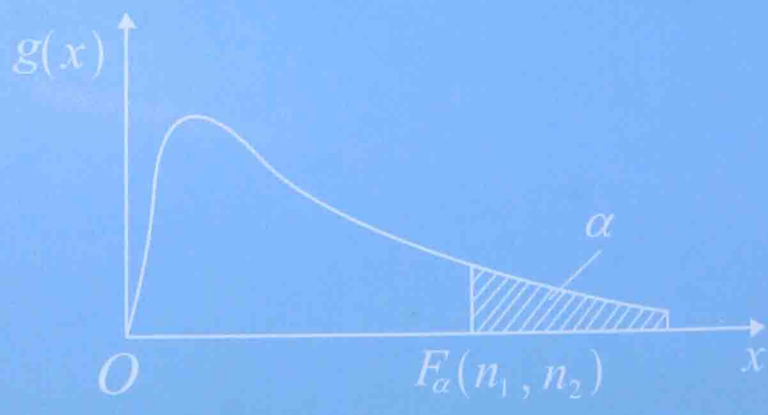
普 通 高 等 教 育 “十 二 五” 规 划 教 材
新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材

丛书主编：朱长江 彭双阶
执行主编：何 穗

概率论与数理统计

GAILVLUN YU SHULI TONGJI

王成勇 王刘禾 李柏林◎主编



華中師範大學出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材

概率论与数理统计

主编：王成勇　王刈禾　李柏林

华中师范大学出版社

内 容 提 要

《概率论与数理统计》是高等院校理工科各专业的必修课程，本书共 9 章，内容包括：随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验以及回归分析，各章末均设有适量习题，供读者练习。

本书为普通高等院校非数学专业学生编写，可作为高等学校理工、经济、金融、管理等各专业概率论与数理统计课程的教材或参考书。

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/王成勇，王刘禾，李柏林主编.—武汉：华中师范大学出版社，2014.8

普通高等教育“十二五”规划教材　新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材

ISBN 978-7-5622-6613-6

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①王…　②王…　③李…　Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 092119 号

概率论与数理统计

©王成勇　王刘禾　李柏林　主编

责任编辑：张方毅　袁正科　　责任校对：刘　峥　　封面设计：胡　灿

编 辑 室：第二编辑室　　电　话：027－67867362

出版发行：华中师范大学出版社

社　址：湖北省武汉市珞喻路 152 号　　邮　编：430079

销售电话：027－67863426/67863280(发行部)　027－67861321(邮购)　027－67863291(传真)

网　址：http：//www.ccnupress.com　　电子信箱：hscbs@public.wh.hb.cn

印　刷：湖北新华印务有限公司　　督　印：章光琼

开　本：787mm×1092mm　1/16　　印　张：10.5　　字　数：236 千字

版　次：2014 年 9 月第 1 版　　印　次：2014 年 9 月第 1 次印刷

印　数：1—4500　　定　价：19.80 元

欢迎上网查询、购书

普通高等教育"十二五"规划教材
新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材

丛书编写委员会

丛书总序

未来社会是信息化的社会，以多媒体技术和网络技术为核心的信息技术正在飞速发展，信息技术正以惊人的速度渗透到教育领域中，正推动着教育教学的深刻变革。在积极应对信息化社会的过程中，我们的教育思想、教育理念、教学内容、教学方法与手段以及学习方式等方面已不知不觉地发生了深刻的变革。

现代数学不仅是一种精密的思想方法、一种技术手段，更是一个有着丰富内容和不断向前发展的知识体系。《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》指明了未来十年高等教育的发展目标："全面提高高等教育质量"、"提高人才培养质量"、"提升科学研究水平"、"增强社会服务能力"、"优化结构办出特色"。这些目标的实现，有赖于各高校进一步推进数学教学改革的步伐，借鉴先进的经验，构建自己的特色。而数学作为一个基础性的专业，承担着培养高素质人才的重要作用。因此，新形势下高等院校数学教学改革的方向、具体实施方案以及与此相关的教材建设等问题，不仅是值得关注的，更是一个具有现实意义和实践价值的课题。

