



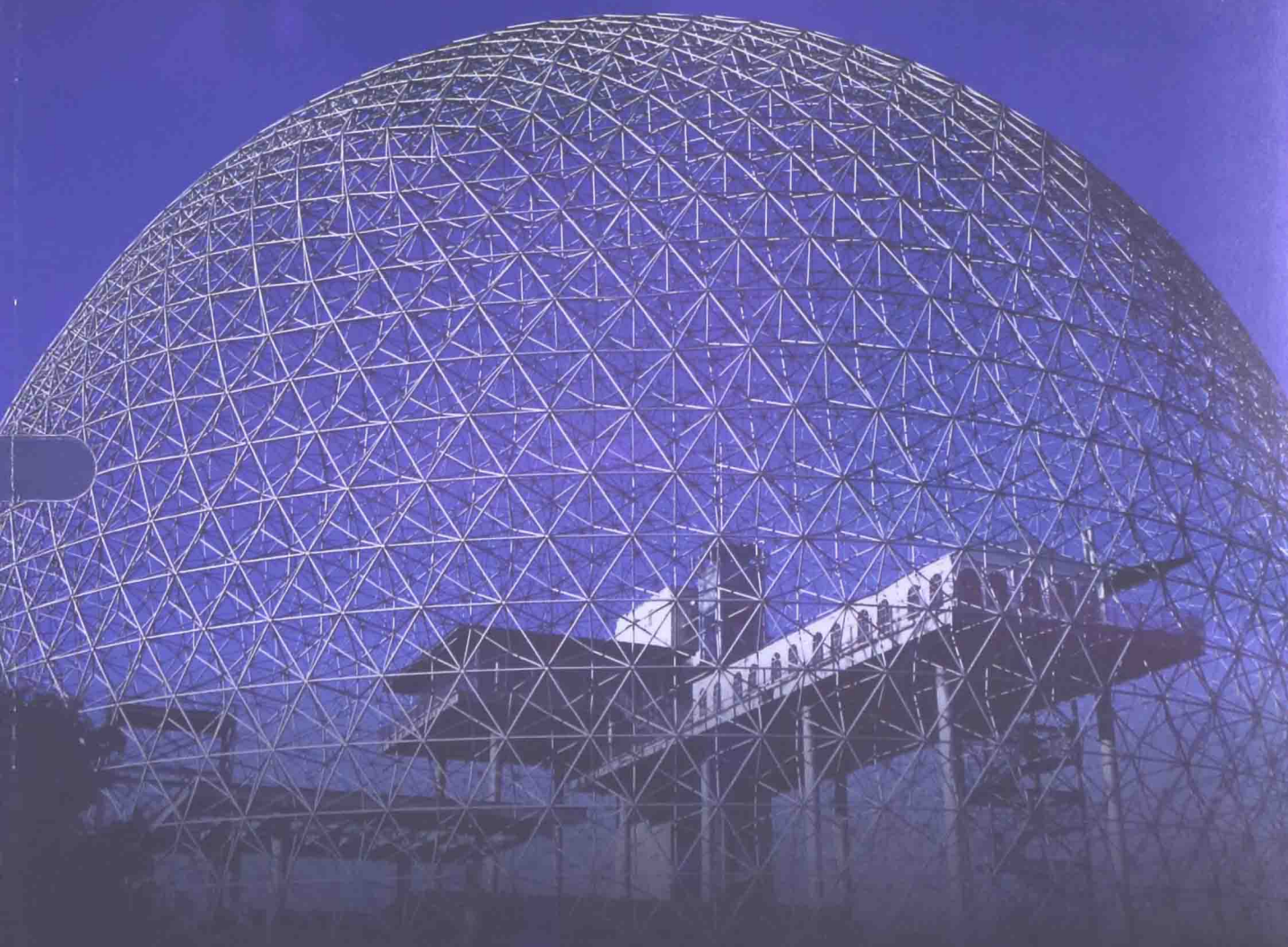
普通高等教育“十一五”国家级规划教材·辅导教材



北京高等教育精品教材·辅导教材 高等院校精品教材系列
BEIJING GAODENG JIAOYU JINGPIN JIAOCAI

材料力学 学习指导与题解

◎ 刘海燕 韩 斌 水小平 编著



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
<http://www.phei.com.cn>

普通高等教育“十一五”国家级规划教材·辅导教材
北京高等教育精品教材·辅导教材
高等院校精品教材系列

材料力学学习指导与题解

刘海燕 韩 斌 水小平 编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry

内 容 简 介

本书是与普通高等教育“十一五”国家级规划教材和北京高等教育精品教材——《材料力学教程》（韩斌等编著，电子工业出版社）配套的教学参考、学习辅导和考研指导用书。

本书按照主教材的体系结构顺序编写，对每章的教学内容和重点、难点做了简洁、清晰、深入的归纳与总结。选取了主教材中一部分概念性较强、较深入及高于基本要求的思考题和比较典型及综合性较强的习题给予了详细解答。多数题目都采用了一题多解的方法，希望能够活跃读者的思维，促进多角度思考问题。每题后面都附有关于提炼模型、分析思路、解题关键、易犯错误及提高拓展的“解析”。另外还附有六套自测题，以便读者自行检验和总结对材料力学知识的掌握情况。

本书可与主教材配套使用，是高等院校理工科相关专业本科生的学习和应试指导书，也可作为研究生入学考试的复习用书、青年教师的教学参考用书以及工程技术人员的应用参考用书，同样适合高职高专、自学考试和成人教育的学生在学习提高时使用。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有，侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

