文都教育®

2016

考研数学

常考题型解题方法技巧归纳

毛纲源◎编著
文都考研命题研究中心◎编

数学三 上册

文都网校®
www.wenduedu.com
终身学习导师
领课码: 1388 0502 4282
1.刮开涂层获取领课码，访问 http://moni.wenduedu.com
2.输入领课码免费领取书配课
3.开始学习吧！
咨询热线:400-010-8090
扫描二维码关注文都网校

正版图书配套视频讲解（网校买课送书）

☑名师32课时导学精讲

☑数学中的超级复习全书

超值赠送：《经典常考题型同步测试题》+网络答疑

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

文都教育®

2016

考研数学

常考题型解题方法技巧归纳

毛纲源◎编著
文都考研命题研究中心◎编

数学三 上册

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

考研数学常考题型解题方法技巧归纳. 数学三/毛纲源编著. —武汉：华中科技大学出版社，2014.10

（毛纲源考研数学辅导系列）

ISBN 978-7-5680-0407-7

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①毛… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 Ⅳ. ①O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 219410 号

考研数学常考题型解题方法技巧归纳(数学三) 毛纲源 编著

策划编辑：王汉江(QQ:14458270)
责任编辑：王汉江
特约编辑：陈文峰 李 焕
封面设计：杨 安
责任监印：朱 霞
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山 邮编：430074 电话：(027)81321915
录 排：北京世纪文都教育科技发展有限公司
印 刷：北京市通州运河印刷厂
开 本：787mm×1092mm 1/16
印 张：33.5
字 数：836 千字
版 次：2014 年 10 月第 1 版第 1 次印刷
定 价：62.00 元(上、下册)

本书若有印装质量问题，请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线：400-6679-118 竭诚为您服务
版权所有 侵权必究

前　言

本书在教育部制定的考研数学三“考试大纲”的指导下，经过多年的教学实践精心编写而成，完整的知识体系，更加符合当前考生复习备考的需求. 全书共分为三篇：第1篇为微积分，第2篇为线性代数，第3篇为概率论与数理统计.

书中重点讲述与考纲中基本概念、基本理论、基本方法有关的经典试题，内容丰富，题型广泛、全面，任何一年的的真题均可在本书中找到对应的题型；同时作者还对各类重点常考题型的解题思路、方法和技巧进行归纳、总结，对容易出错的地方以“注意”的形式作了详尽的注解加以强调. 讲解的方法通俗易懂，由浅入深，富于启发，是一本广度、深度及难度均适合广大考生使用的考研辅导书.

本书有以下几个特点.

首先，本书根据考研数学大纲的要求，将历年考研数学试题按题型分类，对各类题型的解法进行了归纳总结，使考生能做到举一反三. 数学试题是无限的，而题型是有限的，掌握好这些题型及其解题方法与技巧，会减少解题的盲目性，从而提高解题效率，考生的应试能力自然就得到了提高. 同时也便于考生掌握考研数学一的大部分题型及其解题思路、方法与技巧，因而，本书能起到指航引路、预测考向的作用.

本书特别强调对考研数学大纲划定的基本概念、基本定理、基本方法和基本公式的正确理解. 为此每一题型在讲解例题前常对上述“四个基本”进行剖析，便于考生理解、记忆，避免常犯错误.

本书另一特点是总结了许多实用快捷的简便算法，这些简便算法新颖、独特，它们是作者多年来教学经验的总结，会大大提高考生的解题速度和准确性，使考生大大节省时间，因而有助于考生应试能力和水平的提高.

本书还注重培养提高综合应用多个知识点解决问题的能力，对综合型题型进行了较多的分析和解法，以期提高考生在这方面的能力. 与此同时，注重一题多解，以期开阔考生的解题思路，使所学知识融会贯通，能灵活地解决问题.

本书的讲述方法由浅入深，适于自学，并尽量使选用的例题精而易懂、全而不滥.

