

考研数学复习指导系列丛书

2014

考研数学

冲刺篇

模拟试题5套
及详解

(数学三)

陈启浩 编著

集合精华题目

覆盖考试要点



 机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



考研数学复习指导系列丛书

2014 考研数学冲刺篇(数学三) ——模拟试题 5 套及详解

陈启浩 编著

本书是考研数学冲刺阶段的复习指导书,适用于参加“数学三”考试的学生.书中包含了5套精心设计的模拟试题,题目难度保持或者稍高于考研题目难度.这些题目大部分为首次公开发布,非常适合考生用来检验复习效果和临考重点复习.本书的详解部分,不仅给出了详尽解答,还特别针对考试重点和难点进行了扩展复习.

本书可作为考生自学的复习材料,也可作为考研培训班的辅导教材,还可供大学数学基础课程的教学人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

2014 考研数学冲刺篇(数学三)模拟试题5套及详解/陈启浩编著.
—北京:机械工业出版社,2013.10
(考研数学复习指导系列丛书)
ISBN 978-7-111-44146-5

I. ①2… II. ①陈… III. ①高等数学—研究生—入学考试—题解
IV. ①013—44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第224646号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:韩效杰 责任编辑:韩效杰 熊海丽

责任校对:张媛 封面设计:路恩中

责任印制:乔宇

北京机工印刷厂印刷(三河市南杨庄国丰装订厂装订)

2013年10月第1版第1次印刷

184mm×260mm·6.5印张·150千字

标准书号:ISBN 978-7-111-44146-5

定价:19.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心:(010) 88361066 教材网:<http://www.cmpedu.com>

销售一部:(010) 68326294 机工官网:<http://www.cmpbook.com>

销售二部:(010) 88379649 机工官博:<http://weibo.com/cmp1952>

读者购书热线:(010) 88379203 封面无防伪标均为盗版

前 言

深入地读完我们编写的 2014 考研数学复习指导系列丛书(包括认真地推演了其中的每道例题和练习题)的考生,已经具有较强的分析问题和解决问题的能力,具有了能够从容面对即将来临的研究生考试的实力.但是为了把准备工作做得更充分,为了践行“战前多流汗,战时少流血”,应在考试前进行 5 场“实战演习”——认真、独立地做完 5 套模拟试题,作为最后的冲刺.

书中的 5 套试题是根据考研的数学大纲和编者的教学经验精心设计的,它既涵盖性强,又重点突出,其中的问题新颖,既有较强的针对性,又有明显的前瞻性.书中给出了这 5 套试题的详细、规范的解答,每题之后都加有附注,用简明的语言,指明了与本题有关的概念、方法等值得注意之点.当然,在“实战演习”时,不应一遇到困难就翻看详解,一定要认真、反复地思索,这样才能达到使用本书冲刺的目的——进一步提高应试能力,向着高分进击.

衷心祝愿考生们取得骄人的成绩,并欢迎读者对本书提出宝贵意见,可发邮件到 cqhs-huxue@gmail.com,非常感谢!

北京邮电大学教授 陈启浩

目 录

前言	
模拟试题(一)	1
模拟试题(二)	8
模拟试题(三)	15
模拟试题(四)	22
模拟试题(五)	28
模拟试题(一)详解	35
模拟试题(二)详解	48
模拟试题(三)详解	59
模拟试题(四)详解	73
模拟试题(五)详解	86

模拟试题(一)

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 方程 $2^x - x^2 - 1 = 0$ 的不同实根个数为

- (A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

[]

(2) 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} \cos^2 x dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x) dx$, $P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^7 x) dx$,

则它们的大小次序为

- (A) $M < N < P$; (B) $N < M < P$; (C) $P < M < N$; (D) $P < N < M$.

[]

(3) 收敛半径 $R = 1$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x = -1$ 处条件收敛的

- (A) 充分而非必要条件; (B) 必要而非充分条件;
(C) 充分必要条件; (D) 既非必要又非充分条件.

[]

(4) 微分方程 $y'' + y = 2\sin x$ 应有的特解形式为

- (A) $a\cos x + b\sin x$; (B) $x(a\cos x + b\sin x)$;
(C) $ax\cos x$; (D) $bxs\sin x$.

[]

(5) 设 A 是 n 阶可逆矩阵, α 是 A 的对应特征值 λ 的特征向量, 且存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$, 则

- (A) B^{-1} 有特征值 $\frac{1}{\lambda}$ 及对应的特征向量 $P^{-1}\alpha$;
(B) B^{-1} 有特征值 $\frac{1}{\lambda}$ 及对应的特征向量 $P\alpha$;
(C) B^{-1} 有特征值 λ 及对应的特征向量 $P^{-1}\alpha$;
(D) B^{-1} 有特征值 λ 及对应的特征向量 $P\alpha$.

