

衡陽唐榘獻譯述

漢譯何魯
陶三氏

高中代數學

冊上

商務印書館發行

何魯陶三氏

代 數 學

第 一 編



第 一 章

代 數 學 之 緒 論

1. 代數學所有各種理論。雖云新穎。然學者當能知其爲繼算術而論數之學也。

2. 符號 符號之用於代數學。較算術爲廣。且聯合其意義與用途。遂另生種種新意義。符號之中。有用以表數者。又有指示運算。與表現數與數間之關係者。如亞拉伯數字與字母。均用以表數。以下則均爲運算之符號。如 $+$, $-$, $\times$, $\div$, 其意義均與算術上相同。 $+$ 讀爲加, $-$ 讀爲減, $\times$ 讀爲被乘, $\div$ 讀爲被除。但乘法之符號。常用點以表示。或竟省略之。例如 $3 \times a$ 寫作 $3 \cdot a$ 或 $3a$ 。又 $2 \times a \times b$ 寫作 $2ab$ 是也。又 $a \div b$ 常寫作 $\frac{a}{b}$ 。又符號 $=$ 讀爲等, 或等於。

習 題

1. 若 h 與 m 爲表示一點鐘與一分鐘內所有之秒數。問 $4h+3m$ 爲若干秒。

2. 若 y 與 f 表一碼及一呎內之吋數。問 $5y+4f$ 爲若干吋。

3. 若 q 表二角五仙。 d 表一角。問 $4q+6d$ 之價值爲若干仙。

4. 若 t 與 h 表一噸與一擔 (100 磅) 內之磅數。問 $4t+6h$ 爲若干磅。

5. $3x+5x=$ 若干 x .

9. $x+x+2+x+x+2=?$

6. $4x+5x=(?)x$.

10. $n+n+1+n+2=?$

7. $2x+3x+6x=?$

11. $5a+18-3a-7=?$

8. $2x+2+3x+4=(?)x+?$

12. $8x-3+18-5x=?$

13. $4w-8+3w+20=?$

14. 若 m 表一月。又 $y=12m$ 。試以 m 之項表 $y+5m$ 。

15. 若 y (一碼) 等於 $3f$ (一呎)。試以 f 之項表 $2y+7f$ 。

16. 若 q (二角五仙) 等於 $5n$ (n =五仙)。問 $4q+3n$ 有若干 n 。

17. 若 $d=24h$ 。問 $12d+5h$ 爲若干 h 。

18. 若 $h=60m$ 。問 $15h+50m$ 爲若干 m 。

19. 一正方形之邊爲 5 吋。問其面積若干。又其周圍之長若干。

20. 一矩形之底爲 12 呎。其高爲 4 呎。求其面積與其周圍。

21. 一正方形之邊爲 5 吋。試表其周圍,與其面積。

22. 若 6 呎爲一矩形之底。又以 a 呎表其高。問其面積與其周圍各若干。

23. 一矩形之長爲其闊之 2 倍。令 x 表其闊之呎數。試求以下各件。(a) 以 x 表其長度, (b) 周圍, (c) 面積。

24. 某人長於其子三倍。若 y 爲其子之年齡。問其父之年齡若干。

25. 父長於其子 30 歲。若 y 爲其子之年齡。問其父之年齡若干。

26. 一矩形之長。較其闊多 12 呎。命 w 表其闊之呎數。試以 w 之項與他數。表其長度與其周圍。

27. 一矩形之闊。較其長短 18 呎。若其闊爲 w 呎。則其長與周圍各如何。

28. 一矩形之長。較其闊之二倍多 4 呎。試以字母或字母與數。表其長與闊。并其周圍。

符號之源流 現時用於代數上之各符號。其歷史不僅有趣味而已。且足以知代數進步之遲緩。每見表示一種省略與暗示之符號。似覺無甚意義。而其運算與方法。有百世尙難了解者。因相傳已久。遂忘其所以然也。

在古時實無通用之代數符號。常寫出加減等於等之全字。至第十六世紀。意大利之數學家。始用起首之字母 p 與 m 以代 $+$ 與 $-$ 。試思近代之符號 $+$ 。實經過書字首之 m 。漸漸棄去其字之曲綫。終至留簡單之直綫。符號 $+$ 。亦同樣由 p 變爲簡易。又有謂十五世紀時。德國實始用此等符號。以記載倉庫貨箱之重量。蓋以多數貨箱裝入倉庫時。假定每個

