Bochner-Riesz平均及相关算子的有界性

Boundedness of Bochner-Riesz means and their ralated operators

夏霞 著

河北大学出版社

自然科学基金资助(项目编号：11371258)

Bochner-Riesz平均及相关算子的有界性

Boundedness of Bochner-Riesz means and their ralated operators

夏霞 著

河北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

Bochner-Riesz平均及相关算子的有界性 / 夏霞著
-- 保定：河北大学出版社, 2013.12
ISBN 978-7-5666-0530-6

Ⅰ.①B… Ⅱ.①夏… Ⅲ.①傅里叶积分－研究
Ⅳ.①O174.22

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第309760号

责任编辑：翟永兴
装帧设计：王占梅
责任印制：靳云飞

出版发行：河北大学出版社
地　　址：河北省保定市五四东路180号
邮　　编：071002
印　　刷：保定市新华印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：1/16（710mm×1000mm）
印　　张：11.25
字　　数：150千字
版　　次：2014年5月第1版
印　　次：2014年5月第1次
书　　号：ISBN 978-7-5666-0530-6
定　　价：30.00元

前　言

Bochner-Riesz平均和多重Fourier积分，是多元Fourier分析的一个重要分支，普林斯顿大学著名数学家Bochner教授开创了这个领域的研究工作，当时Bochner等人的研究课题基本上局限于大于临界阶的情形。美国国家科学院院士、普林斯顿大学调和分析大师Stein教授对临界阶以及小于临界阶情形下的研究做出了重大的贡献。这期间，我国程明德院士开创了用Bochner-Riesz平均逼近函数的研究，随后北京师范大学陆善镇教授在多元Fourier级数临界阶的Riesz平均收敛问题方面，引进多元函数的球形积分概念，推进了多元Fourier级数的经典收敛理论的发展。Bochner-Riesz平均及其相关核心分析问题同偏微分方程的研究紧密联系，其振荡积分算子估计的建立促进了Boussinesq等色散方程的Strichartz估计的建立和适定性研究。

本书简要介绍了低于临界阶的Bochner-Riesz平均在Lebesgue空间有界性的基本理论和振荡型积分的方法。首先应用变尺度方法和Fourier变换的限制性理论给出了低于临界阶Bochner-Riesz平均交换子及其高阶交换子有界性的充要条件；然后讨论了与Bochner-Riesz平均密切相关的Sjolin振荡奇异积分算子及其多线性振荡奇异积分算子的有界性；再应用Littlewood-Paley理论和Fourier变换估计的方法研究了一类卷积算子在齐次Triebel-Lizor kin空间的有界性；最后研究了具粗糙核的振荡奇异积分算子交换子的有界性。笔者希望通过本书，让读者初步了解Bochner-Riesz平均交换子的一些基本理论和应用振荡型奇异积分研究交换子的方法，如果读者有兴趣进一步学习，可以参考陆善镇和王昆扬的专著（《*Bochner-Riesz平均*》1988）、E.M.Stein的专著（《*Harmonic Analysis: Real-Variable methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*》1993）、L.Grafakos的专著（《*Classical and Modern Fourier Analysis*》2005）等。笔者在文献中也给出了一些重要的参考书和最近的一些研究成果。本书的材料来源于笔者在北京师范大学攻读博士学位期间在陆善镇教授的指导下进行的关于低于临界阶的Bochner-Riesz算子交换子方面的研

究和在首都师范大学做博士后期间与李中凯教授合作的高阶交换子方面的成果，以及在天津师范大学和中央民族大学工作六年以来在多线性算子有界性方面的研究。衷心感谢国家自然科学基金《反射不变测度下的调和分析中的一些问题》（项目编号：11371258）的大力支持。

夏霞

中央民族大学

2013年冬

目　录

第一章 引 言

§1.1 两类交换子

自从20世纪50年代A.P.Calderón和A.Zygmund建立奇异积分理论以来，以Calderón-Zygmund奇异积分算子为核心的各类算子（如振荡积分算子、分数次积分算子等）成为近代调和分析理论中最为活跃的课题之一. 由此形成并发展起来的许多方法和技巧，已被广泛的应用于算子有界性的研究当中. 它们在复分析、偏微分方程、位势理论、算子理论、非线性分析与概率论中都有许多应用. 奇异积分交换子则是继奇异积分之后引起人们极大研究兴趣的另一类重要的算子.

