Б.П. 吉米多维奇

数学分析习题全解

毛　磊　滕兴虎　寇冰煜
张　燕　李　静　毛自森　编著

3

经典名著最新版本　全书增补数百新题

题型最全题量最大　数学名家详细解析

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

Б. П. 吉米多维奇

数学分析习题全解

3

Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析

习题全解 3

编著 毛 磊 滕兴虎 寇冰煜
张 燕 李 静 毛自森

东南大学出版社
· 南京 ·

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题全解 3. /毛磊等编著.
—南京:东南大学出版社,2014.9
ISBN 978-7-5641-5116-4

Ⅰ.①吉… Ⅱ.①毛… Ⅲ.①数学分析—高
等学校—题解 Ⅳ.①O17—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 178932 号

吉米多维奇数学分析习题全解 3

编　　著	毛　磊　滕兴虎　寇冰煜 张　燕　李　静　毛自森	责任编辑	戴季东
电　　话	(025)83793329/83362442(传真)	电子邮件	liu-jian@seu. edu. cn
特约编辑	李　香		

出版发行	东南大学出版社	出 版 人	江建中
社　　址	南京市四牌楼 2 号	邮　　编	210096
销售电话	(025)83793191/57711295(传真)		
网　　址	http://www. seupress. com	电子邮件	press@seu. edu. cn

经　　销	全国各地新华书店	印　　刷	南京新洲印刷有限公司
开　　本	880mm×1230mm　1/32	印　　张	14.25　**字数** 416千
版　　次	2014 年 9 月第 1 版第 1 次印刷		
书　　号	ISBN 978-7-5641-5116-4		
定　　价	20.00 元		

前 言

《数学分析》是数学学科中一门重要的基础课，同时也是学习时间跨度大、理论体系严谨、内容极其丰富、学习难度很高的一门课程。学好《数学分析》既可以为后续专业课程奠定必备的数学基础，同时也培养了学生抽象的逻辑思维能力，提高了学生的创新意识、开拓精神和实际应用能力。

吉米多维奇的《数学分析习题集》是一本国际知名的著作。该书内容丰富，由浅入深，涉及的内容涵盖了《数学分析》的全部命题。同时，该书难题多，许多题目的难度已经超出对同学们的要求，以至于许多同学望而却步。为了帮助广大同学更好地掌握《数学分析》的基本概念，综合运用各种解题技巧和方法，提高分析问题和解决问题的能力，我们以俄文第 13 版为基础，对习题集中的 5000 道习题逐一进行了解答。

众所周知，学习数学，做练习题是很重要的。通过做练习题，可以巩固我们所学到的知识，加深我们对基础概念的理解，还可以提高我们的运算能力、逻辑推理能力和综合分析能力。所以，我们希望读者遇到问题一定要认真思考，努力找出自己的解答，不要轻易查抄本书的解答。

本书可作为数学专业同学学习《数学分析》的参考书，又可以作为其他理工科同学学习《高等数学》、《微积分》的参考书，同时也可以作为各专业同学考研复习时的参考书。

由于我们水平有限，本书不足之处敬请广大同行和读者批评指正。

编 者

目　录

第三章　不定积分 …………………………………………… (1)

§1. 最简单的不定积分 …………………………………… (1)
§2. 有理函数的积分法 …………………………………… (67)
§3. 无理函数的积分法 …………………………………… (105)
§4. 三角函数的积分法 …………………………………… (151)
§5. 各种超越函数的积分法 ……………………………… (191)
§6. 函数的积分法的各种例题 …………………………… (215)

第四章　定积分 ……………………………………………… (243)

§1. 定积分作为和的极限 ………………………………… (243)
§2. 用不定积分计算定积分的方法 ……………………… (263)
§3. 中值定理 ……………………………………………… (314)
§4. 广义积分 ……………………………………………… (325)
§5. 面积的计算方法 ……………………………………… (367)
§6. 弧长的计算方法 ……………………………………… (387)
§7. 体积的计算方法 ……………………………………… (399)
§8. 旋转曲面面积的计算方法 …………………………… (416)
§9. 矩计算法　重心坐标 ………………………………… (425)
§10. 力学和物理学的问题 ……………………………… (435)
§11. 定积分的近似计算方法 …………………………… (444)

第三章　不定积分

§1. 最简单的不定积分

1. **不定积分的概念**　若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 区间有定义且是连续的，$F(x)$ 是其原函数，即 $F'(x)=f(x)$，则当 $a<x<b$ 时，

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C,\qquad a<x<b$$

其中 C 为任意常数.