重 100 磅。若某箱較標準重量超過 5 磅。則記爲 $100+5$ 。若少 5 磅。則記爲 $100-5$ 。雖第一次用此等符號時。已於 1489 年公布。然至 1630 年。始可謂爲通用。

乘法之符號。大約在 1630 年已用之。 $\times$ 形之符號。爲英人奧楚雷 (Oughtred) 與華累笛 (Harriot) 所用。點則爲法人代加德 (Descartes) 第一次所書。奧氏曾於 1585 年。爲雷利先生 (Sir Walter Raleigh)。派往美國。返國時。呈一視察報告書。爲伊初次測量維基利亞 (Virginia) 與北加羅利亞 (North Carolina) 等地所縮繪之地圖。此亦可著意之事也。故附記之。

又有可怪者。用綫以表示除法。較現在所用之諸符號爲先。故爲最古之符號。紀元後 100 年時。亞拉伯人已用 $\frac{a}{b}$ 與 a/b 以表 b 除 a 之商。而符號 $\div$ 。則 1630 年始出見。

表相等之法不一。在 1600 年以前。常完全寫出等字。雖十二世紀時。印度人以方程式之兩邊之一。置諸他邊之上。然近代之符號 $=$ 。則大約爲 1557 年英人雷可特 (Recordes) 所引出。因其言曰。無二物能較平行綫更相等者故也。其初此符號亦通行。其後五十年內。常見有 $\parallel$, ∞ , $\propto$, 等符號。