为推进教学改革的进一步深化，加强各高校教学经验的广泛交流，构建高校数学院系的合作平台，华中师范大学数学与统计学学院和华中师范大学出版社充分发挥各自的优势，由华中师范大学数学与统计学学院发起，诚邀华中和周边地区部分颇具影响力的高等院校，面向全国共同开发这套"新世纪新理念高等院校数学系列精品教材"，并委托华中师范大学出版社组织、协调和出版。我们希望，这套教材能够进一步推动全国教育事业和教学改革的蓬勃兴盛，切实体现出教学改革的需要和新理念的贯彻落实。

总体看来，这套教材充分体现了高等学校数学教学改革提出的新理念、新方法、新形式。如目前各高等学校数学教学中普遍推广的研究型教学，要求教师少

讲、精讲，重点讲思路、讲方法，鼓励学生的探究式自主学习，教师的角色也从原来完全主导课堂的讲授者转变为学生自主学习的推动者、辅导者，学生转变为教学活动的真正主体等。而传统的教材完全依赖教师课堂讲授、将主要任务交给任课教师完成、学生依靠大量的被动练习应对考试等特点，已不能满足这种新教学改革的推进。如果再叠加脱离时空限制的网络在线教学等教学方式带来的巨大挑战，传统教材甚至已成为教学改革的严重制约因素。

基于此，我们这套教材在编写的过程中注重突出以下几个方面的特点：

一是以问题为导向、引导研究性学习。教材致力于学生解决实际的数学问题、运用所学的数学知识解决实际生活问题为导向，设置大量的研讨性、探索性、应用性问题，鼓励学生在教师的辅导、指导下于课内课外自主学习、探究、应用，以加深对所学数学知识的理解、反思，提高其实际应用能力。

二是精选内容、逻辑清晰。整套教材在各位专家充分研讨的基础上，对课堂教学内容进一步精炼浓缩，以应对课堂教学时间、教师讲授时间压缩等方面的变革；与此同时，教材还在各教学内容的结构安排方面下了很大的功夫，使教材的内容逻辑更清晰，便于教师讲授和学生自主学习。

三是通俗易懂、便于自学。为了满足当前大学生自主学习的要求，我们在教材编写的过程中，要求各教材的语言生动化、案例更切合生活实际且趣味化，如通过借助数表、图形等将抽象的概念用具体、直观的形式表达，用实例和示例加深对概念、方法的理解，尽可能让枯燥、繁琐的数学概念、数理演绎过程通俗化，降低学生自主学习的难度。

当然，教学改革的快速推进不断对教材提出新的要求，同时也受限于我们的水平，这套教材可能离我们理想的目标还有一段距离，敬请各位教师，特别是当前教学改革后已转变为教学活动“主体”的广大学子们提出宝贵的意见！

朱长江
于武昌桂子山
2013 年 7 月

前言

随着科学技术的迅速发展，概率论与数理统计作为现代数学的重要分支，在自然科学、社会科学和工程技术领域的应用也越来越广泛。计算机的迅速普及为概率统计在经济、管理、金融、保险、生物、医学等方面的深入应用提供了便利的计算条件，各种简便易用的统计软件为非专业者应用概率统计知识解决实际问题提供了广阔的空间。正是概率统计的这种广泛应用性，使得它成为当前各类专业大学生最重要的数学必修课之一。

由于概率论与数理统计研究随机现象，与其他数学分支在思维模式、研究方法等方面有较大的差别，初学者在学习这门课程时容易困惑。而当前中学的新课程标准的改革与实行使得概率统计的基本概念在小学、中学阶段得以逐步建立，这为大学的概率统计课程教学提供了相对较好的基础。本书在编写过程中考虑到概率论与数理统计的这种特殊性和广泛性，以及学生在中学阶段学习的基础，在内容取舍上兼顾了以下几点：尽量做到在保持论述的严密性的同时省略了一些复杂的证明过程；对于基本概念，紧密联系其应用背景并配合合适的例题加以解释，便于读者正确领会概念的内涵；在组织例题和习题时也注重知识的广泛应用。