定义1.1.1 对于给定的积分算子T和适当的函数b，它们的交换子定义为

$$[b,T]f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)[b(x)-b(y)]f(y)dy$$

其中$K(x,y)$是积分算子T的核函数.

R.R.Coifman，R.Rochberg和G.Weiss[1]最早借助交换子把单位圆盘上Hardy 空间的分解定理推广到高维Hardy空间，同时给出了Hardy空间对偶空间的一种新的刻画. 1982年，S.Chanillo[2]研究了Riesz位势与BMO函数构成的交换子，并由此给出了BMO空间的另一种刻画. 1995年，M.Paluszyński[3]利用Calderón-Zygmund 奇异积分算子和Riesz位势算子交换子的有界性，给出了齐次Besove-Lipschitz空间$\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)(0<\beta<1)$的刻画. 这种对空间的刻画就成了交换子研究的重要理论意义.

一般对两类交换子进行研究：$b\in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$和$b\in \mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)$.

定义1.1.2 设b是定义在$\mathbb{R}^n$上的局部可积函数，定义

$$\|b\|_{\mathrm{BMO}}=\sup_{Q}\frac{1}{|Q|}\int_{Q}|b(x)-m_Q(b)|dx$$

其中$m_Q(b)=\frac{1}{|Q|}\int_Q b(x)dx$，上确界是对一切$\mathbb{R}^n$中的方体$Q$取的. 有界平均振动函数空间$\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$是由所有满足$\|b\|_{\mathrm{BMO}}<\infty$的函数构成的空间.

显然，$L^\infty(\mathbb{R}^n)\subset \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$且$\|b\|_{\mathrm{BMO}}\le 2\|b\|_{L^\infty}$.

定义1.1.3 设$\beta>0$，齐次Lipschitz空间$\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$是由所有满足

$$\|f\|_{\dot{\Lambda}_\beta}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\sup_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\frac{|D_h^{[\beta]+1}(f)(x)|}{|h|^\beta}<\infty$$

的函数构成的空间.

定义1.1.4 设$0<\beta\le 1$，Lipschitz空间$\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)$是由所有满足

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}_\beta}=\sup_{x,y\in\mathbb{R}^n,x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\beta}<\infty$$

的函数构成的空间.

容易看出，当$0<\beta<1$时，$\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)=\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$.

1993年，J.Alvarez、R.J.Bagby、D.S.Kurtz和C.Pérez[4]给出了一类线性算子和BMO函数生成的交换子有界的判别方法.

定理1.1.1[4] 设$1<p,q<\infty$，且线性算子T加权有界，即

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^n,w(x)dx)}\le C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n,w(x)dx)}$$

对所有的$w\in A_q$成立. 若$b\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$，则交换子$[b,T]$在$L^p$上有界.

它适用于标准的Calderón-Zygmund奇异积分算子、临界阶Bochner-Riesz算子、Ricci和Stein的振荡奇异积分算子等重要的经典算子. 但是，Alvarez-Bagby-Kurtz-Pérez定理要求算子满足较为一般的A_q权模估计，由外推定理可知，它只适用于在所有的$L^p(\mathbb{R}^n)$上有界的线性算子. 对于调和分析中许多并不是在所有$L^p(\mathbb{R}^n)$上有界的线性算子，其交换子有界性的研究需要新的方法. 在很多情形下当β趋于0的时候，与Lipschitz函数

构成的交换子与该算子和BMO函数构成的交换子在$L^p(\mathbb{R}^n)$空间上有相同的性质. 因此我们主要关注当$b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$和$b \in \mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)$时某些奇异积分算子交换子的有界性.

