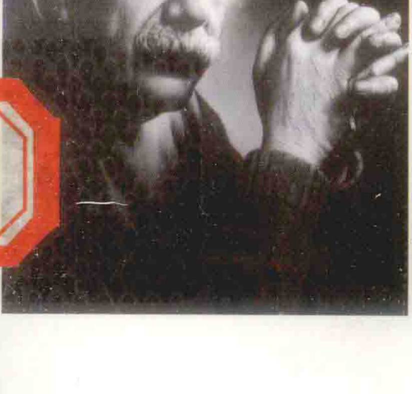
Science

千万个科学故事

千万个科学故事

第四卷

林力等　主编

时代文艺出版社

第四卷　目　录

数学故事

物理故事

数学故事

追溯和预测

公元 1896 年，法国物理学家贝克勒尔发现，铀的化合物能放射出一种人眼看不到的射线，这种射线能使它在黑纸里的照相底片感光。这种现象吸引了女科学家玛丽·居里的注意。居里夫人想，应该不是只有铀才能发出射线吧！经她细心研究，终于又找到了一些放射性更强的元素。

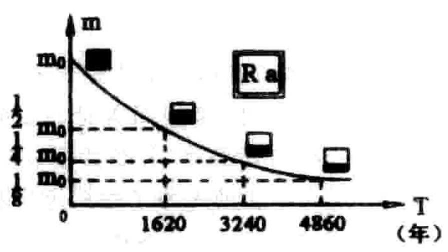
公元 1903 年，出色的英国物理学家卢瑟福，设计了一个十分巧妙的实验，证明了放射性物质放出的射线有三种，而且在放出射线的同时，本身有一部分蜕变为其他物质。蜕变的速度不受冷热变化、化学反应及其他外界条件的影响。

经科学家们不懈努力，人们终于明白了放射性蜕变的量的规律：即蜕变的变化量$\triangle m$，与当时放射性物质的质量 m 及蜕变时间成正比。也就是说

$$\triangle m \propto -m\triangle t$$

右端的负号是因为蜕变后放射性物质减少的缘故。

上式写成等式便是：



$$\triangle m = -km\triangle t$$

其中 $m = m_0 e^{-kt}$

下面我们计算一下，到底需要多长时间，才能使放射性物质蜕变为原来的一半。为此，令 $m=\frac{1}{2}m_0$，于是

$$\frac{1}{2}=e^{-kt}$$

$$\lg \frac{1}{2} = -kT\lg e$$

从而 $$T = \frac{\lg 2}{k\lg e} = 0.693 \times \frac{1}{k}$$

这是一个常量，这个常量只与放射性物质本身有关，称为该放射性物质的半衰期。右上图画的是镭的衰变情况：每隔 1620 年质量减至原来一半。下表列的是一些重要放射性物质的半衰期。

元　素	同位素符号	半　衰　期
钍	Th 232	1.39×10^{10} 年
铀Ⅰ	U 238	4.56×10^{9} 年
镭	Ra 226	1620 年
钋Ⅰ	Po 210	138 天
钋Ⅱ	Po 214	1.5×10^{-4} 秒
钋Ⅲ	Po 216	0.16 秒
铀Ⅱ	U 234	2.48×10^{5} 年

铀是极常见的一种放射性物质，由上表得知，它的半衰期为 45 亿 6000 万年。也就是说，过 45 亿 6000 万年之后，铀的质量将剩下原来的一半。由于铀蜕变后，最后变为铅，所以我们只要根据岩石中现在有多少铀和多少铅，便可以推算出岩石的年龄。科学家们正是利用上面的方法，测得世界上最古老岩石的年龄要为 30 亿年。当然，地球年龄要比这更大一些，估计大约有 45～46 亿年！