为使考生具有扎实的数学基础知识，也为了更好地阅读本书，特向读者推荐一套可以指导你全面、系统、深入复习考研数学的参考书，这就是本人编写的经济类数学学习指导、硕士研究生备考指南丛书：《经济数学（微积分）解题方法技巧归纳》、《经济数学（线性代数）解题方法技巧归纳》、《经济数学（概率论与数理统计）解题方法技巧归纳》. 这套丛书自出版以来一直受到全国广大读者的一致好评，久销不衰. 很多已考取

经济类硕士研究生都受益于这套丛书.本人在撰写本书时,多处引用了这套丛书的内容和方法,如果能把这套丛书结合起来学习,必将收到事半功倍的效果.

由于编者水平有限,加之时间仓促,书中错误、疏漏之处在所难免,恳请专家、读者指正.

毛纲源

2014 年 10 月于武汉理工大学

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目 录

第1篇 微 积 分

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第1篇 微 积 分

高等数学无论是试题量还是分值在考研真题中都占相当大的比重，分别约为56%和54%，是复习的重中之重。现将2012—2014年的考查题型及知识点进行了整理，希望能对广大考生的备考有所帮助。

2012—2014年考研数学三微积分题型及知识点分布表

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">题型/知识点分布</td><td colspan="2">2012年试题</td><td colspan="2">2013年试题</td><td colspan="2">2014年试题</td></tr>
<tr><td>试题量</td><td>分值</td><td>试题量</td><td>分值</td><td>试题量</td><td>分值</td></tr>
<tr><td rowspan="3">题量分值</td><td>选择题</td><td>4道</td><td>16分</td><td>4道</td><td>16分</td><td>4道</td><td>16分</td></tr>
<tr><td>填空题</td><td>4道</td><td>16分</td><td>4道</td><td>16分</td><td>4道</td><td>16分</td></tr>
<tr><td>解答题</td><td>5道</td><td>50分</td><td>5道</td><td>50分</td><td>5道</td><td>50分</td></tr>
<tr><td rowspan="3">考查知识点</td><td>选择题</td><td colspan="2">① 渐近线的条数
② 函数在一点处的导数
③ 二重积分的坐标变换
④ 级数的敛散性</td><td colspan="2">① 高阶无穷小
② 可去间断点
③ 比较二重积分的大小
④ 级数的敛散性</td><td colspan="2">①极限的概念
②渐近线的计算
③高阶无穷小
④函数图形的凹凸性</td></tr>
<tr><td>填空题</td><td colspan="2">① 求极限
② 求导
③ 二元函数的微分
④ 平面图形的面积</td><td colspan="2">① 求极限
② 隐函数求导
③ 计算反常积分
④ 二阶常系数齐次线性微分方程通解</td><td colspan="2">①导数的经济意义
②平面图形的面积
③定积分的分部积分法
④交换累次积分的次序、二重积分的计算</td></tr>
<tr><td>解答题</td><td colspan="2">① 求幂指型函数的极限
② 无界区域上的重积分的计算
③ 微分学在经济中的应用(最小成本、边际成本)
④ 不等式的证明
⑤ 微分方程、拐点</td><td colspan="2">① 等价无穷小
② 求旋转体的体积
③ 二重积分的计算
④ 定积分的经济应用
⑤ 微分中值定理</td><td colspan="2">①等价无穷小代换求极限
②二重积分的计算(轮换对称性)
③多元函数的偏导数、一阶线性微分方程
④幂级数的收敛域、和函数
⑤函数单调性的判别</td></tr>
</table>

1.1 函　　数

1.1.1 求几类函数的表达式

题型 1.1.1.1 已知函数,求其反函数的表达式

求反函数的方法是在原函数 $y=f(x)$ 中解出 x,再交换 x 与 y 的位置即得所求的反函数 $y=f^{-1}(x)$,同时得到 f^{-1} 的定义域即为 f 的值域.

如 $y=f(x)$ 为分段函数,且在各分段区间上都是单调函数,则分别求出各分段区间上的反函数就得到该分段函数的反函数,且 $f(x)$ 的每段的值域就是其对应分段区间上反函数的定义域.