本书分为两大部分，第一部分由前 5 章组成，讲述概率论的有关基础知识，第 1 章结合中学的知识基础回顾并深入学习事件的概率计算方法，第 2、3、4 章结合高等数学的相关知识结构引入随机变量及其分布函数，建立各类常用概率分布模型，运用微积分的有关知识来系统地研究各类概率计算问题，第 5 章介绍了随机变量序列的大数定律和中心极限定理。第二部分由后 4 章组成，分别讲授数理统计的基本概念、参数估计、假设检验和线性回归分析，附录中还给出了统计分布间的关系，常用概率分布表及常用概率统计表。在讲授过程中，老师可根据各专业的不同需要适当删减部分内容。

本书第 1 章由李柏林执笔，第 2～5 章由王刈禾执笔，第 6～9 章由王成勇执笔，全书由王成勇统稿。限于编者水平，书中难免存在诸多不妥，欢迎广大读者批评指正。

编者

2014 年 3 月

目　录

第 1 章

随机事件与概率

概率统计是研究随机现象统计规律性的一门学科。概率论起源于古代赌博游戏，但概率的数学模型的提出普遍归功于法国数学家巴斯卡(Pascal)和费马(Fermat)，他们通过书信讨论有关掷骰子游戏的数学问题，利用排列组合的方法精确计算出某些问题的概率，同时创立了关于排列、组合、二项系数等理论。此后，由于伯努利(Bernoulli)、德莫佛(De Moivre)、贝叶斯(Bayes)、薄丰(Buffon)、勒让德(Legendre)、拉格朗日(Lagrange)等人的工作，概率论的内容逐渐丰富，到拉普拉斯(Laplace)时所谓古典概率论的结构已基本完成，《分析概率论》是其集大成之作。有关概率的统计或经验的观点主要是由费歇尔(Fisher)、冯-迈思(Von-Mises)发展起来的，冯-迈思的样本空间概念最终使得人们可以基于测度观点来发展概率数学理论。现代概率论的公理化体系于 20 世纪 30 年代由苏联数学家柯尔莫格洛夫(Kolmogorov)所创立，这不仅对论述无限随机试验序列或一般的随机过程给出了足够的逻辑基础，而且也极大地促进了数理统计理论的发展。

1.1　随机事件与样本空间

1.1.1　随机现象

在自然界和人类社会中存在着两类现象：第一类，在一定条件下某种现象必定发生或必定不会发生，这类现象称为**确定性现象**。例如：做自由落体运动的物体在经过 t 秒钟后，落下的距离 s 必定是$\frac{gt^2}{2}$；在标准大气压下，水到 60℃ 沸腾。第一种是必然会发生的，称为**必然事件**，记作 Ω；第二种是必然不会发生的，称为**不可能事件**，记作 $\varnothing$。

另一类，在一定条件下，某种现象可能发生也可能不发生，称这类现象为**随机现象**。例如：襄阳明年正月初一下雪；播种 1000 颗种子，有 850 颗发芽；发射一枚炮弹，弹着点与目标之间的距离为 15 米。

在本课程中，我们把对某事物的某个特征进行的一次观察、记录或实验统称为**试验**。有些试验会出现这样的现象：在基本相同的条件下，试验可重复进行，事先知道试验共有哪些可能结果，但每次试验出现哪一种结果却是无法预见的，这种试验称为**随机试验**，每次试验(本书中随机试验简称为试验)不能预测其结果，这反映随机试验结果的出现具有偶然性；但如果进行大量重复试验，所出现的结果又具有某种规律性——**统计规律性**。例如各次发射炮弹，弹着点与目标之间的距离可能各不相同，但如果射手技术较好，多次发射中距离近的必定是多数。由于随机现象的广泛性，决定了这门学科的重要性，即使在一

定条件下某类现象可以视为确定性的，但在作更为深入的考察时，又应看作是随机的了。例如对上面提到的自由落体运动，当我们考虑空气阻力、空气流动等因素时，物体下落的距离就不一定恰好是$\frac{gt^2}{2}$。

随机试验的某一可能结果称为**随机事件**，简称**事件**。一般地，我们用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 等表示事件。

如某人打靶一次，考察中靶的环数：$A=\{8\text{ 环}\}$，$B=\{\text{环数}\geqslant 7\}$，$C=\{\text{环数}\leqslant 9\}$，等等。

一次试验中，某事件A可能发生，也可能不发生，发生的可能性有大有小，这一可能性大小的数量指标就是我们所要研究的事件的概率。

1.1.2 样本空间和样本点

投掷一颗骰子，虽无法预卜其结果如何，但总不外乎是"出现 1 点"，"出现 2 点"，…，"出现 6 点"这 6 个基本的可能结果之一，不妨把这些试验结果的全体记为$\{1,2,\cdots,6\}$。