材料力学学习指导与题解/刘海燕，韩斌，水小平编著. —北京：电子工业出版社，2014.11

高等院校精品教材系列

ISBN 978-7-121-24421-6

I. ①材… II. ①刘…②韩…③水… III. ①材料力学—高等学校—教学参考资料 IV. ①TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 224357 号

责任编辑：赵玉山

印 刷：涿州市京南印刷厂

装 订：涿州市京南印刷厂

出版发行：电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编：100036

开 本：787×1092 1/16 印张：20.75 字数：614 千字

版 次：2014 年 11 月第 1 版

印 次：2014 年 11 月第 1 次印刷

定 价：45.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：(010)88258888。

前 言

“材料力学”是高等工科院校开设的一门与工程力学、航空航天、土木工程、机械、动力、材料、船舶、水利等许多工科专业联系非常紧密的重要技术基础课程，它的知识既可以直接应用于工程实际，又是学生从理论基础课程向工程专业课程过渡的第一门课程，该课程知识掌握得是否扎实对许多后续专业课程的学习都有直接的影响。然而材料力学具有公式较多，知识点零散，基本概念和基本理论貌似浅显却难以深入掌握，且题型多变，所研究的问题又与工程实际及日常生活有着广泛的联系等特点，这对于习惯了应试教育的工科大学生而言，无疑是一门具有挑战性和相当难度的课程。随着科学技术的飞速发展，新课程不断增加，传统课程学时量相应减少，而为了提高学生的培养质量，更好地满足新世纪对人才培养的更高要求，不能降低课程的要求，故在单位时间内传授的知识量将会大大增加，出版一本与材料力学教材配套的学习指导书就显得非常必要和迫切。我们在总结自己丰富的教学经验和对课程多年的研究成果的基础上，精心编写了这本《材料力学学习指导与题解》。本书是与韩斌副教授主编的《材料力学教程》（普通高等教育“十一五”国家级规划教材、北京高等教育精品教材，电子工业出版社 2013 年 11 月出版）相配套的学习指导书。该书遵循了原教材的章节顺序，共分 10 章编写。每章由“内容提要”、“思考题及解答”、“习题及解答”三部分组成。

本书将“材料力学”课程的基本理论、基本概念与解题的基本方法等主要内容做了精辟的归纳总结，以方便读者复习和学习时查阅；对重点内容进行了强调，对难点进行了剖析，并给出了学习和解题时应注意的事项，以方便读者更好地复习和深入理解课程内容；书中还涉及了一些材料力学中较深、较难与扩展性的问题，甚至某些内容比主教材还要有所深入，以期扩大读者的视野，满足进一步提高的需求；所选题目注重基础性、典型性、多样性、综合性、启发性与深入性，每题都给出了规范的解题步骤，目的在于帮助初学者尽快摆脱初等的、应试教育的思维模式，用理性思维、从力学的角度处理工程问题，而且规范的解题步骤也是确保求解正确的有效方法。本书对某些内容尝试着从多角度论述，帮助读者培养独立思考的习惯，改变那种捡拾现成结论、把无理性地盲目套用公式当成学习的法宝、从不注重公式成立的前提条件和得出结论过程、人云亦云的思维模式。解题时需要对基本定理或原理加以灵活应用，抓住主要矛盾，略去次要因素，并将其抽象为适当的理论模型，本书通过部分题目对如何进行工程建模、如何建立简单正确的力学模型以及化简问题的尺度进行了有益的探讨，其中一些具有一定深度和难度的思考题和习题是大多数材料力学相关书籍没有出现过的内容。相信本书的出版能够对学生的课程学习提供有力的帮助，对于准备报考硕士研究生的人员和从事“材料力学”教学工作的教师来说都是很有价值的参考资料。另外，在附录中还有六套自测题（均选自北京理工大学历届材料力学课程期末考试题，所有考试题均为课程组教师自编题目），以便读者自行检验和总结对材料力学知识的掌握情况。

本书由刘海燕副教授精心编写，书中的多数思考题和习题是在韩斌副教授手稿的基础上完善、补充、扩展、修改，或重新求解，或给出新的解题方法后而成的；全国力学教学优秀教师韩斌副教授、全国优秀教师和第三届北京市高等学校教学名师奖获得者水小平教授对全书内容分别进行了认真审核、细致修改并做了进一步的完善，水小平教授对“内容提要”部分做了许多补充，使之更加全面和系统；李海龙老师提供了部分难题的求解和一些基本概念的科学提法，并参与了全书的校核工作；工

程力学课程组的白若阳、廖力、秦晓桐、苏煜、张强、赵希淑等老师在本书的编写过程中也参与了部分工作。

本书中的部分内容、思考题和习题的解答是作者参考国内外一些优秀教材和教辅书籍，并结合自己多年的教学经验重新编撰的，在此，作者向这些教材、教辅书籍的编著者们深表谢意！

本书在编写过程中得到了北京理工大学教务处、宇航学院相关领导的关心和支持，也得到了宇航学院力学系许多教师，尤其是工程力学课程组全体教师的鼓励和帮助。首届高等学校国家级教学名师奖获得者梅凤翔教授对全书进行了认真的审阅，提出了很好的修改意见和建议。电子工业出版社对本教材的出版提供了大力支持和热情帮助。对此，作者一并表示衷心的感谢！

编写一本知识要点翔实，题目类型多样，不但兼顾基本教学需求，还应富有启发性，并能与实际问题的紧密结合的材料力学学习指导书是作者的夙愿，本书给出的解答过程能够达到概念清楚、思路明晰、方法简练以及结果正确，这是作者努力的目标。然而要做到这些其实是一项艰苦的工作，需要极大的热情、强烈的责任心并不断投入精力。限于作者的水平，书中疏漏、欠妥和有误之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