例 1 设函数 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 12x-16, & x>2,\end{cases}$ 写出 $f(x)$ 的反函数的表达式.

解 (1) 当 $x<-1$ 时,$y=1-2x^2<-1$,在 $y=1-2x^2$ 中解出 x 得到 $x=-\sqrt{\dfrac{1-y}{2}}$,交换 x 与 y 的位置得到反函数 $y=-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}$,$x<-1$.

(2) 当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时,$-1\leqslant y=x^3\leqslant 8$,在 $y=x^3$ 中解出 x 得到 $x=\sqrt[3]{y}$,交换 x 与 y 的位置得到反函数 $y=\sqrt[3]{x}$,$-1\leqslant x\leqslant 8$.

(3) 当 $x>2$ 时,$y=12x-16>8$,在 $y=12x-16$ 中解出 x 得到 $x=\dfrac{y+16}{12}$,交换 x 与 y 的位置得反函数为 $y=\dfrac{x+16}{12}$,$x>8$.

综上所述,$f(x)$ 的反函数的表达式为

$$y(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, & x<-1,\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8,\\ \dfrac{x+16}{12}, & x>8.\end{cases}$$

题型 1.1.1.2 求与复合函数有关的函数表达式

定义 1.1.1.1 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,且当 x 在某一区间 I 取值时,相应的 u 值要使 y 有定义,则称 y 是 x 的定义于 I 的复合函数. 记为

$$y=(f\circ\varphi)(x)=f[\varphi(x)].$$

u 称为中间变量,$\varphi(x)$ 称为内层函数,$f(x)$ 称为外层函数,其中

$$I=D_{f\circ\varphi}=\{x\mid\varphi(x)\in D_f, x\in D_\varphi\}\neq\varnothing.$$

由上述定义易知,复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义区间 $D_{f\circ\varphi}$ 或者与 $\varphi(x)$ 的定义区间一致,或者

只是 $\varphi(x)$ 的定义区间的一部分.

$f(x)$, $\varphi(x)$ 和 $f[\varphi(x)]$ 这三个函数,若已知其中两个可求得另一函数.

类型(一) 已知 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$,求 $f[\varphi(x)]$ 或 $\varphi[f(x)]$.

若 $f(x)$ 为分段函数,$\varphi(x)$ 为分段函数或为初等函数,求复合函数 $f[\varphi(x)]$ 或 $\varphi[f(x)]$ 时,常用分段代入法或代入法求之:先将内(或外)层函数的表达式代入,然后再将外(或内)层函数的表达式代入,简称先内后外(或先外后内)的求法.

求 $f[f(x)]$ 或 $\varphi[\varphi(x)]$ 一般采用先内后外的方法求之.

求分段函数的复合函数,关键是对内层函数确定其定义域的区间段,使得它的值域属于外层函数的某段定义域之中. 为此要将内层函数的值域属于外层函数的定义域的不等式与内层函数的定义域求交,所求的交就是所求复合函数的分段(部分)定义域. 如果其交为空集,则此复合函数对应分支的定义域为空集,此分支函数不存在.

例 2 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<1, \\ x, & x\geqslant 1; \end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases} x+2, & x<0, \\ x^2-1, & x\geqslant 0. \end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

解 采用先内后外的方法求之.

第一步,将 $\varphi(x)$ 代入 $f(x)$ 中,得到 $f[\varphi(x)]=\begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1, \\ \varphi(x), & \varphi(x)\geqslant 1. \end{cases}$

第二步,用 $\varphi(x)$ 的各个分段函数分别替换上式中右端的 $\varphi(x)$,有

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases} e^{x+2}, & x+2<1, & x<0, \\ x+2, & x+2\geqslant 1, & x<0, \\ e^{x^2-1}, & x^2-1<1, & x\geqslant 0, \\ x^2-1, & x^2-1\geqslant 1, & x\geqslant 0. \end{cases}$$

第三步,求交,即将内层函数的值域属于外层函数的定义域的不等式(例如 $x+2<1$)与内层函数的定义域(例如 $x<0$)求交. 为此求解上式右端四个不等式组,确定 $f[\varphi(x)]$ 的分段(部分)定义域.