随机试验的每一基本结果称为**样本点**，常记作 ω。样本点的全体称为**样本空间**，常记作 Ω。上述例子中，记 $\omega_i=$"出现 i 点"，那么 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$。

样本点和样本空间是概率论中的两个基本概念，随着对所讨论问题的兴趣不同，同一随机试验可以有不同的样本空间，讨论问题前必须先取定样本空间。

例 1.1 口袋中装有 10 个球：三个红球，三个白球和四个黑球，任取一球，考察取出球的颜色，则样本空间为 $\Omega=\{$取得一个红球，取得一个白球，取得一个黑球$\}$。

例 1.2 编号从 1 到 10 的 10 个球中，任取一球，考察取出球的编号，则样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{10}\}$，其中 $\omega_i=$ 取得第 i 号球$(i=1,2,\cdots,10)$。

例 1.3 在编号从 1 到 10 的 10 个球中，如果每次共取两个球，考察取出球的编号，则每个样本点可以用所取得的两个球号(i,j)来表示，则样本空间为$\Omega=\{(1,2),(1,3),\cdots,(1,10),(2,3),\cdots,(2,10),\cdots,(9,10)\}$，这是二维的样本空间。

例 1.1、例 1.2 和例 1.3 都是有限样本空间。

例 1.4 考察单位时间内落在地球上某一区域的宇宙射线数，这可能是 0，也可能是 1，是 2，…，很难确定一个上界。于是可以取样本空间为 $\Omega=\{1,2,\cdots\}$，它包含无限多个样本点，但可按一定的顺序排列起来(称为**无限可列个**)。

例 1.5 考察发射一枚炮弹时，落地点与目标之间的距离，若距离不超过 a，距离可能是 0 到 a 之间的任一实数，可取样本空间为 $\Omega=[0,a]$，它是一维连续区间。

在实际问题中，样本空间是一个集合，它随考察特征确定而确定。

1.1.3 事件的关系与运算

在随机试验中，除了那些基本结果 —— 样本点以外，还可列出其他的一些结果。例 1.1 中，还可能出现下面各种结果：

$A=\{$取得红球或白球$\}$；$B=\{$取得黑球$\}$；$C=\{$没有取得红球$\}$ 等，这些都是事件。

如果把样本空间看成讨论问题的全集，样本点是全集中的元素，那么一个事件就是样本空间中的一个子集，或者说是样本点的某种集合。在上面讨论的例 1.2 中：

$A=\{$出现点数不超过 4$\}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$；$B=\{$出现点数大于 7$\}=\{\omega_8,\omega_9,\omega_{10}\}$ 等都是样本空间 Ω 的子集。

如果一次试验中某样本点 ω 出现，而 $\omega\in A$，则称**事件 A 发生**。样本空间 Ω 自然也可看作一个事件，因为在每次试验中必然出现 Ω 中的一个样本点，也即 Ω 必然发生，所以 Ω 就是必然事件。类似地，把空集 $\varnothing$ 作为一个事件，它在每次试验中必定不发生，所以 $\varnothing$ 就是不可能事件。

把事件看作样本点的集合，这种观点使我们能用集合论的方法来研究事件，特别是可用集合之间的关系和运算来研究事件之间的关系和运算，下面就来叙述它们。

事件 A 包含 B（B 包含于 A）：若事件 B 发生必然导致事件 A 发生，则称事件 B 包含于事件 A，记作 $A\supset B$（或 $B\subset A$）。

例如，若记 $A=\{$产值超过 2 亿元$\}$，$B=\{$产值超过 3 亿元$\}$，则 $A\supset B$，其意义为若 $\omega\in B$，则 $\omega\in A$。

事件 A 与 B 相等：若 $A\supset B$ 同时 $B\supset A$，则称事件 A 与 B 相等，记作 $A=B$。

事件 A 与 B 的和（并）："事件 A 与 B 至少一个发生"这一事件称为事件 A 与 B 的和（并），记作 $A\cup B$（也可记作 $A+B$）。

例如，$A=\{$产值超过计划 1 亿元$\}$，$B=\{$产值在 0.5 亿元和 1.5 亿元之间$\}$，则 $A+B=\{$产值超过计划 0.5 亿元$\}$。