刘海燕 韩 斌 水小平

2014年8月

目 录

绪论	1
第 1 章 杆件在一般外力作用下的内力分析	3
1.1 内容提要	3
1.1.1 外力、内力与内力分量	3
1.1.2 杆件的内力方程和内力图的绘制	4
1.2 思考题及解答	5
1.3 习题及解答	8
第 2 章 应力应变分析及应力应变关系	20
2.1 内容提要	20
2.1.1 一点处的应力状态的概念及其表示方法	20
2.1.2 应力状态分析	21
2.1.3 应变分析	26
2.1.4 应力应变关系	27
2.2 思考题及解答	31
2.3 习题及解答	34
第 3 章 轴向拉压及材料的常规力学性能	48
3.1 内容提要	48
3.1.1 轴向拉压杆件的内力、应力与变形	48
3.1.2 典型工程材料在常温静载下的力学性能	50
3.1.3 轴向拉压杆件的强度问题	51
3.1.4 连接件实用计算	52
3.1.5 应力集中概念	53
3.1.6 求解拉压杆件简单静不定问题	53
3.1.7 温度应力和装配应力	53
3.2 思考题及解答	54
3.3 习题及解答	60
第 4 章 扭转	71
4.1 内容提要	71
4.1.1 圆轴扭转时的内力、应力与变形	71
4.1.2 圆轴扭转时的强度与刚度问题	74
4.1.3 非圆截面轴的扭转	75
4.1.4 薄壁杆件的自由扭转	75
4.2 思考题及解答	76

4.3	习题及解答	79
第 5 章	弯曲	93
5.1	内容提要	93
5.1.1	杆件在弯曲变形时的基本概念与应力	93
5.1.2	梁的强度问题	100
5.1.3	弯曲中心	101
5.1.4	梁的弯曲变形问题	101
5.2	思考题及解答	105
5.3	习题及解答	124
第 6 章	组合变形	144
6.1	内容提要	144
6.1.1	组合变形的概念与分析方法	144
6.1.2	复杂应力状态下的强度理论	144
6.1.3	求解组合变形强度问题的总思路	147
6.1.4	典型的组合变形问题	148
6.1.5	承受内压的薄壁圆筒的强度条件	151
6.2	思考题及解答	151
6.3	习题及解答	158
第 7 章	能量法	172
7.1	内容提要	172
7.1.1	功能原理和应变能	172
7.1.2	互等定理	174
7.1.3	虚位移原理在变形体中的应用	175
7.1.4	单位载荷法	175
7.1.5	莫尔定理求位移	176
7.1.6	计算莫尔积分的图乘法	176
7.2	思考题及解答	178
7.3	习题及解答	187
第 8 章	静不定结构	202
8.1	内容提要	202
8.1.1	静不定结构的概念	202
8.1.2	力法正则方程	204
8.1.3	利用对称性简化静不定结构的计算	206
8.1.4	简单的空间刚架静不定分析	208
8.1.5	静不定结构的特点	208
8.2	思考题及解答	209
8.3	习题及解答	222
第 9 章	压杆稳定	246
9.1	内容提要	246

9.1.1 弹性体稳定的基本概念 246

9.1.2 理想细长压杆的临界压力 247

9.1.3 理想压杆的临界应力、柔度及其临界应力总图 247

9.1.4 压杆的稳定性计算 250

9.1.5 提高压杆稳定性的措施 251

9.2 思考题及解答 251

9.3 习题及解答 264

第 10 章 动载荷 274

10.1 内容提要 274

10.1.1 动载荷的基本概念 274

10.1.2 惯性力问题 274

10.1.3 冲击问题 274

10.1.4 交变应力与疲劳失效 277

10.2 思考题及解答 280

10.3 习题及解答 286

附录 A 平面图形几何性质 301

A.1 内容提要 301

A.1.1 几何参数的定义 301

A.1.2 几个相关定理 302

A.1.3 基本公式 302

A.1.4 主惯性轴与主惯性矩 303

A.2 思考题及解答 304

A.3 习题及解答 307

附录 B 自测题 310

附录 C 自测题参考答案 320

参考文献 322

绪 论

材料力学是研究构件（组成工程结构或机械系统的各个部分）承载能力的一门基础性学科，它以杆件（一个方向的尺寸远大于其他两个方向的尺寸的构件）作为基本的研究对象，定量地研究构件内部在各种变形形式下的力学规律，以便于选择适当的材料，确定恰当的形状和尺寸，在保证能够承受预定载荷的前提下设计出既经济又安全的构件。

构件在外力作用下会发生形状和尺寸的改变，称为变形，变形分为两类：（1）弹性变形，即外力除去后可消失的变形；（2）塑性变形，即外力除去后不能消失的变形。由于变形会引起构件上某点在空间位置的改变或某截面空间方位的改变，称之为位移（线位移和角位移）。构件有变形时一定会有位移，但构件有位移时不一定会有变形，即构件可以发生刚体位移。

构件的承载能力包括以下三个方面：（1）强度——构件抵抗破坏（过大的塑性变形或断裂）的能力；（2）刚度——构件抵抗弹性变形的能力；（3）稳定性——构件保持原有平衡形式的能力。