解 $\begin{cases} x+2<1 \\ x<0 \end{cases}$ 得到 $x<-1$; 解 $\begin{cases} x+2\geqslant 1 \\ x<0 \end{cases}$ 得到 $-1\leqslant x<0$;

解 $\begin{cases} x^2-1<1 \\ x\geqslant 0 \end{cases}$ 得到 $0\leqslant x<\sqrt{2}$; 解 $\begin{cases} x^2-1\geqslant 1 \\ x\geqslant 0 \end{cases}$ 得到 $x\geqslant\sqrt{2}$.

最后,得到所求的分段复合函数为 $f[\varphi(x)]=\begin{cases} e^{x+2}, & x<-1, \\ x+2, & -1\leqslant x<0, \\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2}, \\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}. \end{cases}$

类型(二) 求分段点相同的两分段函数的复合函数.

设两分段函数分段点相同,且仅有一个分段点:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\leqslant a, \\ f_2(x), & x>a, \end{cases} \quad g(x)=\begin{cases} g_1(x), & x\leqslant a, \\ g_2(x), & x>a, \end{cases}$$

则其复合函数 $f[g(x)]$ 或 $g[f(x)]$ 为分段点含 a 的分段函数,常用分段代入法求之.

例 3 设 $g(x)=\begin{cases} 2-x, & x\leqslant 0, \\ x+2, & x>0, \end{cases}$ $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0, \\ -x, & x\geqslant 0, \end{cases}$ 则 $g[f(x)]=(\quad)$.

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

解 仅(D)入选. 以分段点为界点用分段代入法求之.

当 $x<0$ 时, $f(x)=x^2>0$, 则 $g[f(x)]=f(x)+2=x^2+2$;

当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)=-x\leqslant 0$, 则 $g[f(x)]=2-f(x)=2-(-x)=2+x$.

故
$$g[f(x)]=\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

1.1.2 奇、偶函数的判别及其性质的应用

题型 1.1.2.1 判别经四则运算后的函数的奇偶性

命题 1.1.2.1 (1) 奇函数乘(除)偶函数=奇函数; (2) 奇函数乘(除)奇函数=偶函数;

(3) 偶函数乘(除)偶函数=偶函数; (4) 奇函数加(减)奇函数=奇函数;

(5) 偶函数加(减)偶函数=偶函数;

(6) 不恒等于零的偶函数(不恒等于零的奇函数)加减不恒等于零的奇函数(不恒等于零的偶函数)为非奇非偶函数;

(7) 偶(奇)函数乘以非奇非偶函数,一般是非奇非偶函数.

例 1 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$是(　　).

(A) 有界函数　　(B) 单调函数　　(C) 周期函数　　(D) 偶函数

解 显然$|x\sin x|$为偶函数, $e^{\cos x}$也为偶函数,由命题 1.1.2.1 知,其乘积
$$f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}\quad(-\infty<x<+\infty)$$
亦为偶函数. 仅(D)入选.

题型 1.1.2.2 判别自变量带相反符号的两同名函数的代数和的奇偶性

命题 1.1.2.2 设 $f(x)$为定义在$[-a,a]$(a 可为无穷)上非常数的任意函数,则

(1) $f(x)+f(-x)$为偶函数;

(2) $f(x)-f(-x)$(或 $f(-x)-f(x)$)为奇函数.

即自变量带相反符号且为非常数的两同名函数之和为偶函数,之差为奇函数.

例 2 设 $f(x)$与 $g(x)$为非常数的任意函数,试判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)+f(-x)+g(x)+g(-x)$;　　(2) $f(x)-f(-x)+g(x)+g(-x)$;

(3) $f(x)-f(-x)-g(x)+g(-x)$;　　(4) $f(x)+f(-x)-g(x)-g(-x)$.

解 (1) $f(x)+f(-x)$, $g(x)+g(-x)$为偶函数,其和必为偶函数.

(2) $f(x)-f(-x)$为奇函数, $g(x)+g(-x)$为偶函数,其和为非奇非偶函数.