事件 A 与 B 的积（交）："事件 A 发生并且事件 B 也发生"这一事件称为事件 A 与 B 的积（交），记作 $A\cap B$（也可记作 AB）。

上例中 $AB=\{$产值在 1 亿元与 1.5 亿元之间$\}$。

事件 A 与 B 的差："事件 A 发生而事件 B 不发生"这一事件称为事件 A 与 B 的差，记作 $A-B$，它表示 A 发生而 B 不发生，显然 $A-B=A\overline{B}$。

上例中 $A-B=\{$产值超过计划 1.5 亿元$\}$。

如果 A 与 B 两事件不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$，就称 **A 与 B 互不相容**。

如果事件 A 与 B 当且仅当一个发生，即 $AB=\varnothing$ 且 $A+B=\Omega$，就说事件 B 是 A 的**逆事件（或对立事件）**，记作 $B=\overline{A}$，此时 A 也是 B 的**逆事件**。

事件的关系与运算满足集合论中有关集合运算的一切性质，例如：

交换律：$A+B=B+A$，$AB=BA$；

结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$，$(AB)C=A(BC)$；

等幂律：$A+A=A$，$AA=A$；

吸收律：若 $A\subset B$，则 $A+B=B$，$AB=A$；

分配律：$(A+B)C=AC+BC$，$(AB)+C=(A+C)(B+C)$；

德莫根（De Morgan）**律**：$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$。

对于多个事件，甚至对于无限可列个事件，德莫根律也成立。

读者要学会把集合论的写法与事件运算意义的有关意义互相翻译，要学会利用事件的运算把复杂事件分解成简单事件。

例 1.6 若 A,B,C 是三个事件，则

(1) {事件 A 与 B 都发生而 C 不发生} 表示为：$AB\,\overline{C}$ 或 $AB-C$ 或 $AB-ABC$；

(2) {A、B、C 三个事件都发生} 表示为：ABC；

(3) {A、B、C 三个事件恰好发生一个} 表示为：$A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$；

(4) {A、B、C 三个事件恰好发生两个} 表示为：$AB\overline{C}+A\overline{B}C+AB\overline{C}$；

(5) {A、B、C 三个事件至少发生一个} 表示为：$A+B+C$ 或

$$A\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+AB\,\overline{C}+A\,\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC。$$

例 1.7 一电路系统由元件 A 与 B 并联所得的线路再与元件 C 串联而成(如图 1-1)，若以 A、B、C 表示相应元件能正常工作的事件，那么事件 $W=${系统能正常工作}$=${元件 A 与 B 至少一个能正常工作并且 C 能正常工作}$=(A+B)C$ 或者 $AC+BC$。

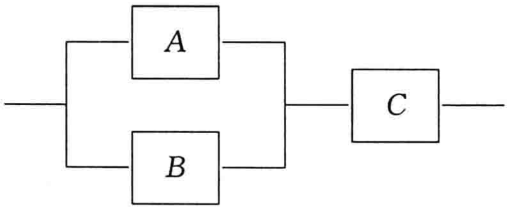


图 1-1

1.2 频率和概率

对于一个事件 A 来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生。为了分析事件 A 在一次试验中发生可能性的大小，我们可将试验重复多次，考察 A 发生的频数，进而考察事件 A 发生的频繁程度。为此，我们引入频率的概念。

1.2.1 频率

定义 1.1 在相同的条件下，重复进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数，比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率，并记为 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}。\tag{1.1}$$

例 1.8 掷一枚硬币 10 次，正面共出现 6 次，记 $A=${出现正面}，则 $f_{10}(A)=\frac{3}{5}$。

例 1.9 某人打靶 15 次，每次考察中靶环数，其中有 4 次中 8 环，记 $B=${中 8 环}，则 $f_{15}(B)=\frac{4}{15}$。

从定义中，易见频率具有下述基本性质：

(1) 对任意事件 A，都有 $f_n(A)\geqslant 0$(非负性)；

(2) $f_n(\Omega)=1$(规范性);

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容的事件,则

$$f_n(A_1+A_2+\cdots+A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k)\text{(可加性)。}$$