2. **不定积分的基本性质**

(1) $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$；

(2) $\int \mathrm{d}\Phi(x)=\Phi(x)+C$；

(3) $\int Af(x)\mathrm{d}x=A\int f(x)\mathrm{d}x$　（A 为常数且 $A\neq 0$）；

(4) $\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x$.

3. **最简积分表**

(1) $\int x^n\mathrm{d}x=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$　$(n\neq -1)$；

(2) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C$　$(x\neq 0)$；

(3) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\begin{cases}\arctan x+C,\\ -\operatorname{arccot}x+C;\end{cases}$

(4) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|+C$；

(5) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\arcsin x+C,\\ -\arccos x+C;\end{cases}$

(6) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm 1}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm 1}|+C$；

(7) $\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$　$(a>0,a\neq 1)$；

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

(8) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

(9) $\int \cos x dx = \sin x + C;$

(10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C;$

(11) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C;$

(12) $\int \mathrm{sh} x dx = \mathrm{ch} x + C;$

(13) $\int \mathrm{ch} x dx = \mathrm{sh} x + C;$

(14) $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth} x + C;$

(15) $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th} x + C.$

4. 积分的基本方法

(1) 换元积分法　若

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

则

$$\int f(u) du = F(u) + C,$$

其中 $u = \varphi(x)$ 为连续可微分函数.

(2) 分项积分法　若

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

则

$$\int f(x) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx.$$

(3) 代换法　若 $f(x)$ 是连续函数,则假设

$$x = \varphi(t),$$

其中 $\varphi(t)$ 与其导数 $\varphi'(t)$ 都是连续的,则得出

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

(4) 分部积分法　若 u 和 v 是 x 的可微分函数,则

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

运用最简积分表，求出下列积分(1628 ~ 1653).

【1628】 $\int(3-x^2)^3\mathrm{d}x$.

解 $\int(3-x^2)^3\mathrm{d}x=\int(27-27x^2+9x^4-x^6)\mathrm{d}x$

$$=27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+C.$$

【1629】 $\int x^2(5-x)^4\mathrm{d}x$.

解 $\int x^2(5-x)^4\mathrm{d}x$

$$=\int(625x^2-500x^3+150x^4-20x^5+x^6)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{625}{3}x^3-125x^4+30x^5-\frac{10}{3}x^6+\frac{1}{7}x^7+C.$$

【1630】 $\int(1-x)(1-2x)(1-3x)\mathrm{d}x$.

解 $\int(1-x)(1-2x)(1-3x)\mathrm{d}x$

$$=\int(1-6x+11x^2-6x^3)\mathrm{d}x$$

$$=x-3x^2+\frac{11}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+C.$$

【1631】 $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$.

解 $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right)\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{x}-2\ln|x|+x+C.$$

【1632】 $\int\left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right)\mathrm{d}x$.

解 $\int\left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right)\mathrm{d}x$

$$=a\ln|x|-\frac{a^2}{x}-\frac{a^3}{2x^2}+C.$$

【1633】 $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$

$$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C.$$

【1634】 $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x=\int(x^{\frac{1}{4}}-2x^{\frac{5}{12}}+x^{-\frac{1}{4}})\mathrm{d}x$

$$=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}-\frac{24}{17}x^{\frac{17}{12}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C$$

$$=\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-\frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C.$$

【1635】 $\int\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=\int(x^{-\frac{4}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{3}})\mathrm{d}x$

$$=-3x^{-\frac{1}{3}}-\frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}}+\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}+C$$

$$=-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}(1+\frac{3}{2}x-\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{8}x^3)+C.$$

【1636】 $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

解 $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int(x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{5}{4}})\mathrm{d}x$

$$=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+C=\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}}+C.$$