使用上面的数学方法，不但可以使我们科学地追溯过去，而且可以帮我们科学地预测将来。在儒勒·凡尔纳的《马蒂斯·桑多尔夫》这部小说里，作者叙述了一个精彩动人的故事：

“已经移走了两旁撑住船身的支持物，船准备下水了。只要把缆索一解，船就会自动滑下去。已经有五六个木工在船的龙骨底下忙着。观众满怀着好奇心注视着这件工作。正在这时候，有一艘快艇绕过岸边高出的地方，出现在人们的眼前。原来这艘快艇要进入港口，必须经过“特拉波科罗”号准备下水的船坞前面。所以一听见快艇发出信号，大船上的人为了避免意外发生，就停住了解缆下水的操作，让快艇先过去。如果这两条船，一条横着，另一条用颇高的速度冲过去，快艇一定会被撞沉的。

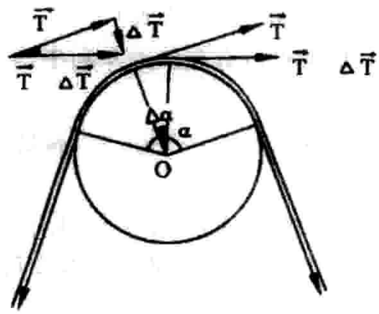
工人们停止了锤击。所有的眼睛都注视着这只装饰华丽的船，船上的白色篷帆在夕阳下像镀了金一样。快艇很快就到了船坞的正前面。船坞上成千的人都惊奇地看着它。突然听到一声惊呼，“特拉波科罗”号正当快艇的右舷对着它的时候，开始摇摆着滑下去了。两条船将要相撞了！已经没有时间、没有方法能够阻止这场惨祸了。“特拉波科罗”号很快地斜着向下面滑去……船头上卷起了因摩擦而击起的白雾，船尾已经没入了水中。

突然站出了一个人，他抓住“特拉波科罗”号前部的缆索，使劲儿地拉，几乎把身子弯得贴近了地面。不到一分钟，他早已把缆索绕在钉在地里的铁桩上。他冒着被摔死的生命危险，用巨大的气力，用手拉住缆索大概有10秒钟的时间。最后，缆索断了。可是这10秒时间已经很足够：“特拉波科罗”号进水以后，只轻轻碰了一下快艇，就向前驶了开去！

快艇脱离了危险。

下面我们用数学的方法来分析一下“特拉波科罗”号事件：

公元1748年，瑞士数学家欧拉（Euler，1707～1783）在他的传世之著《无穷小分析引论》中研究了滚轮摩擦的问题（如左图）。欧拉发现：对于一个很小的转角$\triangle a$，绳子的张力差的量值$\triangle T$与T及$\triangle \alpha$成正比。即



$$\triangle T \propto \triangle \alpha$$

写成等式为$\triangle T=-kT\triangle \alpha$

式中k为摩擦系数，负号是因为问题中张力的值是减少的。

$$其中\ T=T_0 e^{-k\alpha}$$

这就是著名的欧拉滚轮摩擦公式。

现在转到故事中来。假设“特拉波科罗”号船体重50吨，船台坡度为1：10，那么船的下滑力约为5吨，即5000公斤；又假定马蒂夫来得及把缆绳在铁桩上绕了三圈，即

$$a=2\pi\times 3=6\pi;$$

而绳索与铁桩之间的摩擦系数$k=0.33$。

把上述数值代入欧拉公式，便可得到马蒂夫拉住绳子另一头所需要的气力T（公斤）为：

$T=5000\times e^{-0.33\times 6\pi}$

T的值是很容易用对数的方法求出来的

$$\begin{aligned} lgT &= lg5000-0.33\times 6\times 3.1416 lge \\ &=3.6990-0.33\times 6\times 3.1416\times 0.4343 \\ &=0.9975 \\ T &= 9.943(公斤) \end{aligned}$$

这就是说，儒勒·凡尔纳笔下那位力挽狂澜的“大力士”。其实所用的力气不足10公斤。这是连一个少年都能做得到的！

变量中的常量

众所周知，现在的银行存款中，存8年期的利率，经常比存1年期或存3年期的利率高。读者或许以为这仅仅是为了鼓励人们去存较长期限的储蓄。事实上这是本该如此的！因为假如存长期的利率没有比存短期的利率高出一定限度，那么甚至于存短期的储蓄对储户更为合算！