由于事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验次数之比,其大小表示 A 发生的频繁程度。频率大,事件 A 发生就频繁,这意味着 A 在一次试验中发生的可能性就大,反之亦然。因而,直观的想法是用频率来表示 A 在一次试验中发生的可能性的大小。

例 1.10　考察英语中特定字母出现的频率,当观察字母的个数 n(试验的次数) 较小时,频率有较大幅度的随机波动,但当 n 增大时,频率呈现出稳定性。下面就是一份英文字母频率的统计表[①]:

字母	频率	字母	频率	字母	频率
E	0.1268	L	0.0394	P	0.0186
T	0.0978	D	0.0389	B	0.0156
A	0.0788	U	0.0280	V	0.0102
O	0.0776	C	0.0268	K	0.0060
I	0.0707	F	0.0256	X	0.0016
N	0.0706	M	0.0244	J	0.0010
S	0.0634	W	0.0214	Q	0.0009
R	0.0594	Y	0.0202	Z	0.0006
H	0.0573	G	0.0187		

大量实验证明,当重复试验的次数 n 逐渐增大时,频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性,逐渐稳定于某个常数,这种“频率稳定性”即通常所说的统计规律性,即若让试验重复大量次数,用频率 $f_n(A)$ 来表征事件 A 发生可能性的大小也是合适的。

1.2.2　概率

在描述事件发生可能性的大小时,由于频率与试验次数有关,为了克服这个矛盾和理论研究的需要,我们从频率的稳定性和频率的性质得到启发,给出一个事件发生可能性大小的数学表述 —— **概率**。

定义 1.2　设 E 是随机试验,Ω 是它的样本空间。对于 E 的每一事件 A 都对应于一个实数,记为 $P(A)$(显然 $P(A)$ 是一个集合函数),称为事件 A 的概率,如果集合函数 $P(*)$ 满足下列条件:

(1) **非负性**:对于每一个事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$;

(2) **规范性**:对于必然事件 Ω,有 $P(\Omega)=1$;

① 这是由 Dewey,G 统计了约 438023 个字母得到的,引自 Relative Frequency of English Spellings(Teachers College Press,Columbia University,New York ,1970)。

(3) **可列可加性**：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是两两互不相容的事件，即对于 $i \neq j, A_iA_j = \varnothing$，有

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots。$$

在第5章中将证明，当 $n \to \infty$ 时频率 $f_n(A)$ 在一定意义下接近于概率 $P(A)$。基于这一事实，我们就有理由将概率 $P(A)$ 用来表征事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小。

由概率的定义，可以推得概率的一些重要性质。

性质1 $P(\varnothing) = 0$。

证 令 $A_n = \varnothing (n = 1, 2, \cdots, k, \cdots)$，则 $\varnothing = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$，且 $A_iA_j = \varnothing (i \neq j)$，由概率的可列可加性得

$$P(\varnothing) = P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\varnothing),$$

由于 $P(\varnothing) \geqslant 0$，故由上式可知 $P(\varnothing) = 0$。

性质2 (有限可加性) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，则

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n), \tag{1.2}$$

上式称为概率的**有限可加性**。

证 令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing$，即有 $A_iA_j = \varnothing (i \neq j)$，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(\varnothing) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)。$$

性质3 设 A, B 是两个事件，若 $A \subset B$，则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A); \tag{1.3}$$

$$P(B) \geqslant P(A)。 \tag{1.4}$$

证 由 $A \subset B$ 知，$B = A + (B - A)$，且 $A(B - A) = \varnothing$，再由概率的有限可加性(1.2)式得

$$P(B) = P(A) + P(B - A),$$

又由概率的非负性知 $P(B - A) \geqslant 0$，所以有

$$P(B) \geqslant P(A)。$$

性质4 对于任意一个事件 A，$P(A) \leqslant 1$。

证 因为 $A \subset \Omega$，所以

$$P(A) \leqslant P(\Omega) = 1。$$

性质5 (逆事件的概率) 对于任意一个事件 A，有

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)。 \tag{1.5}$$

证 因 $A + \overline{A} = \Omega$，且 $A\overline{A} = \varnothing$，于是

$$1 = P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}),$$

所以

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)。$$