3. 符號之用處 符號能簡約通常之言語。用之於問題之解法。

例如某數之三倍。較 20 少 5。求某數。

若 n 表某數。則此例之意義。可以符號表出之。

$$3n = 20 - 5.$$

$$n = ?$$

此符號所表出者。如 $3n = 20 - 5$ 。謂之方程式。其 n 謂之未知數。

若 $3n = 20 - 5.$

$$3n = 15.$$

則

$$n = 5.$$

上例說明解析問題之代數法。則直接而且簡單。學者銳意前進。當更覺其便利。

例題

1. 二數之和為 112。其大者為其小者之三倍。問二數各若干。

解法 由題意

$$\text{大數} + \text{小數} = 112.$$

若以 l 表小數。則大數必為 $3l$ 。故上之敘述為

$$3l + l = 112.$$

集合

$$4l = 112.$$

得

$$l = \frac{112}{4} = 28.$$

又

$$3l = 3 \times 28 = 84.$$

故大數為 84。而小數為 28。

問題

1. 二數之和為 160。其大數為其小數之四倍。問二數各若干。

2. 某數加其數之五倍。等於 216。求某數。

3. 一數為他數之七倍。而其和為 72。求各數。

4. 有三數。其第一數為第三數之二倍。其第二數為第三數之四倍。而其和為 105。求各數。

5. 三數之和為 117。其第二數為第一數之二倍。又第三數為第二數之三倍。求各數。

6. 三數之和為 192。其第一數為第二數之三倍。又第三數等於其他二數之和。求各數。

7. 三數之和爲 324。其第二數五倍於第一數。又第三數六倍於第二數。求各數。

8. 三數之和爲 104。其第二數爲第一數之三倍。其第三數爲他二數之和。求各數。

9. 問金額若干。放出一年。可得本利合計 378 元。但其利金爲本金之 5%。

解法 由算術

$$\text{本金} + \text{利金} = \text{本利合計}.$$

由題意

$$\text{本金} + .05 \text{ 本金} = 378 \text{ 元}.$$

若 p 表本金。則最後之敘述爲

$$p + .05p = 378.$$

集項

$$1.05p = 378.$$

得

$$p = \frac{378}{1.05} = 360.$$

故所求之金額爲 360 元。

10. 問若干金額。以 6% 貸出一年。可得本利合計銀 265 元。

11. 問若干金額。以單利 4% 貸出 3 年。可得本利合計 700 元。

12. 本金 520 元。以 $6\frac{1}{2}\%$ 單利貸出。問須若干年。始可得利金 169 元。

13. 本金 225 元。以 6% 單利貸出。問須若干年。可得利金 27 元。

14. 有本金 375 元。問須以百分之幾之單利貸出。於二年間。得利金 75 元。

解法 令

$x =$ 利率。

則

$\$375x =$ 一年之利金。

又

$\$750x =$ 二年之利金。

但

$\$75 =$ 二年之利金。

所以

$750x = 75$ 。

得

$x = \frac{1}{10}$ 。

由是其貸出之利率為 10%。

15. 問須以百分之幾之單利貸出。則本金 825 元。可於四年內得利金 165 元。

16. 問須以百分之幾之單利貸出。則本金 250 元。可於六年內得本利合計 317.5 元。

17. 以 4% 單利行息。問須若干年。始可得本金 200 元之兩倍。

18. 以 5% 單利行息。問須若干年。始可得本金 150 元之三倍。

19. 某正方形之周圍為 160 呎。求其各邊之長。

20. 某矩形之周圍為 256 呎。其長三倍於其闊。問其長闊各若干。

21. 一矩形之周為 198 吋。係兩相等方形并列所成。試求矩形之長與闊。并各正方形之周圍。

22. 兩個相等之方形并列成一矩形。若各正方形之周圍為 120 吋。問矩形之周圍若干。

4. 數之表示 在代數學中。可以一個數字，或一個以上之數字，或字母，或聯合數字與字母，以表各種數值。

如 $3, 25, a, 2b, 4xy$ 與 $2x+3$ 等。皆為數之代數的符號。然 $4xy$ 與 $2x+3$ 果係表示何數。則尚不知。必須 x 與 y 均為代已知數者。始可決定。在一問題內。此種符號所有之價值。與在他一問題內者。顯然不同。欲以種種方法。以決定各值於不同之問題中。此即代數學之主要目的也。

5. 因子 各數連乘。此各數中之任一數。謂之此連乘積之一因子。

如 $3ab$ 。其意即 3 乘 a 乘 b 。其中任一數 $3, a$ ，與 b 均各為 $3ab$ 之一因子。同理。 $4(a+b)$ 。其意即 4 乘 $(a+b)$ 。其 4 與 $a+b$ 。均為 $4(a+b)$ 之因子。

6. 指數 指數係書於他一數之右上方之一數。用以表明取此他一數之若干個為其因子者。

(此定義之末句。可改為分數與其他之代數的數。均得為指數。)

如 $3^2=3\cdot3$, $5^3=5\cdot5\cdot5$, 又 $a^4=a\cdot a\cdot a\cdot a$, $4xy^3=4x\cdot y\cdot y\cdot y$ 。於 a^b 。則 b 亦 a 之指數。若 a 為 4 而 b 為 3。則 $a^b=4^3=4\cdot4\cdot4$ 。指數若為 1。則常不寫出。

7. 係數 若一數為二因子之積。則此二因子在此積中互為係數。

故 $4x^2y$ 中 4 爲 x^2y 之係數。 y 爲 $4x^2$ 之係數。又 $4y$ 亦 x^2 之係數。凡數的係數 1。常省略之。若遇有 1 以外之數係數。則常書之於前。例如 $5x$ 。不書作 $x5$ 。

下例說明係數與指數間不同之意義。

$$3x = x + x + x.$$

$$x^3 = x \cdot x \cdot x.$$

若於各式中 $x=5$ 。則 $3x$ 代 15。而 x^3 則代 125。若 x 於各式中等於 10。則 $3x=30$ 。而 $x^3=1000$ 。

8. 括弧之用法 若二或二以上之數。用運算記號聯結之。而包含於一括弧內。則其內之式。可視爲一符號所代之數。

故 $3(6+4)$ 。其意即 $3 \cdot 10$ 。即 30。 $(17-2) \div (8-3)$ 。其意爲 $15 \div 5$ 。即 3。 $(5+7)^2$ 。其意即 12^2 。或 144。又 $6(x+y)$ 。其意即 x 與 y 之和之六倍。