构件的强度、刚度和稳定性与其所用材料的力学性能有关，所谓材料的力学性能是指材料在受力后所表现出的力与变形之间的关系及材料的破坏特征，它必须通过试验来测定。

材料力学研究的构件都是变形固体，而且只是从宏观的角度对构件的承载能力进行分析和计算，是基于以下三个基本假设建立其基本理论：（1）连续性假设：构件在其整个体积内毫无空隙地充满了组成该构件的物质，即认为是密实的。这样构件中所要研究的力学量就可以用构件上点的坐标的连续函数来表示，并可采用无限小的数学分析方法，从而有利于建立相应的数学模型。而且，在正常的工作条件下，变形后的构件仍保持其连续性，即变形后的构件既不产生“空隙”，也不发生“挤入”现象。（2）均匀性假设：材料的力学性能与其在构件中的位置无关，即认为是均匀的。这样从构件内部任何部位所切取的微小单元体（简称微元体）都具有与构件完全相同的力学性能，通过试件所测得的材料力学性能可用于构件内的任何部位，或通过微元体研究所得的相关结论可应用于整个构件。（3）各向同性假设：材料在各个方向具有相同的力学性能，即认为是各向同性的。这样，用实验方法测出材料在某个方向上的力学性能参数，可以应用到其他方向。例如玻璃即为典型的各向同性材料；一般金属材料，如钢、铝、铜等，其单个晶粒虽呈各向异性，但当它们形成多晶聚合体的金属时，因各晶粒随机取向，因而在宏观上金属表现为各向同性；搅拌均匀的混凝土材料，就总体力学性能而言，也可看作是各向同性材料。

材料力学中所研究的构件在承受外载荷作用下，其变形量与构件的原始尺寸相比通常是极其微小的，只有构件原始尺寸的千分之几或万分之几，即属于小变形的情况，且绝大多数工程构件在正常工作条件下，一般要求其材料只发生弹性变形。在线弹性小变形的情况下，可以使计算过程得到很大简化，主要体现在以下三个方面：（1）在研究构件的平衡等问题时，通常可以忽略构件的变形，仍可按照构件的原始尺寸和形状进行计算，即忽略构件变形对结构整体形状和力的作用位置的影响，根据变形前的位置建立力系的平衡方程，根据变形前的横截面的形状和大小计算相关应力和变形刚度等，称为原始尺寸原理。（2）在研究桁架中杆件长度变化时，可以采用以切线（垂线）代替圆弧的方法，简称“以切代弧”，这样可以方便地使用直角三角形边长之间关系。（3）构件的复杂变形可处理为若干基本变形的叠加，构件在复杂载荷作用下引起构件的位移计算可以采用力的叠加法（载荷叠加法）和逐段弹性变形效应叠加法（变形叠加法）等。

材料力学的研究方法的主体是三关系法，即静力学关系、物理关系和几何关系：（1）静力学关系就是研究构件各个力学量之间的关系，包括内力与外力之间的关系以及应力和内力之间的关系；（2）物理关系就是研究构件的相关力学量和变形几何量之间的关系，包括载荷与变形量之间的关系、构件内部应力与应变之间的关系；（3）几何关系就是研究结构中各构件相关变形引起的几何量之间的关系，包括构件中应变和变形量之间的关系，结构中所受约束对位移的限制，结构中各构件变形量之间的协调关系。

总之，材料力学是在上述的三个假设、两个限制（线弹性和小变形）的条件下研究构件在外力作用下的变形和破坏规律，为合理设计构件提供强度、刚度和稳定性三个方面的基本理论和计算公式。实际上，材料力学的基本假设和限制条件中除了连续性条件，其他条件都可以在特殊情况下放宽，如双材料组合截面、非线性弹性及塑性材料、由于大变形而不能在原始位置平衡的结构等，都可以根据具体情况加以适当处理。材料力学是一门非常重要的技术基础课，是固体力学的基础和实用部分，在相关工程领域发挥着很大的作用。在材料力学课程中所体现出的“实验—观察—假设—推理—实践”的方法其实也是人们认识自然、研究自然和改造自然的基本方法，读者在学习材料力学中要认真体会，并在以后的工作、生活中加以灵活应用。

第 1 章 杆件在一般外力作用下的内力分析

1.1 内 容 提 要

1.1.1 外力、内力与内力分量

1. 外力

对于研究对象而言，当把它从周围物体中分离出来后，用力来代替周围各物体对其的作用，这些来自其外部的力均称为外力，包括主动力（在工程上通常称为载荷）与约束力。

依据载荷随时间变化的特点可分为：

静载荷——载荷的大小由零开始非常缓慢地增加到某一数值后保持不变。其特点是在加载过程中，构件的加速度很小可以忽略不计。这样的加载方式称为准静态加载。主教材除第 10 章外，如果没有特别说明，所有载荷均为准静态加载。

动载荷——载荷随时间显著变化，或构件在载荷作用下处于运动状态，并产生不可忽略的加速度。

构件的力学性能和力学响应与作用的载荷是静载荷还是动载荷密切相关，并且针对这两类加载方式的力学分析方法也不完全相同，但前者是后者的基础。材料力学主要分析静载荷问题。

按照载荷作用方式又可分为：

表面力——作用于物体表面的外力（接触力）。如作用在物体外表面的分布力、分布力偶、集中力、集中力偶等。

体积力——连续分布在构件内各点的力（场力）。

2. 内力

在外力作用下，构件内部的任意截面上都会产生截面一侧部分对截面另一侧部分的相互作用力，称为构件在该截面上的内力。内力的本质是作用在该截面上的连续分布力系的等效力系，通过理论力学课程中的截面法可以确定内力系特征量的主矢和对截面形心的主矩的全部分量与外力的关系（限于静定问题）。具体做法是：用一个假想截面在所考察的位置处将构件切开，任取一部分作为研究对象，用内力代替去掉部分对保留部分的作用，然后对保留部分列写力系平衡方程，由已知外力求出切开截面上的全部内力分量。以上方法可归纳为“一截、二取、三代、四平”。截面法是求解内力的基本方法。还有一种求任意截面上内力的方法——直接求和法：用一个假想截面在所考察的位置处将构件切开，使构件分为两部分，并任取其中一部分为保留部分，另一部分为去掉部分，直接将去掉部分构件上的外力系（全部主动力和约束力）向构件保留部分所截截面的形心进行等效，得到该截面上各内力的数值。虽然直接求和法由截面法推导而来，但它能够更快速地确定某一所要求解截面上的内力。

