n}} \leq 2x \sqrt[n]{3}$,

若 $2 \leq x < +\infty$, 则 $x^2 \leq \sqrt[n]{1 + (2x)^n + x^{2n}} \leq x^2 \sqrt[n]{3}$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = 1$, 故

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 2x, & \frac{1}{2} \leq x < 2, \\ x^2, & 2 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

(2) 因为 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2})$, $[\frac{1}{2}, 2)$, $[2, +\infty)$ 上均连续, 又

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) &= 1, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = 1, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= 4, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4, \quad f(2) = 4, \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续.

【注】本题源于苏联的数学竞赛题, 在近些年考研中多次涉及, 是用夹逼准则求极限的典型考题. 注意本题的放缩法.

(1) 夹逼准则: ① $y_n \leq x_n \leq z_n$; ② $y_n \rightarrow A, z_n \rightarrow A \Rightarrow x_n \rightarrow A$ ($n \rightarrow \infty$).

(2) 对于 $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ ($u_i \geq 0, n$ 为有限数), 其放缩法为:

$$1 \cdot u_{\max} \leq u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leq n \cdot u_{\max}.$$

1.42.【解】因为 $(1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} > (3^n)^{\frac{1}{n}} = 3$, 又

$$(1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} < (3 \cdot 3^n)^{\frac{1}{n}} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{n}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot 3^{\frac{1}{n}} = 3,$$

由夹逼准则, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = 3$.

1.43.【解】

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \sim x, (1 + \sin x)^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n} \sin x \sim \frac{x}{n}$, 故原极限 $= \frac{1}{n}$.

(2) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x, e^x - e^{-x} = e^{-x}(e^{2x} - 1) \sim 2x$, 故原极限 $= 2$.

(3) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1 + x^4) \sim x^4, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, 1 - \cos \frac{x}{2} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}x^2$, 故原极限 $= \frac{1}{16}$.

(4) 这是“ 1^∞ ”型极限, 可用公式 $\lim_{x \rightarrow 0} u^v = \exp\left\{\lim_{x \rightarrow 0} v(u-1)\right\}$ 来计算, 事实上 $\ln u = \ln[1 +$

$(u-1)] \sim u-1$ ($u \rightarrow 1$). 故原式 $= \exp\left\{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + e^x - 1}{x}\right\} = \exp\left\{\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{e^x - 1}{x}\right)\right\} = e^2$.

(5) 这是“ $\infty - \infty$ ”型未定式极限, 首先通分变成“ $\frac{0}{0}$ ”或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式, 然后使用洛必达法则求极限.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + xe^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x(1+x) + 1 - e^x}{x(e^x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3xe^x + x^2e^x}{e^x + xe^x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^x + 5xe^x + x^2e^x}{2e^x + xe^x} = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

或利用等价无穷小 $e^x - 1 \sim x$ (当 $x \rightarrow 0$) 代换, 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + xe^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x(1+x) + 1 - e^x}{x(e^x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x(1+x) + 1 - e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3xe^x + x^2e^x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^x + 5xe^x + x^2e^x}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

【注】典型错误: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + xe^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + xe^x}{x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + xe^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2e^x + xe^x) = 2$.

等价无穷小代换只能在乘除运算时使用, 不能在加减运算时使用.

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n - 2na + 1}{n(1 - 2a)} \right)^n$ 是“ 1^∞ ”型极限, 可以使用洛必达法则求极限, 也可以凑成第二个重要极限, 还可以利用等价无穷小代换.

方法一 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n - 2na + 1}{n(1 - 2a)} \right)^n$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x - 2ax + 1}{x(1 - 2a)} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x(1 - 2a)} \right) \left(\text{令 } \frac{1}{x} = t \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left(1 + \frac{t}{1 - 2a} \right)}{t} \stackrel{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \frac{t}{1 - 2a}} \cdot \frac{1}{1 - 2a} = \frac{1}{1 - 2a}. \end{aligned}$$