(3) $f(x)-f(-x)$, $g(x)-g(-x)$为奇函数,则 $f(x)-f(-x)-[g(x)-g(-x)]$为奇函数.

(4) $f(x)+f(-x)$, $g(x)+g(-x)$为偶函数,则 $f(x)+f(-x)-[g(x)+g(-x)]$为偶函数.

题型 1.1.2.3 判别复合函数的奇偶性

利用下述命题判别之.

命题 1.1.2.3 (1) 若函数 $y=f(t)$,$t=g(x)$的奇偶性不同,则其复合函数 $y=f[g(x)]$ 必为偶函数;若奇偶性相同,则其复合函数 $y=f[g(x)]$与外层函数 $f(x)$具有相同的奇偶性.

(2) f 不具有奇偶性时,一般 $f(g_o)$,$g_o(f)$,$g_e(f)$,$f(f)$及 $f\cdot f$ 不具有奇偶性,但 $f(g_e)$ 为偶函数,其中 g_o 为奇函数,g_e 为偶函数.

例 3 设 f 为偶函数,g 为奇函数,试考察下列函数的奇偶性:

(1) $f(g)$; (2) $g(f)$; (3) $g(g)$; (4) $f(f)$.

解 因 f 为偶函数,g 为奇函数. f,g 的奇偶性不同,故 $f(g)$与 $g(f)$均为偶函数,$g(g)$为奇函数. 因 g 为奇函数. 而 f 为偶函数,故 $f(f)$为偶函数.

题型 1.1.2.4 判别原函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的奇偶性

命题 1.1.2.4 设 $f(x)$是连续的奇(偶)函数,则 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶(奇)函数,即连续奇(偶)函数的一个原函数为偶(奇)函数.

例 4 设 $f(x)$是连续函数,$F(x)$是 $f(x)$的原函数,则( ).

(A) 当 $f(x)$是奇函数时,$F(x)$必为偶函数

(B) 当 $f(x)$是偶函数时,$F(x)$必为奇函数

(C) 当 $f(x)$是周期函数时,$F(x)$必为周期函数

(D) 当 $f(x)$是单调增函数时,$F(x)$必为单调增函数

解 仅(A)入选. 因 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$,其中$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$表示$f(x)$的一个原函数. 当$f(x)$为奇函数时,易证$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数,而任意常数 C 为偶函数,因而偶函数之和为偶函数,故(A) 成立.

(B) 不成立. 这是因为当 $f(x)$ 为偶函数时,$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为奇函数,而C为偶函数,因而$F(x)$ 为非奇非偶函数. 例如,$f(x)=\cos x$ 为偶函数,而$(\sin x+1)'=\cos x$,故 $\sin x+1$ 不是奇函数.

(C)也不成立,例如,$f(x)=\cos x+1$ 为周期函数,而$(\sin x+x)'=\cos x+1$,故 $\sin x+x$ 为 $f(x)$的一个原函数,显然它不是周期函数.

(D)也不成立,例如 $f(x)=2x$ 是单调增加函数,但其一个原函数 x^2 就不是单调增加函数.

题型 1.1.2.5 判别函数$(a^{kx}\pm1)/(a^{kx}\mp1)$的奇偶性($a>0,a\neq1,k\neq0$)

命题 1.1.2.5 函数 $f(x)=(a^{kx}\pm1)/(a^{kx}\mp1)$为奇函数,其中常数 $a>0,a\neq1,k\neq0$.

例 5 判断函数 $g(x)=F(x)\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)$的奇偶性,其中$a>0,a\neq1$,$F(x)$是奇函数.

解 设 $f(x)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}=\frac{a^x+1}{2(a^x-1)}$,故 $f(x)$为奇函数,又 $F(x)$为奇函数,所以 $g(x)$为偶函数.

题型 1.1.2.6 奇、偶函数的几个性质的应用

可导的奇、偶函数的性质常用的有下述几条:

命题 1.1.2.6 (1) 若 $f(x)$为奇(偶)函数,则 $f'(x)$为偶(奇)函数,$f''(x)$为奇(偶)函数.