3. 杆件横截面上的内力分量

一杆件在某空间力系作用下平衡，欲求出任意横截面上的内力，则假想沿该截面将杆件切开，在切开的截面上作用着连续分布的内力系。材料力学中通常将向截面形心的简化内力系的各分量根据构件的变形形式进行分类。

轴力 F_N : 内力的轴向分量。作用在形心处, 沿横截面的法线方位, 指向与该截面的外法线方向相同者为拉力, 反之为压力。 F_N 使构件产生沿轴线方向伸长或缩短的变形。

剪力 F_S : 内力的横向分量。作用线位于横截面内, 作用点过形心, 作用线的方位未知(可用截面法确定)。 F_S 使构件中相邻的两横截面沿 F_S 方向发生相对错动, 也就是使构件产生剪切变形。剪力一般可分解为横截面内两个互相垂直的正交分量。

扭矩 T : 内力偶矩的轴向分量。该力偶矩矢量的方位沿横截面的法线方位, 力偶的作用面为构件的横截面。 T 使构件各横截面绕其轴线发生相对转动, 也就是使构件产生扭转变形。

弯矩 M : 内力偶矩的横向分量。该力偶矩矢量的作用线位于横截面内, 作用线方位和大小需用截面法求解。 M 使构件各横截面方位发生相对偏转, 也就是使构件产生弯曲变形。弯矩一般也可分解为两个相互垂直的正交分量。

1.1.2 杆件的内力方程和内力图的绘制

1. 内力方程

沿杆件的轴线建立 x 坐标轴, 杆件任意横截面上的内力分量可以表示成 x 的函数, 称为内力方程。内力方程通常用分段函数表示出。集中外力、集中外力偶的作用处以及分布外载荷的开始和结束或分布规律变化处通常是内力方程的分段点, 分段点所在截面也称为控制面。

2. 内力图

工程上常用函数的图形化形式表示出内力随 x 的变化规律, 称为内力图。每一个内力分量对应一幅内力图。绘制内力图(或求内力方程)时要注意内力分量的正负号规定。

轴力分量 F_N 沿横截面外法线方向为正, 反之为负; 剪力分量 F_S 以使得所作用的杆件微段产生顺时针转动为正, 逆时针转动为负; 扭矩分量 T , 其方向与横截面外法线方向一致为正, 反之为负; 弯矩分量 M , 就水平梁而言, 以使得所作用的杆件微段发生凹面朝上的弯曲变形时为正, 反之为负。

内力图不仅可以根据内力方程的函数形式绘出, 还可以利用微分关系给出, 后者更为简单、快速。

绘制内力图必须清楚相关规定, 若画出来的内力图略去了坐标轴, 这就需要内力图必须与构件位置对应; 对于每一幅内力图, 必须标明其内力名称和关键截面(如控制面和内力达到极值截面)的内力值及所在截面的位置等。

3. 直杆横截面上内力与载荷集度的微分关系

杆件的内力分量随横截面的位置不同而变化, 变化规律与杆件所受外力有关。集中外力或分布载荷的开始、结束和载荷集度函数发生变化处, 是内力方程的分段点, 而在每一段内, 各内力分量的函数形式与该段的分布外载荷变化规律有关。

对于水平直杆, 取 x 轴水平向右为正, 轴向分布载荷集度 $p(x)$ 方向与 x 轴正向一致; 轴向分布扭转力偶载荷集度 $m(x)$ 的方向与 x 轴正向一致; 横向分布载荷集度 $q(x)$ 方向与 x 轴垂直(仅讨论平面外载荷情形), 方向向上为正; 各内力分量方向均为规定的正方向, 则各内力分量与相应的分布载荷集度有下述关系:

$$\begin{aligned}\frac{dF_N}{dx} &= -p(x) \\ \frac{dT}{dx} &= -m(x) \\ \frac{dF_S}{dx} &= q(x), \quad \frac{dM}{dx} = F_S(x), \quad \frac{d^2M}{dx^2} = q(x)\end{aligned}$$

利用以上微分关系可以更加简便地绘出内力图, 特别是作用了多个横向载荷的直梁, 其剪力图和

弯矩图都较为复杂,该方法简单、快捷的特点表现尤其突出。材料力学课程中作用于梁上的外载荷一般有均匀分布载荷、集中力和集中力偶三种。现对一水平梁按从左到右的顺序,利用剪力 F_S 、弯矩 M 与载荷集度 q 之间的微分关系,介绍快速作剪力图和弯矩图的具体做法:

首先按照载荷作用方式确定控制面,从而将梁的内力图分段。然后确定控制面两侧内力的大小,并标在图上,确定控制面内力的快速方法是假想在控制面处将杆件切开,将去掉部分上的所有外力向保留部分控制面形心进行等效,其结果即为这个控制面上的内力。最后根据微分关系可以得出在均布载荷、集中力和集中力偶作用下剪力图和弯矩图的变化规律为:

① 剪力图都是直线,其中有均匀载荷作用段是斜直线,且分布载荷向下时,剪力图直线向右下倾斜(斜率为负);分布载荷向上时,剪力图向右上倾斜(斜率为正);其他情况下剪力图为与轴线平行(包括重合)的水平直线。