[]

(6) 设 n 维向量组 (I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 和 (II): $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m (m \leq n)$, 记矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 和 $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$, 则下列命题不正确的是

(A) 当(I)与(II)等价时, (I)与(II)等秩;

(B) 当(I)与(II)等秩时, (I)与(II)等价;

(C) 当A与B等价时, A与B等秩;

(D) 当A与B等秩时, A与B等价.

[]

(7) 设随机变量 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 0, \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 记 $Y = X^2$ 和二维随机变量 $(X,$

$Y)$ 的分布函数为 $F(x, y)$, 则 $F(1, 4)$ 等于

(A) $\frac{1}{4}$;

(B) $\frac{1}{2}$;

(C) $\frac{3}{4}$;

(D) 1.

[]

(8) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本, 则统计量 $Y =$

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 的数学期望与方差分别为

(A) $\frac{1}{n}\sigma^2, \frac{2}{n}\sigma^4$;

(B) $\frac{1}{n}\sigma^2, \frac{4}{n}\sigma^4$;

(C) $\sigma^2, \frac{2}{n}\sigma^4$;

(D) $\sigma^2, \frac{4}{n}\sigma^4$.

[]

二、填空题: 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $f(x) = \begin{cases} (e^x + \sin x)^{\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ a, & x \leq 0 \end{cases}$ 连续, 则常数 $a =$ _____.

(10) 设二元函数 $f(u, v)$ 可微, 则 $\frac{\partial}{\partial x} f(e^{xy}, \cos \frac{1}{x}) =$ _____.

(11) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)} + (-1)^{\cos \frac{n\pi}{2}} \frac{1}{2^n} \right]$ 的和为 _____.

(12) 设某商品的收益函数为 $R(p)$, 收益弹性为 $1 + p + p \ln p$, (其中 p 是价格), 且 $R(1) = 1$, 则 $R(p) =$ _____.

(13) 设四阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $A^* =$ _____.

(14) 某人向同一目标独立重复射击, 每次射击命中目标的概率为 $p(0 < p < 1)$, 记 A 为“此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标”这一事件, 又记 X 为服从参数为 $P(A)$ 的 0-1 分布的随机变量, 则 $E(X^2) =$ _____.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本小题满分 10 分)

求不定积分 $\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \cdot e^x dx$.

(16) (本小题满分 10 分)

已知 $f_n(x)$ 满足 $f'_n(x) = f_n(x) + \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^x$, 且 $f_n(1) = \frac{e}{n!}$, 记 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, 求 $s(x)$ 的表达式并画出函数 $y = s(x)$ 的简图.

(17) (本小题满分 10 分)

求二元函数 $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2x^2y^2$ 在闭区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + 2y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ 上的最大值与最小值.

(18) (本小题满分 10 分)

设函数 $f(x, y) = \begin{cases} xy, & (x, y) \in D_1, \\ 1 - x - y, & (x, y) \in D_2, \end{cases}$ 其中 D_1, D_2 是 $\triangle OAB$ 被曲线 $xy + x + y = 1$

划分成的两部分(见图 1-18), 求二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$.

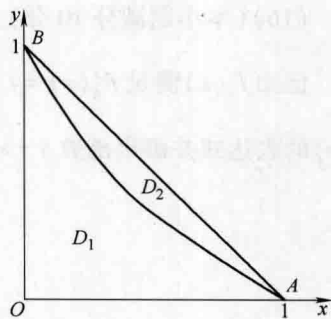


图 1-18

(19) (本小题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, 且 $f'_+(a) > 0$, $f(b) = 0$. 此外存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c) = 0$, $f'(c) < 0$. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

(20) (本小题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, a)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (b, 3, 5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T$, $\beta_2 = (1, 2, 3)^T$, $\beta_3 = (3, 4, b)^T$ 线性表示, 但 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 线性表示, 求常数 a, b .

(21) (本小题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$ (其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ 以及 $\mathbf{Q}$ 是三阶正交矩阵) 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 且 $\mathbf{Q}$ 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$, 求 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵 $\mathbf{A}^*$.

(22) (本小题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 - x^3 y - xy^3), & |x| < 1, |y| < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(I) 求随机变量 $Z = X^2$ 的概率密度 $f_Z(z)$;

(II) 求随机变量 $W = (X - Y)^2$ 的数学期望.

(23) (本小题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 其中 $\theta > 0$ 是未知参数, $x_1, x_2, \dots,$

x_n 是来自总体 X 的一个简单随机样本的观察值, 求 θ 的矩估计值与最大似然估计值.

模拟试题(二)

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的, 请将选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设函数 $f(x) = (x-2) |x(x-2)|$, 则

- (A) $f(x)$ 在点 $x=0, 2$ 处都不可导;
- (B) $f(x)$ 在点 $x=0, 2$ 处都可导;
- (C) $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 而在点 $x=2$ 处不可导;
- (D) $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导, 而在点 $x=2$ 处可导.