(2) 偶函数在对称区间内正负性相同而单调性相反,凹向相同,且拐点关于 y 轴对称;奇函数则相反:在对称区间内正负性相反而单调性相同,凹向相反,且拐点关于原点对称.

(3) 可导偶函数 $f(x)$,有 $f'(0)=0$,而连续的奇函数 $f(x)$,有 $f(0)=0$.

(4) 奇(偶)函数的图形对称于坐标原点(y 轴).

例 6 设偶函数 $f(x)$ 具有连续的二阶导数,并已知 $f''(0)\neq 0$,则 $x=0$( ).

(A) 不是函数的驻点 (B) 一定是函数的极值点

(C) 一定不是函数的极值点 (D) 是否为函数的极值点,不能确定

解 因 $f(x)$ 可导,且为偶函数,由命题1.1.2.6(3)知,$f(x)$ 的一阶导函数 $f'(x)$ 必为奇函数,因而 $f'(0)=0$. 又 $f''(0)\neq 0$,由二阶导数判别法知,$x=0$ 必为 $f(x)$ 的极值点,于是仅(B)入选.

例 7 若函数 $f(-x)=f(x)(-\infty<x<+\infty)$,在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$ 且 $f''(x)<0$,则在 $(0,+\infty)$ 内有( ).

(A) $f'(x)>0,f''(x)<0$ (B) $f'(x)>0,f''(x)>0$

(C) $f'(x)<0,f''(x)<0$ (D) $f'(x)<0,f''(x)>0$

解 所给函数 $f(x)$ 显然为偶函数,因此 $f'(x)$ 是奇函数,$f''(x)=[f'(x)]'$ 是偶函数. 由命题1.1.2.6(2)知,奇函数 $f'(x)$ 在对称区间内取值绝对值相同,但符号相反,故由 $f'(x)>0,x\in(-\infty,0)$ 知,$f'(x)<0,x\in(0,+\infty)$;又偶函数 $f(x)$ 在对称区间内的凹向相同,则由 $f''(x)<0,x\in(-\infty,0)$ 知,$f''(x)<0,x\in(0,+\infty)$. 因而仅(C)入选.

1.1.3 函数有界性的判定

常用下述定义及函数性质判别,其中 I 表示有限区间或无限区间、开区间或闭区间.

定义 1.1.3.1 若存在一正数 M,使 $|f(x)|\leqslant M,x\in I$,则 $f(x)$ 在 I 上有界.

定义 1.1.3.2 若存在两正数 m 和 M,使 $m\leqslant f(x)\leqslant M,x\in I$,则 $f(x)$ 在 I 上有界.

命题 1.1.3.1 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上单调增加(单调减少),则

$$f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b)\ (f(b)\leqslant f(x)\leqslant f(a)),\quad x\in[a,b],$$

因而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

命题 1.1.3.2 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

命题 1.1.3.3 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则 $f(x)$ 在 x_0 附近有界;若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在,则 $f(x)$ 在 x_0 右邻域内有界;若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续,且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$,$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 均存在,则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

关于函数的有界性,还要注意它是一个与区间 I 有关的概念:一个函数可能在一个区间上有界,而在另外的区间上无界. 例如,函数 $y=1/x$ 在 $(0,1)$ 内无界,而在 $(1,2)$ 内却是有界的.

题型 1.1.3.1 判定在有限开区间内连续函数的有界性

若 $f(x)$ 是区间 (a,b) 内的连续函数,为判定 $f(x)$ 在 (a,b) 内是否有界,只需检验两极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 是否都存在,若 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty$,或 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\pm\infty$,则 $f(x)$ 在 (a,b) 内无界,否则 $f(x)$ 在该区间内有界(见命题1.1.3.3).

例 1[2004 年 3]* 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在区间( )内有界.

(A) $(-1,0)$ (B) $(0,1)$ (C) $(1,2)$ (D) $(2,3)$

* 例 1[2004 年 3]表示该例是 2004 年数学三的全国统考试题. 下同.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com