为说明上述的道理，我们假设所有存款的年利率均为12.5%。让我们看一看到底会出现什么毛病！

假设某甲，带本金100元存入银行，一存8年，容易算出，8年后他连本带利正好取回200元。

又设某乙，也带本金100元存入银行，存4年；4年后取出，紧接着又将本利再次存入，又存4年。容易算出，头尾8年某乙连本带利共可收回

$$a_2 = 100 \times (1 + \frac{1}{2})^2 = 225(\text{元})$$

瞧！某乙把一次8年期的存款，分为两次4年期存。原本只多办一道手续，结果竟多得了25元，这相占本金的四分之一，可算是一笔不小的钱数！

再设某丙、某丁、某戊，把8年的存期分得更细，分别等分成3次存、4次存和5次存。每次取出后又马上将款全数存入。这样，头尾8年，各人分别得款（单位元）：

$$a_3 = 100 \times (1 + \frac{1}{3})^3 = 237.04$$

$$a_4 = 100 \times (1 + \frac{1}{4})^4 = 244.14$$

$$a_5 = 100 \times (1 + \frac{1}{5})^5 = 248.83$$

同样，某N，也有本金100元，但把8年存期等分成n次存，每次取出后再次存入，则8年后可得（单位元）：

$$a_n = 100 \times (1 + \frac{1}{n})^n$$

由此证明，当分划期限越短时，到期本利和也就越高。但是，当n无限增大时，变量a_n也不可能无限增大，它以一个常量为极限，这个常量为：

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} \alpha_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[100\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]$$

$$=100e=271.83$$

也就是说，如果存1年期的利率为12.5%，那么存8年期的年利率就必须不低于

$$P=\frac{\frac{a}{100}-1}{8}=\frac{2.7183-1}{8}=21.48\%$$

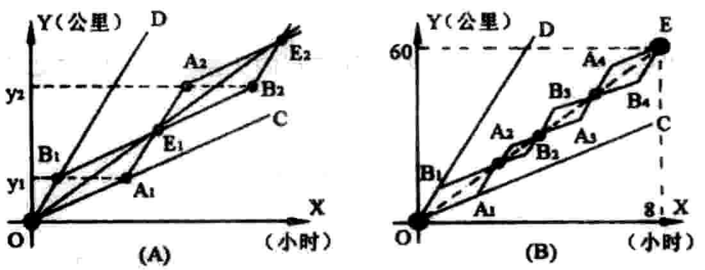
否则就会出现一种混乱的局面：储户为了取得较高的利息，不惜花时间频繁地取出又存进！

变量中的常量，常常具有深刻的意义！

在柯尔詹姆斯基的《趣味数学》中，有一则关于旅行的有趣故事：

甲、乙两人骑自行车去旅行，某甲中途车坏，只得停下来修理，但最终因无法修复而决定舍弃坏车，继续前进。然而，这时两人只有一辆车，于是约定：一人骑车，一人步行。骑车的人到某个地方把车留下，改换步行；而后面步行的人，走到留车的地方换成骑车。骑一段时间后又改成步行，把车留给行者。就这样，两人轮流骑车。问从某甲车坏时起，最少得花多长时间，两人才能同时到达目的地？假定车坏处(O)与目的地(E)之间的路程为60公里，自行车速度为15公里/小时，步行速度为5公里/小时。