【1637】 $\int\frac{(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x}\mathrm{d}x$

$$=\int(2-2\sqrt[6]{72}x^{-\frac{1}{6}}+\sqrt[3]{9}x^{-\frac{1}{3}})\mathrm{d}x$$

$$=2x-\frac{12}{5}\sqrt[6]{72}x^{\frac{5}{6}}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{9}x^{\frac{2}{3}}+C.$$

【1638】 $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+\frac{1}{x^2}}{x^3}\mathrm{d}x$

$$=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}\right)dx=\ln|x|-\frac{1}{4x^4}+C.$$

【1639】 $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx.$

解 $$\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$
$$=x-\arctan x+C.$$

【1640】 $\int\frac{x^2}{1-x^2}dx.$

解 $$\int\frac{x^2}{1-x^2}dx=\int\left(-1+\frac{1}{1-x^2}\right)dx$$
$$=-x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$$

【1641】 $\int\frac{x^2+3}{x^2-1}dx.$

解 $$\int\frac{x^2+3}{x^2-1}dx=\int\left(1+\frac{4}{x^2-1}\right)dx$$
$$=x+2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

【1642】 $\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx.$

解 $$\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$$
$$=\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$
$$=\arcsin x+\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

【1643】 $\int\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx.$

解 $$\int\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$$
$$=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$$
$$=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right|+C.$$

【1644】 $\int(2^x+3^x)^2\mathrm{d}x.$

解 $$\int(2^x+3^x)^2\mathrm{d}x=\int(4^x+2\cdot 6^x+9^x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{4^x}{\ln 4}+2\cdot\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{9^x}{\ln 9}+C.$$

【1645】 $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\mathrm{d}x.$

解 $$\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\mathrm{d}x=\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{2^x\cdot 5^x}\mathrm{d}x$$
$$=\int\left[2\left(\frac{1}{5}\right)^x-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x+\frac{1}{5\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x+C.$$

【1646】 $\int\frac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x.$

解 $$\int\frac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x=\int(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+1)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+x+C.$$

【1647】 $\int(1+\sin x+\cos x)\mathrm{d}x.$

解 $$\int(1+\sin x+\cos x)\mathrm{d}x=x-\cos x+\sin x+C.$$

【1648】 $\int\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x \qquad (0\leqslant x\leqslant\pi).$

解 $$\int\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x=\int\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int[\operatorname{sgn}(\cos x-\sin x)](\cos x-\sin x)\mathrm{d}x$$
$$=(\sin x+\cos x)\operatorname{sgn}(\cos x-\sin x)+C.$$

【1649】 $\int\cot^2 x\mathrm{d}x.$

解 $$\int\cot^2 x\mathrm{d}x=\int(\csc^2 x-1)\mathrm{d}x=-\cot x-x+C.$$

【1650】 $\int\tan^2 x\mathrm{d}x.$

解 $$\int\tan^2 x\mathrm{d}x=\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\tan x-x+C.$$

【1651】 $\int(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)\mathrm{d}x$.

解 $\int(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)\mathrm{d}x=a\operatorname{ch}x+b\operatorname{sh}x+C$.

【1652】 $\int\operatorname{th}^2x\mathrm{d}x$.

解 $\int\operatorname{th}^2x\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}\right)\mathrm{d}x=x-\operatorname{th}x+C$.

【1653】 $\int\operatorname{cth}^2x\mathrm{d}x$.

解 $\int\operatorname{cth}^2x\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}\right)\mathrm{d}x=x-\operatorname{cth}x+C$.

【1654】 证明:若$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$,

则 $$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}F(ax+b)+C\quad(a\neq 0).$$

证明 由$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$,

知 $F'(x)=f(x)$,

从而 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{a}F(ax+c)\right]=F'(ax+b)=f(ax+b),$$

所以 $$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

求解下列积分(1655 ~ 1673).

【1655】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x+a}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x+a}=\int\frac{\mathrm{d}(x+a)}{x+a}=\ln|x+a|+C$.

【1656】 $\int(2x-3)^{10}\mathrm{d}x$.