[]

(2) 下列等式中不正确的是

- (A) $\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2$;
- (B) $\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{i}{2n}\right)^2$;
- (C) $\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i-1}{2n}\right)^2$;
- (D) $\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{3i-1}{3n}\right)^2$.

[]

(3) 设二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x=y=0, \end{cases}$ 则

- (A) $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不连续;
- (B) $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的两个偏导数都为零;
- (C) $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的两个偏导数存在但都不为零;
- (D) $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微.

[]

(4) 设 $\{a_n\}$ 是单调减少收敛于零的正项数列, 则当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时, 下列结论正确的是

- (A) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 收敛, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散;

(B) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 发散, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛;

(C) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛;

(D) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$ 收敛.

[]

(5) 设向量组 α, β, γ 线性无关, 向量组 α, β, δ 线性相关, 则

(A) α 不可由 β, γ, δ 线性表示;

(B) δ 可由 α, β, γ 线性表示;

(C) β 不可由 α, γ, δ 线性表示;

(D) δ 不可由 α, β, γ 线性表示.

[]

(6) 设 A 是 n 阶矩阵且有以下命题:

① A 有 n 个不同的特征值;

② A 有 n 个线性无关的特征向量;

③ A 是实对称矩阵;

④ A 的每个 n_i 重特征值 λ_i 的特征矩阵 $\lambda_i E - A$ 都满足 $r(\lambda_i E - A) = n - n_i$ (其中 E 是 n 阶单位矩阵).

则 A 可相似对角化的充分必要条件有两类, 它们是

(A) ①②;

(B) ②③;

(C) ②④;

(D) ①④.

[]

(7) 下列命题不正确的是

(A) 设二维随机变量 (X, Y) 在矩形区域 $\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ 上服从均匀分布, 则 X 与 Y 相互独立;

(B) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} abe^{-(ax+by)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (\text{其中 } a, b \text{ 都是正数}),$$

则 X 与 Y 相互独立;

(C) 设二维随机变量 (X, Y) 在圆域 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ 上服从均匀分布 (其中 R 是正数), 则 X 与 Y 相互独立;

(D) 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自同一总体的简单随机样本, 则随机变量 $X = f_1(X_1, X_2)$ 与 $Y = f_2(X_3, X_4)$ (其中 f_1, f_2 都是连续函数) 相互独立.

[]

(8) 设随机变量 $t \sim t(n)$, 对 $\alpha \in (0, 1)$, $t_\alpha(n)$ 为满足 $P(t > t_\alpha(n)) = \alpha$ 的实数, 则满足 $P(|t| \leq b) = \alpha$ 的 b 等于

- (A) $t_{\frac{\alpha}{2}}(n)$; (B) $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$; (C) $t_{\frac{1-\alpha}{2}}(n)$; (D) $t_{\frac{1+\alpha}{2}}(n)$.

[]

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 函数 $y = y(x)$ 由微分方程 $x^2 y' + y + x^2 e^{\frac{1}{x}} = 0$ 及 $y(1) = 0$ 确定, 则曲线 $y = y(x)$ 的斜渐近线方程为_____.

(10) 设 a 是常数, 则 $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^a)(1+x^2)} dx =$ _____.

(11) 设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微, 且

$$f'_x(0, 0) = 1, \quad f'_y(0, 0) = -1,$$

则极限 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2t, 0) + f(0, \sin t) - 2f(t, t)}{t} =$ _____.

(12) 函数 $f(x) = xe^{x+1} + \frac{1}{2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的零点个数为_____.

(13) 已知三阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 记它的伴随矩阵为 A^* , 则三阶行列式

$$\left| \left(\frac{1}{2} A^2 \right)^{-1} - 3A^* \right| = \text{_____}.$$

(14) 设 X 是离散型随机变量, 其分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2, \end{cases}$$

又设 Y 是连续型随机变量, 其概率密度为 $\varphi(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ 记 $a = P(X=1)$, 则概率

$$P(Y \geq a) = \text{_____}.$$

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本小题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + \sin x)^{\frac{\sin x}{\ln(1+x^2)}}$.

(16) (本小题满分 10 分)

设 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, \sqrt{2x - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$, 分别求 D 绕 x 轴和 y 轴旋转一周而成的旋转体体积 V_x 和 V_y .

(17) (本小题满分 10 分)

计算二次积分 $\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^{\sqrt{2}} dr \int_0^{\arccos \frac{1}{r}} r \sin^2 \theta d\theta$.

(18) (本小题满分 10 分)

求微分方程 $y'' + 2y' + y = e^{-x} + \sin 2x \cos x$ 的通解.

(19) (本小题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n(2n-1)} x^{2n}$ 的收敛域与和函数.