下面让我们通过作图来探讨一下可能的解答：



以O为原点，时间为X轴，距离为Y轴，建立坐标系XOY，因为人步行的速度和自行车速度都是变化过程中的常量，因此它们分别表现为坐标系XOY中的射线OC和OD。

如上图(A)，设E_1、E_2分别为甲、乙两人车坏后第一次和第二次相遇的地点。这时，某甲先是步行到A_1，然后骑车经过E_1到达A_2，又改成步行到E_2；而某乙则先骑车到B_1，然后由B_1步行经E_1到达B_2，又改成骑车到E_2；当然，在E_2相遇后各人依然继续前行。因为车速和人速始终保持不变，所以表示骑车或表示步行的线段，应当各自平行。即四边形$OA_1E_1B_1$及$E_1B_2E_2A_2$均为平行四边形。又注意到甲改步行为骑车，与乙改骑车为步行，处于同一地点。因此线段A_1B_1及A_2B_2等都平行于X轴。假定两次换车的地点距O处分别为y_1，y_2公里。则因射线OC、OD的方程为

OC：$y=5x$

OD：$y=15x$

可得 A、B 两点的坐标如下：

$$A(\frac{y_1}{5},y_1);B(\frac{y_1}{15},y_1)$$

从而 E_1 点坐标(x_{E_1},y_{E_1})为：

$$\begin{cases} x_{E_1}=x_A+x_B=\dfrac{y_1}{5}+\dfrac{y_1}{15}=\dfrac{4}{15}y_1 \\ y_{E_1}=y_A+y_B=2y_1 \end{cases}$$

$$\because \frac{y_{E_1}}{x_{E_1}}=\frac{2y_1}{\frac{4}{15y_1}}=\frac{15}{2}$$

$$\therefore y_{E_1}=(\frac{15}{2})x_{E_1}$$

这表明 E_1 点位于由原点发出的斜率为 $\frac{15}{2}$ 的射线上。同理，E_2，E_3，……也应当都位于这条射线上。再由于 O 点离目的地 E 距离为 60 公里，因此到达的时间 x 应满足：

$$60=(\frac{15}{2})x$$

从而　　　　$x=8$(小时)

以上结果表明：无论甲乙两人在路途上骑车、步行怎样换来换去，只要是同时到达目的地，所用的时间都是 8 小时！这一类变量中的常量，并非所有人一开始都能知道的。

有时某些变化的量中，总保持着某种特定的关系。一个极常见的例子，就是两个正数 x_1、x_2 的以下关系式

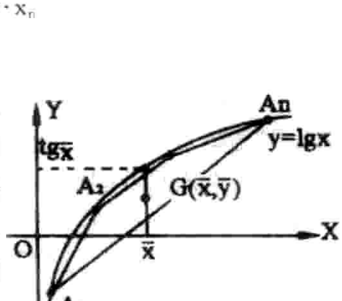
$$\frac{x_1+x_2}{2}\geqslant\sqrt{x_1x_2}$$

等号当且仅当 $x_1=x_2$ 时才成立。

上面的正数算术平均值与几何平均值的关系式，可以延伸到 n 个数。即对于 n 个正数 x_1，$x_2\cdots$，x_n 有：

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时才成立。



上面不等式的简单而巧妙的证明，是利用对数函数 y=lgx 图象的凸性。所说函数图象在某区间的凸性是指：在该区间函数图象上的任意两点所连成的线段，整个地位于函数图象的下方(或上方)。对数函数 y=lgx 图象的凸性是很容易证明的，我们提议留给读者。现设 x_1，x_2，…，x_n 为 n 个正数，已按从小到大顺序排列。又 A_1 为相应于横坐标为 x_1 的、y=lgx 图象上的点。易知，多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 为凸多边形，因此点系重心 G

$(\bar{x},y)$一定位于多边形内。所以有

$$\lg\bar{x}x\geqslant\bar{y}$$

$$\because\begin{cases}\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}\\[2mm]\bar{y}=\dfrac{\lg x_1+\lg x_2+\cdots\lg x_n}{n}=\lg\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\end{cases}$$

$$\therefore\lg\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\lg\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

从而有 $$\frac{x_1x_2+\cdots x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

等号当且仅当 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 都相等时才能成立。

上述不等式在数学的许多方面，有着有趣和广泛的应用。读者在本书的后面章节中，将会不仅一次地发现这一不等式的特殊意义！

优秀的“建筑师”