解 $$\int(2x-3)^{10}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(2x-3)^{10}\mathrm{d}(2x-3)$$
$$=\frac{1}{22}(2x-3)^{11}+C.$$

【1657】 $\int\sqrt[3]{1-3x}\mathrm{d}x$.

解 $\int\sqrt[3]{1-3x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\int(1-3x)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}(1-3x)$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}+C$$

$$=-\frac{1}{4}(1-3x)\sqrt[3]{1-3x}+C.$$

【1658】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-5x}}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-5x}}$

$$=-\frac{1}{5}\int(2-5x)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(2-5x)=-\frac{1}{5}\cdot 2(2-5x)^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}+C.$$

【1659】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{1}{5}\int(5x-2)^{-\frac{5}{2}}\mathrm{d}(5x-2)$

$$=\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)(5x-2)^{-\frac{3}{2}}+C$$

$$=-\frac{2}{15(5x-2)\sqrt{5x-2}}+C.$$

【1660】 $\int\frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}\mathrm{d}x=-\int(1-x)^{-\frac{3}{5}}\mathrm{d}(1-x)$

$$=-\frac{5}{2}(1-x)^{\frac{2}{5}}+C=-\frac{5}{2}\sqrt[5]{(1-x)^2}+C.$$

【1661】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{2+3x^2}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{2+3x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\int\frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)+C.$$

【1662】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{2-3x^2}$.

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{2-3x^2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\int\frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{1-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{3}{2}}x}{1-\sqrt{\frac{3}{2}}x}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}x}{\sqrt{2}-\sqrt{3}x}\right|+C.$$

【1663】 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-3x^2}}$.

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-3x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)+C.$$

【1664】 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x^2-2}}$.

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x^2-2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{\frac{3}{2}}x+\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2-1}\right|+C_1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}|+C$$

其中 $C=C_1-\dfrac{\ln2}{2\sqrt{3}}$.

【1665】 $\displaystyle\int(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x})\mathrm{d}x$.

解 $$\int(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x})\mathrm{d}x=-\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}(-x)-\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}(-2x)$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+C.$$

【1666】 $\int(\sin 5x-\sin 5\alpha)\,\mathrm{d}x$.

解 $\int(\sin 5x-\sin 5\alpha)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{5}\cos 5x-x\sin 5\alpha+C$.

【1667】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$.

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$=-\frac{1}{2}\cot\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+C.$$

【1668】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$.

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}=\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\tan\frac{x}{2}+C.$$

【1669】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1-\cos x}$.

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{1-\cos x}=\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}=-\cot\frac{x}{2}+C.$$

【1670】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}=-\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$
$$=-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C.$$

【1671】 $\int[\operatorname{sh}(2x+1)+\operatorname{ch}(2x-1)]\,\mathrm{d}x$.

解 $$\int[\operatorname{sh}(2x+1)+\operatorname{ch}(2x-1)]\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int\operatorname{sh}(2x+1)\,\mathrm{d}(2x+1)+\frac{1}{2}\int\operatorname{ch}(2x-1)\,\mathrm{d}(2x-1)$$

$$=\frac{1}{2}[\operatorname{ch}(2x+1)+\operatorname{sh}(2x-1)]+C.$$

【1672】 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}$.

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}=2\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}=2\operatorname{th}\frac{x}{2}+C.$$

【1673】 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}$.

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}=2\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}=-2\operatorname{cth}\frac{x}{2}+C.$$

通过适当地变换被积表达式，求解下列积分(1674 ～ 1720).

【1674】 $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $$\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}+C.$$

【1675】 $\displaystyle\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\mathrm{d}x$.

解 $$\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int(1+x^3)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}(1+x^3)$$
$$=\frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}}+C.$$

【1676】 $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{3-2x^2}$.

解 $$\int\frac{x\mathrm{d}x}{3-2x^2}=-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(3-2x^2)}{(3-2x^2)}$$
$$=-\frac{1}{4}\ln|3-2x^2|+C.$$

【1677】 $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$.

解 $$\int\frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{(1+x^2)^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}+C.$$

【1678】 $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{4+x^4}$.