第二章　低于临界阶Bochner-Riesz算子交换子的有界性

§2.1　低于临界阶Bochner-Riesz算子

定义2.1.1　设$f \in L(\mathbb{R}^n)$，$\widehat{f}$是f的Fourier变换，则f的Fourier积分的Bochner-Riesz平均是

$$(T_R^\alpha f)^\wedge(\xi) = \left(1 - \frac{|\xi|^2}{R^2}\right)^\alpha \widehat{f}(\xi)\,, \quad R > 0\,.$$

一般研究Bochner-Riesz算子T_R^α当$R \to +\infty$时的收敛性质. T_R^α依$L^p(\mathbb{R}^n)$范数收敛性等价于证明$(1-|\xi|^2)_+^\alpha$是一个$L^p(\mathbb{R}^n)$乘子，即如下定义的线性算子T^α：

$$(T^\alpha f)^\wedge(\xi) = (1-|\xi|^2)_+^\alpha \widehat{f}(\xi)$$

是$L^p(\mathbb{R}^n)$上的有界算子，通过计算知卷积算子T^α的核函数是

$$B^\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\pi^\alpha} \cdot \frac{J_{n/2+\alpha}(2\pi|x|)}{|x|^{n/2+\alpha}}$$

其中J_μ是Bessel函数

$$J_\mu(t) = \frac{(t/2)^\mu}{\Gamma(\mu+1/2)\Gamma(1/2)} \int_{-1}^1 e^{its}(1-s^2)^{\mu-1/2} ds\,.$$

由B^α的渐近式知，当Re$\alpha > (n-1)/2$时，$B^\alpha(x)$是$\mathbb{R}^n$上的光滑可积函数，因此T^α是$L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p \le \infty)$上的有界算子. 而当Re $\alpha \le (n-1)/2$时，$B^\alpha(x) \notin L(\mathbb{R}^n)$，指标$\alpha_0 = (n-1)/2$叫做临界指标.

这个领域的开创性工作是S.Bochner于20世纪30年代提出的，当时Bochner等人的研究课题基本上局限于大于临界阶的情形. 我国程民

德教授曾对Bochner-Riesz平均作过系统的研究，20世纪50年代末和60年代初，E.M.Stein对临界阶以及小于临界阶情形下的研究作出了重大的贡献. 这期间，程民德教授等也开创了用Bochner-Riesz平均逼近函数的研究. 这个领域虽然已经历了半个多世纪的发展，取得了丰富的成果，但至今仍有许多基本问题没有解决，有待继续深入研究.

对低于临界阶Bochner-Riesz算子T^α的L^p有界性的研究，首先要提到的是C.Herz[5]在1954年给出的T^α在$L^p(\mathbb{R}^n)$上有界的一个必要条件.

定理2.1.1 [5] 设$0 < \alpha < (n-1)/2$及$p > 1$. 若T^α在$L^p(\mathbb{R}^n)$上有界，则有

$$|1/p - 1/2| < (1+2\alpha)/(2n)\ .$$

由上述定理的结论，人们自然关心：当$0 < \alpha < (n-1)/2$且$|1/p - 1/2| < (1+2\alpha)/(2n)$时，$T^\alpha$ 是否在$L^p(\mathbb{R}^n)$上有界？就高维情形来说，这个问题仅当$n = 2$时首先被L.Carleson和P.Sjölin[6]所解决，他们使用了振荡型积分的方法. 虽然振荡型积分的方法并不能直接应用于该定理的证明，但当$n = 2$时，他们用特殊的方法克服了这一困难，得到了下述Carleson-Sjölin定理.