方法二 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n - 2na + 1}{n(1 - 2a)} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n(1 - 2a)} \right)^n$

$$\begin{aligned} &= \ln \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n(1 - 2a)} \right)^n \right\} = \ln \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n(1 - 2a)} \right)^{n(1 - 2a) \cdot \frac{1}{1 - 2a}} \right\} \\ &= \ln e^{\frac{1}{1 - 2a}} = \frac{1}{1 - 2a}. \end{aligned}$$

方法三 $\ln \left(1 + \frac{1}{n(1 - 2a)} \right) \sim \frac{1}{n(1 - 2a)}$ ($n \rightarrow \infty$), 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n - 2na + 1}{n(1 - 2a)} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{1}{n(1 - 2a)} = \frac{1}{1 - 2a}.$$

(7) 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} \sin^3 x \cdot x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} x^4}{x^4} = \frac{1}{6}$.

投命题者所好,当狗 $\rightarrow 0$ 时,狗 $-\sin$ 狗 $\sim \frac{1}{6}$ 狗³.

(8) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{\tan x} - e^{\sin x} = e^{\sin x} (e^{\tan x - \sin x} - 1) \sim \tan x - \sin x, x \sin^2 x \sim x^3$, 故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} \cdot \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \left(\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \tan x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (9) \text{ 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x(1 - \cos x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x(1 - \cos x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x}} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (10) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} &= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\tan x}{x} - 1 \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\tan x - x}{x} \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x - x}{x^3} \right\} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} \right\} = e^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

根据海涅定理,取 $x = \frac{1}{n}$, 则原式 $= e^{\frac{1}{3}}$.

(11) 当 $x = 0$ 时,原式 $= 1$;

$$\begin{aligned} \text{当 } x \neq 0 \text{ 时, 原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \sin \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n}}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^{n-1}} \cdot \sin \frac{x}{2^{n-1}}}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \dots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2^n}{\sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}. \end{aligned}$$

$$(12) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{x+1} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{x+1}} = e^{-2}.$$

$$(13) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x - 1)^{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)\cos^2 x}{\sin^2 x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

$$(14) \text{ 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} \cdot \frac{\sin x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} \cdot \frac{x}{\ln(1+x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} + x \sin \frac{1}{x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = \frac{1}{2}.$$

$$(15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n - n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] \stackrel{\text{令 } \frac{1}{x} = t}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \ln(1+t) \right]$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{1}{1+t}}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2(1+t)} = \frac{1}{2}.$$

$$(16) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a}{x} - \left(\frac{1}{x^2} - a^2 \right) \ln(1+ax) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a}{x} - \frac{1}{x^2} \ln(1+ax) \right] + 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \ln(1+ax)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \frac{a}{1+ax}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 x}{2x(1+ax)} = \frac{a^2}{2}.$$

$$(17) \quad \text{原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{x+a} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^{x+b}}{\left(1 + \frac{a+b}{x}\right)^{2x+a+b}} = \frac{e^a \cdot e^b}{e^{2(a+b)}} = e^{-(a+b)}.$$

$$(18) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{1+\ln x}} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{1 + \ln x} \right\} = e^0 = 1.$$

$$(19) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\tan x} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \ln (\cot x) \right\} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln (\cot x) \right\} = e^0 = 1.$$

$$(20) \quad \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{\frac{1}{3} x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^2 x) 2 \sin x \cos x}{\frac{4}{3} x^3} = \frac{3}{2}.$$

$$(21) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \left[\int_0^{u^2} \arctan(1+t) dt \right] du}{x(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \left[\int_0^{u^2} \arctan(1+t) dt \right] du}{\frac{1}{2} x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \arctan(1+t) dt}{\frac{3}{2} x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \arctan(1+x^2)}{3x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}.$$

$$(22) \quad \text{原式} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x \left[\left(\frac{\sin x}{x} \right)^x - 1 \right]}{x^3} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln \frac{\sin x}{x}} - 1}{x^3}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left(1 + \frac{\sin x - x}{x} \right)}{x^2}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{1}{6}. \quad (\text{注意常用的公式: } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1)$$

$$(23) \quad \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{x^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x \cdot \cos x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x \cdot \cos x}{x^3}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \cos x \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{2} \sin 2x}{x^3} \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} (2x)^2}{3x^2} = \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