② 只有均布载荷作用段的弯矩图才是二次抛物线,且当分布载荷向下时,抛物线开口向下;当分布载荷向上时,抛物线开口向上;以上两种情况,若有剪力为零的截面,则该截面上弯矩图分别对应极大值或极小值。在集中力和集中力偶作用下的弯矩图都是直线,当 F_S 是不与轴线重合的水平线时,对应的弯矩图是斜直线,如果 $F_S > 0$,则弯矩图为向右上倾斜的直线(递增函数);如果 $F_S < 0$,则弯矩图为向右下方倾斜的直线(递减函数);而当 $F_S = 0$,弯矩图为与轴线平行的水平直线。

③ 在集中力作用处,剪力图不连续,有跳跃,剪力跳跃的值等于集中力的大小,从左向右看,跳跃方向与集中力的方向相同;在集中力作用处,弯矩图连续但不光滑(集中力作用处两侧截面上的弯矩相等,但两侧弯矩图的斜率有突变,即有尖点)。

④ 在集中力偶作用处,弯矩图不连续有跳跃,弯矩跳跃的值等于集中力偶值,且从左向右画图时顺时针转向力偶向上跳跃,逆时针转向力偶向下跳跃,但对剪力图没有影响(集中力偶作用处两侧截面上的剪力值相等)。

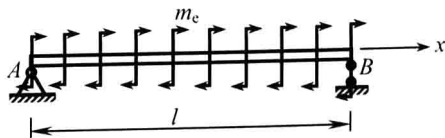
⑤ 当梁的两端作用有主动力、主动力偶或约束力、约束力偶时,它们也是外力,梁在此处的剪力值、弯矩值从左往右看的跳跃规律与上述相同。

⑥ 对于直线形式的内力曲线,直接连接两个控制面的点即可;对于曲线情形,除控制点外,还应考虑是否存在极值点,若有还要求解其极值,并标在图上,再用光滑曲线连接起来。若将均布载荷看成雨滴方向,弯矩图的凹凸方向可以依据伞布挡雨滴的形状画出,可称其为“雨伞法则”。

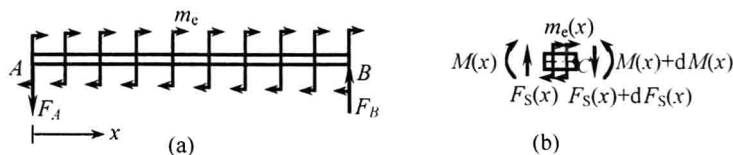
⑦ 平面刚架的内力图可以按直梁分段绘制,一般要求将弯矩画于杆件各段弯曲变形后凹入的一侧,即画在受压的一侧(不标 $\oplus \ominus$ 号),轴力与剪力图可画于刚架任意一侧(需要标出 $\oplus \ominus$ 号)。而曲梁则规定使曲杆的曲率增加(曲率半径减小)的弯矩为正,而弯矩图仍约定画在杆件弯曲变形凹入的那一侧(受压侧)。这样水平梁、刚架、曲梁的弯矩图都统一画在了受压侧,这一规定是机械类材料力学教材中的约定,但在土建类材料力学教材中通常将弯矩图画在杆件弯曲变形后外凸的一侧,即画在受拉一侧,这时弯矩图的凹凸向及有跳跃处跳跃方向与上文所述相反。土建类教材这种处理方法主要是考虑构件为钢筋混凝土制造时,钢筋要布放在受拉侧。而机械类的这种约定更符合数学学习习惯。刚架、曲梁的轴力和剪力的正、负号规定与水平梁是完全相同的,对机械类和土建类材料力学教材,其规定也是一致的。

1.2 思考题及解答

思考题 1.1 简支梁作用了如图所示集度为 $m_c(x)$ (即 x 截面处,单位长度上作用的弯矩为 $m_c(x)$) 的分布弯矩,发生弯曲变形。试推导此梁的剪力 F_S 、弯矩 M 与载荷分布集度之间的微分关系。(主教材思考题 1.7)



思考题 1.1 图



思考题 1.1 解答图

解:

(1) 确定内力变化规律

以 A 为原点建立解答图 (a) 所示坐标轴 x , 在 x 及 $x+dx$ 的位置处将杆件沿横截面切开, 取所切长度 dx 的微段为研究对象, 受力如解答图 (b) 所示。作用在微段上的力系满足下面的平衡方程:

$$\sum F_y = 0, F_S(x) - [F_S(x) + dF_S(x)] = 0$$

$$\sum M_C = 0, M(x) + dM(x) - M(x) - F_S(x)dx - m_e(x)dx = 0$$

求解上述方程, 得到 $dF_S(x) = 0$, 即 $F_S(x) = \text{常数}$, 以及 $\frac{dM(x)}{dx} = F_S(x) + m_e(x)$ 。

(2) 求解约束力, 确定剪力的变化规律

取杆件整体为研究对象, 受力如解答图 (a) 所示。通过平衡方程可求出

$$F_A = \frac{1}{l} \int_0^l m_e(x) dx$$

杆件任意横截面上的剪力与载荷分布集度之间的关系可通过下面的方法确定 (直接求和法): 在任意横截面处假想地将杆件切开, 去掉切开截面左侧的构件, 用去掉构件上的全部与剪力同方位的外力的代数和计算该截面的剪力, 即

$$F_S(x) = -F_A = -\frac{1}{l} \int_0^l m_e(x) dx$$

(3) 弯矩 M 所满足的微分关系

综合上面所求结果, 得到弯矩 M 与载荷分布集度之间的微分关系为

$$\frac{dM(x)}{dx} = F_S(x) + m_e(x) = -\frac{1}{l} \int_0^l m_e(x) dx + m_e(x)$$