定理2.1.2 [6] 设$0 < \alpha < 1/2$. 则T^α 在$L^p(\mathbb{R}^2)$上有界当且仅当

$$|1/p - 1/2| < (1+2\alpha)/4.$$

遗憾的是振荡型积分的方法对$n > 2$的情形并不适用，为此，人们致力于寻找Carleson-Sjölin定理的新的证明. 此后，A.Cordoba[7]使用了几何论证的方法，把Carleson-Sjölin定理的证明同Kakeya极大函数联系起来，他和Lopez-Melero使用了同样的方法，将Carleson-Sjölin定理推广到向量值函数的情形中去. C.Fefferman[8]使用了Fourier变换的限制性定理，L.Hörmander[9]也给出了Carleson-Sjölin定理不同的证明，但所有这些方法均不能直接用于高维情形的研究.

鉴于Carleson-Sjölin定理的成立，人们自然猜想，当$n > 2$时T^α应当在$L^p(\mathbb{R}^n)|1/p - 1/2| < (1+2\alpha)/(2n)$上有界，这一问题迄今尚未完全解

决. C.Fefferman[10]在1970年证明当$(n-1)/4<\alpha<(n-1)/2$时结论是正确的，他的证明方法揭示出Bochner-Riesz乘子和Fourier变换的限制性定理之间有着密切的联系. E.M.Stein[11]使用了Fourier变换的限制性定理给出了一个较为一般的结果：在添加Fourier变换(L^p,L^2)限制定理成立的条件下，上述猜想是成立的.

定理 2.1.3[11] 设$0<\alpha<(n-1)/2$且$|1/p-1/2|<(1+2\alpha)/(2n)$. 若Fourier变换$(L^p,L^2)$限制定理成立，即

$$\left(\int_{|\xi|=1}|\widehat{f}(\xi)|^2d\sigma(\xi)\right)^{1/2}\leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,.$$

则T^α在$L^p(\mathbb{R}^n)$上有界.

随后，P.Tomas[12]改进了E.M.Stein等人关于Fourier变换的限制性定理的早期结果，由此立即得到关于T^α在$L^p(\mathbb{R}^n)$上有界的一般性结果.

定理 2.1.4[10] 设$(n-1)/(2n+2)<\alpha<(n-1)/2$且$|1/p-1/2|<(1+2\alpha)/(2n)$，则$T^\alpha$在$L^p(\mathbb{R}^n)$上有界.

虽然T^α是否在$L^p(\mathbb{R}^n)$ $|1/p-1/2|<(1+2\alpha)/(2n)$上有界的猜想没有得到完全解决，但如果限于径向函数类$L^p(\mathbb{R}^n,r)$时，那么上面的结论是正确的，这是由G.V.Welland[13]证明的.

定理 2.1.5[13] 设$f\in L^p(\mathbb{R}^n,r)$，$|1/p-1/2|<(1+2\alpha)/(2n)$及$0<\alpha<(n-1)/2$，则$\|T^\alpha f\|_{L^p}\leq C\|f\|_{L^p}$.

当$\alpha>(n-1)/2$时，文献[14]证明了Bochner-Riesz算子的加权有界性.

定理 2.1.6[14] 设$\alpha>(n-1)/2$，$1<p<\infty$ 且$w\in A_p$，其中A_p是Muckenhoupt加权类，则T^α在$L^p(\mathbb{R}^n,w(x)dx)$上有界.

因此由Alvarez-Bagby-Kurtz-Pérez定理，若$b\in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$，则交换子$[b,T^\alpha]$在$L^p$上有界. 但当$\alpha<(n-1)/2$时$T^\alpha$只在部分$L^p$上有界，因此Alvarez-Bagby-Kurtz-Pérez 定理不适用于低于临界阶Bochner-Riesz算子交换子的有界性的证明，从而我们主要考虑低于临界阶Bochner-Riesz算子与BMO函数构成的交换子的有界性.

在叙述本章关于交换子有界性结论之前，我们先引入一些引理以供相关定理的证明之用.