平方根之符號爲 $\sqrt{\quad}$ 或 $\sqrt{\quad}$ 。又立方根之符號爲 $\sqrt[3]{\quad}$ 。皆與算術上相同。

根號之名。通用於以下之符號 $\sqrt{\quad}$ ， $\sqrt[2]{\quad}$ ， $\sqrt[3]{\quad}$ ， $\sqrt[4]{\quad}$ 等等。根號上之小字如 $\sqrt[3]{\quad}$ 之 3 字。常稱爲指數。

備考 數根之符號不一。已經過一番研究。符號 $\sqrt{\quad}$ 。於 1544 年。爲德人史梯夫 (Stifel) 所引出。此即拉丁字 (Vadix) 之首一字母也。即根 (root) 之意。在此時以前。平方根用符號 R 表之。如 $\sqrt[4]{5}$ 必以 $R45$ 。現時則惟醫生於處方時用之。即首方 (recipe) 之省筆也。古時間有用點以指示平方根者。如 $\sqrt{2}$ 則以 $\cdot 2$ 表之。而亞拉伯人表數之根。則以亞拉伯數字直接除其數。

習題

(將以下各題以符號寫出之。)

1. 三倍 a 與五倍 b 之和。
2. 從五倍 b 中減去三倍 a 。
3. 從 b 之平方減去 b 之平方。
4. 從三倍 a 之平方減去二倍 a 之平方。
5. a 以 b 除之所得之商。
6. 四倍 a 之平方與 b 相乘之積。
7. a 與 b 之和以其差除之。
8. a 與 $2b-c$ 相乘之積。
9. a 與 b 加 c 之和之積。
10. 從 $7x$ 減去 $a-b$ 之結果。
11. a, b 之和與其差相乘之積。
12. $5a$ 之平方根與 $7b$ 之立方根之和。
13. $x-y$ 與 $7x$ 之平方根之積。
14. a 與 b 之和之平方。
15. a 與 b 之差之平方。
16. 三倍 a 乘 b 之立方以四倍 c 乘 a 之立方除之所得之商。
17. a 以 $3x$ 除之與 $4y$ 以 c 除之所得之商之和。
18. 讀第10節習題1.—14.

9. 基本算術運算之順序 試從左至右讀下式。 $6+4\cdot9-12\div3$ 。且從其各符號所示之運算而演之。則得10, 90, 78, 終至得26之結果。若先計算其乘法與除法。則其式爲 $6+36-4$ 而等於38。此兩種結果。皆係表明此式之價值。因其所取演算方法之順序不同。則所得之價值亦異。然則果以何者爲是。故不可不有順序之規則。茲述之於下。