$$(24) \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2); \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4); e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 2!} + o(x^4).$$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^2 \cdot \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)} = \frac{1}{6}.$$

$$(25) \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x(1 - \cos \sqrt{x})(1 + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x \cdot \frac{1}{2}x(1 + \sqrt{\cos x})} = \frac{1}{2}.$$

$$(26) \text{由于} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^x}{x + e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1, \text{故}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + e^x)}{x} \right\} = e.$$

$$(27) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 0,$$

$$\text{故} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

$$(28) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3) (x \rightarrow 0), \text{故}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} - x \left(1 - \frac{x^2}{2!} \right) + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

$$(29) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &\stackrel{\text{令} \frac{1}{x} = t}{=} \exp \left\{ \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \ln(1+t) \right] \right\} \\
 &= \exp \left\{ \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} \right\} = \exp \left\{ \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}t^2}{t^2} \right\} = e^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

【注】典型错误: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\left[\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right]^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$. 错误原因: 求极限是一个统一的过程, 即, 在同一极限符号下当 $x \rightarrow +\infty$ (或 x_0) 时, 所有的 x 都要 $\rightarrow +\infty$ (或 x_0), 不能一部分 $x \rightarrow +\infty$ (或 x_0), 而另一部分 $x \rightarrow +\infty$ (或 x_0).

1.44. 【证】用反证法. 设 $|f(1)|$, $|f(3)|$, $|f(5)|$ 都小于 2, 即

$$|f(1)| = |a + b + 1| < 2, |f(3)| = |3a + b + 9| < 2, |f(5)| = |5a + b + 25| < 2,$$

则 $|f(1) - 2f(3) + f(5)| \leq |f(1)| + 2|f(3)| + |f(5)| < 2 + 2 \times 2 + 2 = 8$.

而事实上, $|f(1) - 2f(3) + f(5)| = |a + b + 1 - 6a - 2b - 18 + 5a + b + 25| = 8$ 矛盾, 故 $|f(1)|, |f(3)|, |f(5)|$ 中至少有一个不小于 2.

$$\begin{aligned} 1.45. \text{【解】} \quad \frac{1}{n}(1+1+\cdots+1) &< \frac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}) < \frac{1}{n} \cdot (\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n}+\cdots+\sqrt[n]{n}), \text{ 即} \\ &1 < \frac{1}{n}(\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}) < \sqrt[n]{n}. \end{aligned}$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}) = 1$.

$$1.46. \text{【解】} \quad \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x}(e^{1-\cos x}-1)}{\frac{1}{3}x^2} = e \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{\frac{1}{3}x^2} \right\} = \frac{3}{2}e.$$

1.47. 【解】 因为 $x \rightarrow 0$ 时, $\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x - 1 = e^{x \ln \frac{2+\cos x}{3}} - 1 \sim x \ln \frac{2+\cos x}{3}$, 而

$$\ln \frac{2+\cos x}{3} = \ln \left(1 + \frac{\cos x - 1}{3}\right) \sim \frac{\cos x - 1}{3} \sim \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3} = -\frac{1}{6}x^2,$$

$$\text{故原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

$$\begin{aligned} 1.48. \text{【解】} \quad \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - \ln e^x}{\ln(x^2 + e^{2x}) - \ln e^{2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin^2 x + e^x}{e^x}\right)}{\ln\left(\frac{x^2 + e^{2x}}{e^{2x}}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\sin^2 x}{e^x}\right)}{\ln\left(1 + \frac{x^2}{e^{2x}}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{e^x} \cdot \frac{e^{2x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.49. \text{【解】} \quad \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(1-x^{x-1})}{1-x+\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x[1-e^{(x-1)\ln x}]}{1-x+\ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x(x-1)\ln x}{1-x+\ln x} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-1)\ln x + (x-1)}{-1 + \frac{1}{x}} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2-x)\ln x + x(x-1)}{1-x} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2-x)\ln x}{1-x} + 1 \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(4x-1)\ln x + (2x-1)}{-1} = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.50. \text{【解】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x + \cos x - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})}{x^2}, \end{aligned}$$

$$\text{而} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})(1+\sqrt{\cos 2x})}{x^2(1+\sqrt{\cos 2x})}$$