引理2.1.1 [Plancherel定理] 设$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$，则

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{F}^{-1}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

其中$\mathcal{F}^{-1}(f)$为fFourier逆变换.

引理2.1.2 [Hausforff-Young不等式] 设$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p \le 2)$，则

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

其中$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

引理2.1.3 [Hardy-Littlewood极大函数] 设$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p \le \infty)$，则如下定义的Hardy-Littlewood极大函数

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|V_n| \cdot r^n} \int_{|y|<r} |f(x-y)| dy$$

在$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$上有界.

引理2.1.4 [Hölder不等式] 设$1 \le p < \infty$，则对任意可测函数

$$\|fg\|_{L^1} \le \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

其中$1/p + 1/q = 1$.

§2.2 低于临界阶Bochner-Riesz算子与BMO函数构成的交换子

对于相应的交换子的有界性，胡国恩和陆善镇[15]早在1996年便得到了低于临界阶Bochner-Riesz算子和BMO函数构成的交换子的$L^p(\mathbb{R}^2)$有界性，他们的结果表明交换子有着和Bochner-Riesz算子相同的L^p有界性质，

本节细致讨论低于临界阶Bochner-Riesz算子和BMO函数构成的交换子的有界性.

文献[5]通过证明$B^\alpha(x) = \left((1-|\cdot|^2)_+^\alpha\right)^\wedge(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$得到了上述定理2.1.1，但是该方法不能应用于交换子的情形，因为BMO函数的Fourier变换可能没有意义. 我们通过连续分解$T^\alpha f(x) = \sum_{j=0}^\infty (B^\alpha\varphi_j) * f(x)$，其中$\varphi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$满足一定的光滑条件，并选择适当的$L^p$函数我们给出定理2.1.1的新的证明，并将该方法用于证明低于临界阶的Bochner-Riesz算子和BMO函数构成的高阶交换子有界的必要性证明中.

定理2.1.1的证明 设$0 < \alpha < (n-1)/2$，选择$f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$满足

$$0 \le f \le 1,\ \ f(x) = 1\ (|x| \le 1/2),\ \ f(x) = 0\ (|x| \ge 1)\ ,$$

则$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. 设T^α是$L^p(\mathbb{R}^n)$上的有界算子，其中$1 < p \le 2$，我们将证明

$$p > 2n/(n+1+2\alpha)\ .$$

令$\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$满足

$$0 \le \psi(x) \le 1, \quad \psi(x) = 1\ (|x| \le 1), \quad \psi(x) = 0\ (|x| \ge 2)\ ,$$

于是

$$\psi(x) + \sum_{N=1}^\infty (\psi(2^{-N}x) - \psi(2^{-N+1}x)) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\ .$$

记$\varphi_0(x) = \psi(x)$，$\varphi_N(x) = \psi(2^{-N}x) - \psi(2^{-N+1}x)$，$N = 1, 2, \cdots$，

$$B^\alpha(x) = C_\alpha \frac{J_{n/2+\alpha}(|x|)}{|x|^{n/2+\alpha}}$$

其中$J_\gamma(t)$为Bessel函数. 因此

$$T^\alpha f(x) = \sum_{N=0}^\infty (B^\alpha\varphi_j) * f(x) = \sum_{N=0}^\infty \widetilde{T}^N f(x)\ .$$

注意到 $\text{supp}\varphi_N \in \{x:\ 2^{N-1} \le |x| \le 2^{N+1}\}$， $N \ge 1$ 且 $\text{supp}\varphi_0 \subset \{x: |x| \le 2\}$，我们有

$$\begin{aligned}\text{supp}\ \widetilde{T}^N f &\subset \{x:\ 2^{N-1}-1 \le |x| \le 2^{N+1}+1\} \\ \text{supp}\ \widetilde{T}^0 f &\subset \{x:\ |x| \le 3\}\,.\end{aligned}$$