由于 $F_S(x) = \text{常数}$, 上式也可以表示成

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = \frac{dm_e(x)}{dx}$$

思考题 1.2 如图所示的组合梁 ABC , 有两种不同的受力方式, 图 (a) 为中间铰 B 的左右两侧各作用一个集中力偶, 且力偶矩大小相等、转向相反, 图 (b) 在 AB 和 BC 段的中点各作用一个集中力, 且集中力大小相等、方向相反, 试分析梁各段的内力分量。(主教材思考题 1.10 (1) (2))

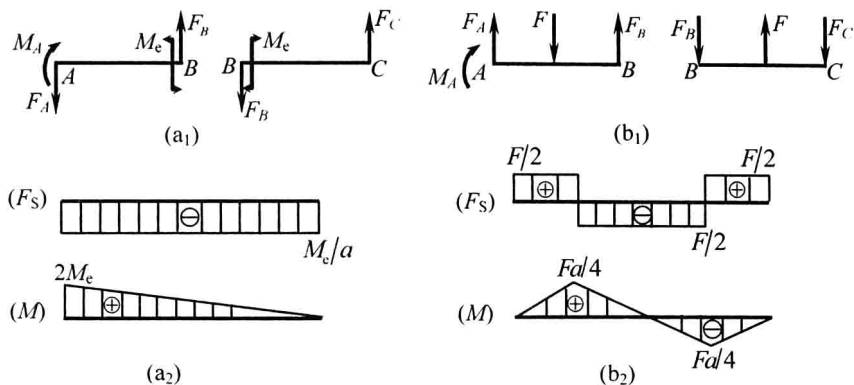


思考题 1.2 图

(a) 解:

(1) 求约束力

分别取杆 AB 、 BC 为研究对象, 受力如解答图 (a₁) 所示, 列平衡方程, 解出约束力。



思考题 1.2 解答图

对杆 BC

$$F_B = F_C = \frac{M_e}{a}$$

对杆 AB

$$M_A = 2M_e, \quad F_A = \frac{M_e}{a}$$

(2) 作内力图

绘制剪力图和弯矩图如解答图 (a₂) 所示。

(b) 解:

(1) 求约束力

分别取杆 AB 、 BC 为研究对象, 受力如解答图 (b₁) 所示, 由平衡方程解出约束力。

对杆 BC

$$F_B = F_C = \frac{F}{2}$$

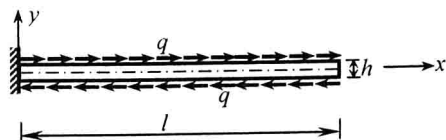
对杆 AB

$$F_A = \frac{F}{2}, \quad M_A = 0$$

(2) 作内力图

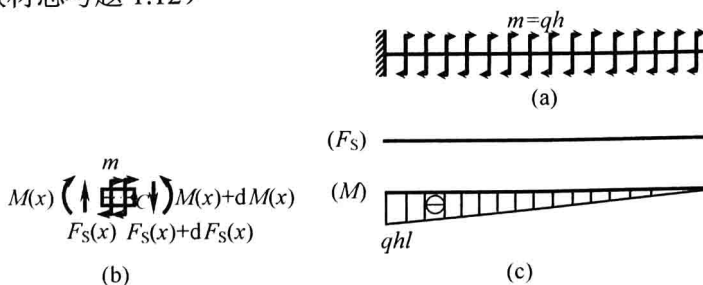
绘制剪力图和弯矩图如解答图 (b₂) 所示。

思考题 1.3 如图所示, 等截面悬臂梁在上表面作用了沿 x 轴正方向的水平均布载荷 q , 下表面也作用了沿 x 轴负方向的水平均布载荷 q , 若梁的高度为 h , 垂直于纸面方向的厚度为单位 1, 试问此时微分关系 $\frac{dM}{dx} = F_S$ 是否仍然成立? 试绘出该梁的剪



思考题 1.3 图

力图和弯矩图。(主教材思考题 1.12)



思考题 1.3 解答图

解:

(1) 给出计算简图

将上下表面的水平均布载荷向梁的轴线处简化后, 悬臂梁的计算简图如解答图 (a) 所示。

(2) 确定内力变化规律

在 x 截面及 $x+dx$ 截面处将杆件切开, 取切出的微段为研究对象, 受力如解答图 (b) 所示。作用在微段上的力系满足下面的平衡方程:

$$\sum F_y = 0, F_S(x) - [F_S(x) + dF_S(x)] = 0$$

$$\sum M_C = 0, M(x) + dM(x) - M(x) - F_S(x)dx - m dx = 0$$

由上述方程, 得到 $dF_S(x) = 0$, 即 $F_S(x) = \text{常数}$, 以及 $\frac{dM(x)}{dx} = F_S(x) + m$, 求解结果说明微分关系

$\frac{dM}{dx} = F_S$ 不成立。

(3) 写出内力方程, 绘制内力图

根据直接求和法可确定剪力方程为

$$F_S(x) = 0, \quad (0 \leq x \leq l)$$

再利用所求出的微分关系, 有

$$\frac{dM(x)}{dx} = F_S(x) + m = qh$$

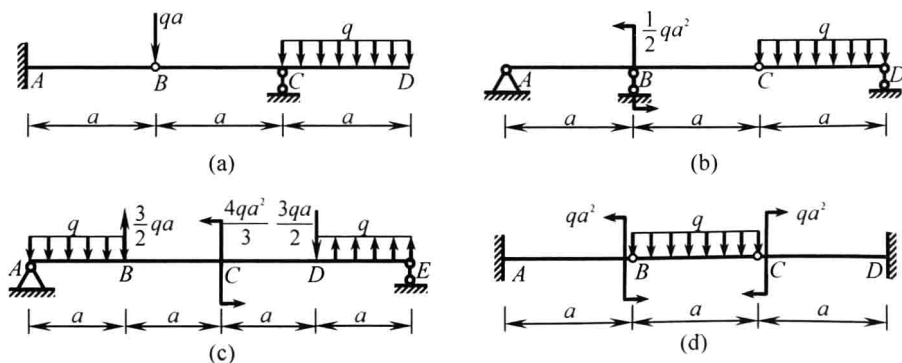
于是得到弯矩方程

$$M(x) = -qh(l - x), \quad (0 < x \leq l)$$

绘出剪力图和弯矩图如解答图 (c) 所示。

1.3 习题及解答

习题 1.1 各梁受力如图所示, 试绘出剪力图和弯矩图, 并求梁中剪力和弯矩绝对值的最大值。
(主教材习题 1.9 (1) (2) (5) (6))