I. 連續演算。如僅含有加法及減法者。可照其順序演之。

如 $8+12-10+6=20-10+6=10+6=16$ 。

若謂 $8+12-10+6=20-16=4$ 則誤。

II. 連續演算。如僅有乘法及除法者。可照順序演之。

如 $8\cdot12\div6\cdot4=96\div6\cdot4=16\cdot4=64$ 。

若謂 $8\cdot12\div6\cdot4=96\div24=4$ 則誤。

III. 於一連續演算中含有加法減法乘法與除法者。則乘法與除法。較任何加法減法均先行演算。然後依第1條演算加法減法。

故 $6+4\cdot9-12\div3=6+36-4=38$ 。

若 $6+4\cdot9-12\div3=10\cdot9-4=86$ 。

於連續演算中。有一式含於括弧內者。可視爲一簡單數。故任插入若干括弧。仍可適用 I, II, III 各規則。

故 $(3+2)6=5\cdot6=30$ 。

又 $8+(7-3)(9-6\div2)-4=8+4\cdot6-4=8+24-4=28$ 。

習 題

簡單以下各題。

1. $20-5+6-10.$

6. $18 \div (2 \cdot 3).$

2. $16-(8-2).$

7. $(6-3)(17-2 \cdot 5).$

3. $14-(16-8)+(12-4).$

8. $23 \div 2 \cdot 6 - 4 \div 2 + 16.$

4. $6 \div 3 - 2.$

9. $18 \div (9-3).$

5. $8 \cdot 6 \div 3 - 10.$

10. $(10-3)(16-3 \cdot 2+8 \div 4).$

11. $14-3 \cdot (16-2 \cdot 5) \div 6+8 \cdot 2.$

12. $(18-2)-6 \div (4+2 \cdot 8-18 \div 9).$

13. $(16-6)(18-8) \div 100 \cdot 5 - 5.$

14. $(5+3)(5-3) \div 5-3.$

10. 代數式之評值 對於式中文字之某值。以求此式之數值。謂之此代數式之評值。此法則。常用以精密試驗代數演算法之結果。

習 題

從 1—23 各題。令 $a=3, b=1, c=5, d=7, e=2$ 以之代各文字而求其數值。并依第 9 節之法。簡單其結果。

1. $4a+3d.$

6. $\frac{d+c}{e}.$

11. $\frac{cd+ae+ce}{a-b+c}.$

2. $a^2+2c.$

7. $\frac{cde}{5e} + \frac{ace}{2a}.$

12. $\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{a+b+c+d}.$

3. $ab+cd.$

8. $\frac{10b}{e} - \frac{c}{b}.$

13. $\frac{a^3-ce^2+3cd}{d-a+c}.$

4. $c^2-5ab.$

9. $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}.$

5. $abcd-4e^2.$

10. $\frac{e^2}{ac} + \frac{4cd}{ae}.$

14. $5b^3+4b^2-2b-5.$

$$15. 3b^5 - 14b^4 + 11b^3 + 11b^2 + 13b - 20.$$

$$16. a^e. \quad 18. d^e + e^a. \quad 20. d^e - e^2 + b^3.$$

$$17. e^a. \quad 19. b^e + c^a. \quad 21. e^2 \cdot c^a.$$

$$22. \frac{d+e^e}{2c+a}. \quad 23. \frac{a^a+3b}{c^2-d-e-b}.$$

求以下各題之數值。但 $a=4$, $b=0$, $c=5$, $d=7$, $e=8$.

$$24. \frac{4a+3b+2d}{c+e+2}. \quad 35. de+ac\sqrt{ac^2+2e+c}.$$

$$25. \frac{b}{a+c+d}. \quad 36. (a+c)c.$$

$$26. abc+acd-bc. \quad 37. (a+e)(c+d).$$

$$27. \frac{ab}{c} + \frac{bd}{a} + \frac{bc}{cd}. \quad 38. ab(a+b).$$

$$28. \frac{a^2-b^2+c^3}{3d-2e+c}. \quad 39. acd(a+c+d).$$

$$29. \sqrt{a} + \sqrt{2e}. \quad 40. ac(e-c+b+d).$$

$$30. 2\sqrt{a} + \sqrt[3]{e}. \quad 41. (a+d)^2.$$

$$31. b\sqrt{a}+cd+\sqrt[3]{e} \cdot \sqrt{a}. \quad 42. (e-a)^2.$$

$$32. c\sqrt[2]{2ae}+d\sqrt[3]{2ae}. \quad 43. (d-a)^3.$$

$$33. \sqrt{b^2+c^2+d+a}. \quad 44. \frac{3ad(3a-2c)^2(e-c)^3}{6ed}.$$

$$34. \sqrt[3]{3d+ec+a-1}. \quad 45. \frac{ab(c+d)(a+b)}{(e-a)}.$$

$$46. c^3-3c^2a+3ca^2-a^3.$$

$$47. \text{若 } x=2, y=5. \text{ 問 } 3x+5y=21 \text{ 否.}$$

$$48. \text{若 } x=8, \text{ 問 } 7x-9=3x+25 \text{ 否.}$$

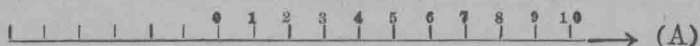
$$49. \text{若 } x=2, \text{ 或 } x=3, \text{ 或 } x=4. \text{ 問 } x^2+5x=0 \text{ 否.}$$

$$50. \text{若 } x=5, \text{ 或 } x=\frac{1}{3}, \text{ 或 } x=6, \text{ 或 } x=4. \text{ 問 } 3x^2-14x-5=0 \text{ 否.}$$