因为$\|T^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C < +\infty$，且

$$\begin{aligned}\|T^\alpha f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\sum_{N=0}^{\infty}\widetilde{T}^N f(x)\right|^p dx \\ &= \int_{|x|<4}\left|\sum_{N=0}^{\infty}\widetilde{T}^N f(x)\right|^p dx + \sum_{i=2}^{\infty}\int_{2^i\le|x|<2^{i+1}}\left|\sum_{N=0}^{\infty}\widetilde{T}^N f(x)\right|^p dx \\ &= \int_{|x|<4}\left|\sum_{N=0}^{3}\widetilde{T}^N f(x)\right|^p dx \\ &\quad + \sum_{i=2}^{\infty}\int_{2^i\le|x|<2^{i+1}}\left|\sum_{N=i-1}^{i+2}\widetilde{T}^N f(x)\right|^p dx\,,\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{i\ge 6}\int_{2^i\le|x|<2^{i+1}}\left|\sum_{N=i-1}^{i+2}\widetilde{T}^N f(x)\right|^p dx \le C < +\infty\,. \tag{2.2.1}$$

若令$\phi_i(x) = \sum_{N=i-1}^{i+2}\varphi_N(x)$，则 $\text{supp}\phi_i \subset \{x:\ 2^{i-2} \le |x| \le 2^{i+3}\}$，注意到

$$J_\gamma(t) = \left(\frac{2}{t\pi}\right)^{1/2}\cos\left(t - \frac{\pi\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + r(t)\,, \qquad t \to +\infty\,, \tag{2.2.2}$$

$$r(t) = O(t^{-3/2})\,, \qquad t \to +\infty\,, \tag{2.2.3}$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\sum_{N=i-1}^{i+2}\widetilde{T}^N f(x) = (2/\pi)^{1/2}C_\alpha \\ &\times\int_{|x-y|\ge 1}\cos\left(|x-y| - \frac{\pi(n+1+2\alpha)}{4}\right)\frac{\phi_i(x-y)}{|x-y|^{(n+1)/2+\alpha}}f(y)dy\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +C_\alpha \int_{|x-y|\ge 1} r(|x-y|)\frac{\phi_i(x-y)}{|x-y|^{n/2+\alpha}} f(y)dy \\
& +C_\alpha \int_{|x-y|\le 1} J_{n/2+\alpha}(|x-y|)\frac{\phi_i(x-y)}{|x-y|^{n/2+\alpha}} f(y)dy \\
= \;& P_i f(x) + Q_i f(x) + R_i f(x) \;.
\end{aligned}
$$

对任意$i \geq 6$，$R_i f(x) = 0$. 又 $\operatorname{supp} f \subset \{x:\ |x| \leq 1\}$，于是

$$
\begin{aligned}
|Q_i f(x)| &\le C_\alpha \int_{|x-y|\ge 1} |x-y|^{-[(n+3)/2+\alpha]}\, |\phi_i(x-y) f(y)| dy \\
&\le 2C_\alpha \int_{2^{i-2}\le |x-y|\le 2^{i+3}} |x-y|^{-[(n+3)/2+\alpha]} f(y)dy \\
&\le 2C_\alpha 2^{-(i-2)[(n+3)/2+\alpha]} \int_{|y|\le 1} f(y)dy \\
&\le C_{\alpha,n} 2^{-i[(n+3)/2+\alpha]} \;.
\end{aligned}
$$

从而可得

$$
\int_{2^i \le |x| < 2^{i+1}} |Q_i f(x) + R_i f(x)|^p dx \;\le\; C_1 2^{-i[(\frac{n+3}{2}+\alpha)p-n]} \;. \quad (2.2.4)
$$

令

$$
\begin{aligned}
I_k &= \left[2k\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi(n+1+2\alpha)}{4} + 1,\ 2k\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi(n+1+2\alpha)}{4} - 1\right] \\
A_k &= \left[2k\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi(n+1+2\alpha)}{4} - 1,\ 2(k+1)\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi(n+1+2\alpha)}{4} + 1\right] \;.
\end{aligned}
$$