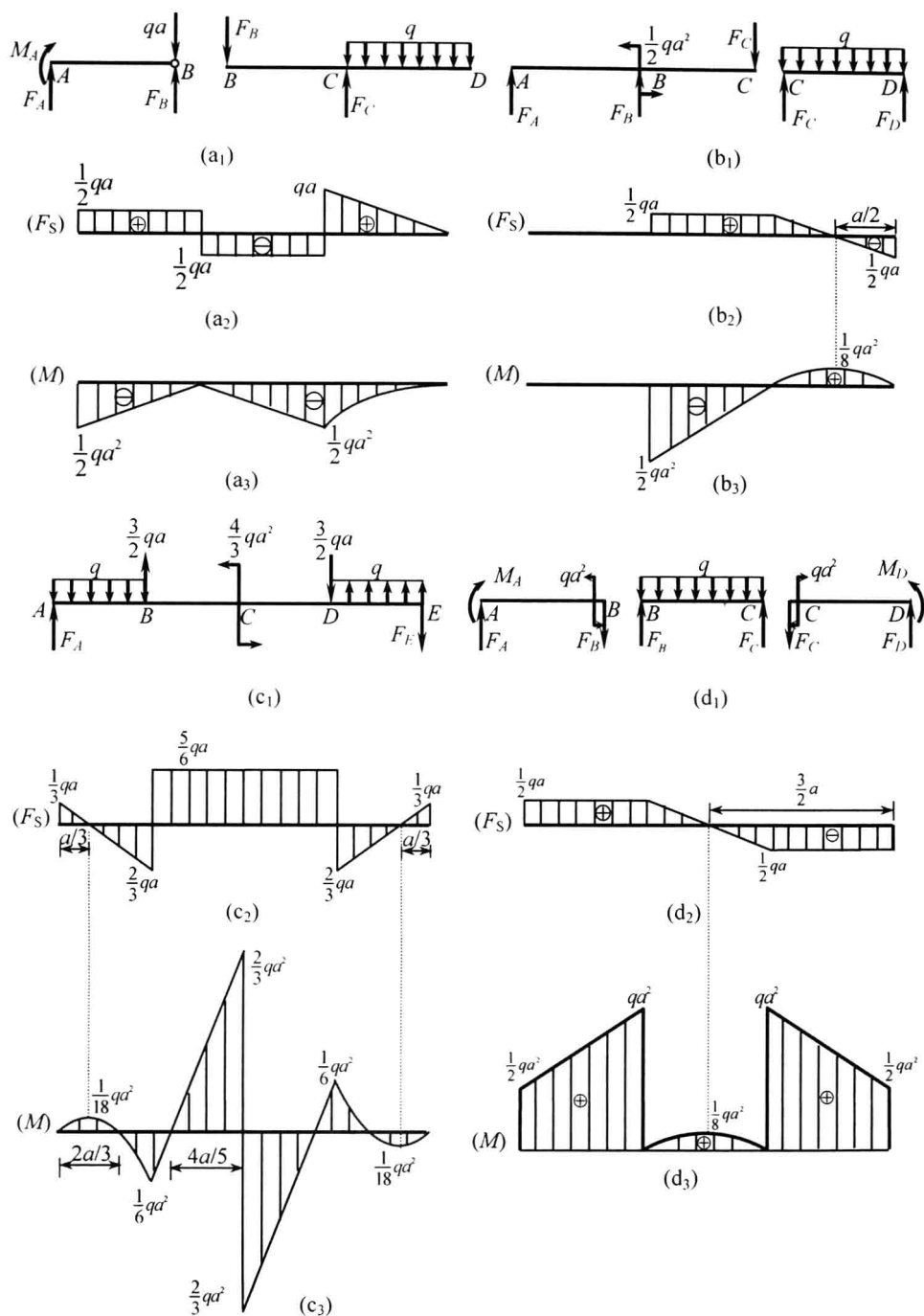
习题 1.1 图

(a) 解:

(1) 求约束力

分别取杆 BCD 、 AB 为研究对象, 受力如解答图 (a₁) 所示, 由平衡方程解出的约束力为

$$F_B = \frac{1}{2}qa, \quad F_C = \frac{3}{2}qa; \quad F_A = \frac{1}{2}qa, \quad M_A = \frac{1}{2}qa^2$$



习题 1.1 解答图

(2) 作内力图, 给出内力的最大值

分别绘出梁的剪力图、弯矩图如解答图 (a₂)、(a₃) 所示。剪力、弯矩的绝对值的最大值分别为

$$|F_S|_{\max} = qa, \quad |M|_{\max} = \frac{1}{2}qa^2$$

(b) 解:

(1) 求约束力

分别取杆 CD、ABC 为研究对象, 受力如解答图 (b₁) 所示, 由平衡方程得

$$F_C = \frac{1}{2}qa, \quad F_D = \frac{1}{2}qa; \quad F_A = 0, \quad F_B = \frac{1}{2}qa$$