第二章

正數及負數

11. 算術的加法及減法 假令於一直線上取若干等分。而於其連續各分點。記以自然數。如下圖。



此數尺。可用以說明算術上之加法與減法之運算。

如加 5 於 3。可從 3 起。向右取 5 格。得其和為 8。若從 5 起。向右取 3 格。所得之結果亦同。由是得下規則。

規則 加 a 於 b 。則從 b 起。於其右取 a 。即得。

又從 7 減 4。可從 7 起。向左取 4 格。遂得 3。此種進行。可概言之於下。

規則 從 b 減 a 。則自 b 起。於其左取 a 格。即得。

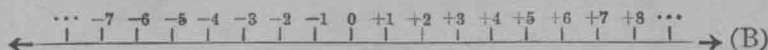
依上之規則。從 4 減去 5。則零點左之第一分點。算術上實無表明此種結果之數。故自 4 減 5。視為不可能。在算術。當曰此種減不能計算。雖然。從 4 個單位中。減去 5 個單位。尚餘一個單位未減耳。在代數上。則無論自大數減去小數。或自小數減去大數。均為可能。且必須說明從小數減去大數。而稱其未減去之一部分為餘數。於此餘數之前。置一減號以指示之。如 $4-5=-1$ 是也。由是可設想零點左之第一分點。相當於 -1 。同樣。 $3-5=-2$ 。其 -2 必相當於零點左之第二分點。

又依同樣之方法。 $5-8=-3$ 。必相當於零點左之第三分點。其零左第四分點。必相當於 -4 。第五分點相當於 -5 。餘類推。

如 $-1, -2, -3$ 等數。皆稱為負數。寫負數時。其減號萬不可省。文字 x 表負數時亦然。

與負數相反。為算術上通常之數者。曰正數。若一數之前未記符號。或已記有加號者。均為正數。

正數與負數間之關係。可以尺表示之如下。



習題

依 P. 14 之規則。照上列之尺。以計算加法與減法。

1. 加 4 於 2.
3. 加 5 於 3.
5. 加 2 於 -4 .
2. 加 4 於 -2 .
4. 加 3 於 -3 .
6. 加 5 於 -7 .
7. 從 5 減去 2.
10. 從 -2 減去 4.
8. 從 2 減去 5.
11. 從 -4 減 3.
9. 從 4 減 6.
12. 從 -3 減 2.

12. 正數及負數之實用 正數與負數之尺 (B)。可用以計算日常之事物。其已用於實際上之例甚多。如刻一寒暑表於水銀所在之某點。取以為零。而於此點之上下。各記若干度。若言某溫度為 18° 。此實渺無限制。必須言零以上或零以下而後可。在零以上者則用 $+18^\circ$ 表示。在零以下者。則用 -18° 表示。

同理。地球赤道上之任一點。皆在緯線零度內。而緯綫 40° N。其意即赤道以北 40° 。同理。 30° S。意即赤道以南 30° 。但 $+40^{\circ}$ 與 -30° 。亦可以同一意義通用。此易於了解也。

習 題

1. 若現在之溫度為 $+10^{\circ}$ 。於溫度低下 (a) 5° (b) 10° (c) 18° 之後。應如何表出之。

2. 若現在之溫度為 -12° 。於升高 (a) 7° (b) 12° (c) 25° 之後。其溫度為何。

3. 於前問內。將升高二字變為低降。其答如何。

4. 某船從緯綫 $+13^{\circ}$ 向南駛行。至緯綫 -7° 。若每度為 69 哩。問此船已駛行若干遠。

5. 某船以每日 4° 之速度。從緯綫 $+20^{\circ}$ 向南駛行。問此後 6 日。逐日所至之緯度在何處。又問在若干日內。始可至緯綫 -16° 。

6. 某人之產業。值 5200 元。負債 2300 元。應如何用正數及負數。以表示 (a) 此二種之價值。(b) 某人最後之不動產。

備考 紀元 700 年以前。印度人之書中。已有負數之定義。且用財產與負債。以解明正數及負數之意義。為時已久。印度人提出近千年矣。

7. 若將 6 題之負債與產業互換。則 (a) 與 (b) 之答為何。

8. 上午 6 時之溫度為 -12° 。於晨間每小時增 3° 問上午 9 時, 10 時, 及下午 1 時之溫度各如何。