因对任意 $i \geq 6$ 有 $|I_k| + |A_k| = 2\pi < (2^i - 2)/3$，故

$$
M_i = \{k \in \mathbb{N} : I_k \subset [2^i + 1,\ 2^{i+1} - 1]\} \neq \emptyset, \qquad i \geq 6 \;.
$$

由于$|I_k| = C|A_k|$其中C是和k无关的常数，从而

$$
\begin{aligned}
\int_{|x|\in A_k} dx &= C\int_{A_k} r^{n-1} dr \\
&\le C\left[2(k+1)\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi(n+1+2\alpha)}{4} + 1\right]^{n-1} |A_k| \\
&\le C2^{n-1}\left[2k\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi(n+1+2\alpha)}{4} + 1\right]^{n-1} |I_k| \\
&\le C\int_{I_k} r^{n-1} dr = C\int_{|x|\in I_k} dx \;. \qquad (2.2.5)
\end{aligned}
$$

类似于上述估计，我们有

$$\int_{|x|\in I_{k-1}} dx \le \int_{|x|\in I_k} dx \le C\int_{|x|\in I_{k-1}} dx\ , \tag{2.2.6}$$

其中C与k无关. 又 $|x|\in I_k$ $(k\in M_i)$， $|x-y|\le 1$ 蕴涵着

$$2^i \le |x|-1 \le |y| \le |x|+1 \le 2^{i+1}\ ,$$

$$2k\pi-\frac{\pi}{3} \le |y|-\frac{\pi(n+1+2\alpha)}{4} \le 2k\pi+\frac{\pi}{3}\ .$$

此外由 ϕ_i 的定义对任意 $2^i \le |y| \le 2^{i+1}$ 有 $\phi_i(y)=1$，因此对任意 $|x|\in I_k$，注意到 $\operatorname{supp} f\subset\{y:|y|\le 1\}$，我们有

$$\begin{aligned}
& P_i f(x) \\
= \ & (2/\pi)^{1/2}C_\alpha\int_{|x-y|\ge 1}\cos\left(|x-y|-\frac{\pi(n+1+2\alpha)}{4}\right)\cdots \\
& \times\frac{\phi_i(x-y)}{|x-y|^{(n+1)/2+\alpha}}f(y)dy \\
= \ & (2/\pi)^{1/2}C_\alpha\int_{|y|\le 1}\cos\left(|x-y|-\frac{\pi(n+1+2\alpha)}{4}\right)\frac{\phi_i(x-y)}{|x-y|^{(n+1)/2+\alpha}}f(y)dy \\
= \ & (2/\pi)^{1/2}C_\alpha\int_{|x-y|\le 1}\cos\left(|y|-\frac{\pi(n+1+2\alpha)}{4}\right)\frac{\phi_i(y)}{|y|^{(n+1)/2+\alpha}}f(x-y)dy \\
\ge \ & 2^{-1}(2/\pi)^{1/2}C_\alpha 2^{-i[(n+1)/2+\alpha]}\int_{|x-y|\le 1}f(x-y)dy \\
= \ & C_2 2^{-i[(n+1)/2+\alpha]}\ .
\end{aligned}$$

因此由(2.2.5)及(2.2.6)可得

$$\begin{aligned}
\int_{2^i\le|x|<2^{i+1}}|P_i f(x)|^p dx \ &\ge \sum_{k\in M_i} C_2 2^{-pi[(n+1)/2+\alpha]}\int_{|x|\in I_k} dx \\
&\ge C_2 2^{-pi[(n+1)/2+\alpha]}\sum_{k\in M_i}\int_{|x|\in I_k\cup A_k} dx \\
&\ge C_2 2^{-pi[(n+1)/2+\alpha]}\int_{2^i\le|x|\le 2^{i+1}} dx \\
&\ge C_2 2^{-i[(\frac{n+1}{2}+\alpha)p-n]}\ .
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$