生物的进化，积数亿年的优胜劣汰。仍能繁衍至今的，经常包含着“最经济原则”的启迪。‘出类拔萃的“建筑师”蜜蜂垒造的蜂窝，大概是最使人心悦诚服的实例！

如果你仔细的观察蜂窝的立体截面图，你可以清晰地看到：虽然蜂窝的横断面是由正六边形组成，但蜂房并不是正六棱柱，房底是由三个菱形拼成。图 1 是一个蜂房的取样，底朝上是为了让读者看得更加清晰。对于图 1 的形成，我们甚至可以想象得更加具体一点：拿来一枝正六棱柱的铅笔，未削之前，铅笔一端的形状是如同图 2 的正六边形 ABCDEF，通过 AC，一刀切下一角，然后沿着 AC 把切下的那一角翻到顶面上去；过 AE、CD 各切同样一角，同 AC 一般翻转上去，便堆成了蜂房那样形状。而蜂窝则是由这样的蜂房底部和底部相接而成的。

图1

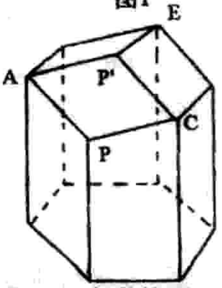
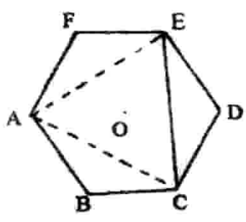


图2



蜂房为什么是正六边形的呢？因为周长一定的所有图形中圆的面积最大，

可是圆是不能铺满平面的，因此就得让位给正多边形。那么，到底有多少种正多边形能够铺满平面呢？读者只需注意到，这样的正多边形内角一定能拼成一个周角，就容易懂得：这样的正多形只能有三个，即正三角形、正方形和正六边形。从下表可以看出，以上三种图形中正六边形是最经济的一种。

图形	面积	边长或半径	周长
正三角形	1	1.5197	4.559
正方形	1	1	4.000
正六边形	1	0.6204	3.722
圆	1	0.5642	3.545

但是，蜂房底部的构造就不那么容易看清了。

18 世纪初，法国学者马拉尔琪曾实测了蜂房底部的菱形，得出一个惊人的有趣结论：构成蜂房底部的每个菱形蜡板，钝角都等于 109°28′，锐角则等于 70°32′。

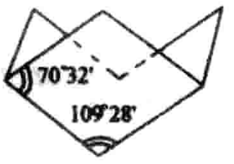


图 3

不久，马拉尔琪的发现传进了另一位法国人列奥缪拉的耳朵里。列奥缪拉是一位物理学家，他想，蜂房底部的结构，可能应该是最节省材料的！可是列奥缪拉却没有理出个头绪，只好去请教巴黎科学院院士，瑞士数学家克尼格。克尼格经过细心计算，得出了更加让人震惊的结果：根据理论上的计算，建造同样大小的容积，而用材料最少的蜂房，它的底部菱形的两角应是 109°26′和 70°34′。这与实测的结果只差 2′。

人们对克尼格的计算技巧和聪明才智倍加赞赏，同时认为蜜蜂在如此细小的构筑上仅仅误差 2′是不足为奇的！

然而，一个意外的事故，证实了蜜蜂的确是出类拔萃的，修建的房穴是毫厘不差的。一艘船只应用克尼格用过的对数表确定方位，不幸遇难。在调查事件起因时，发现船上用过的那张对数表居然有些地方印错了！这件事引起了一位著名的苏格兰数学家马克劳林（Maclaurin，1698～1746）的关注。公元 1743 年，马克劳林重新计算了最经济的蜂房结构，得出菱形钝角应为 109°28′，锐角为 70°32′，与马拉尔琪的实测结果丝毫不差！克尼格由于对数表的差误，结果算错了 2′。

我想读者一定很想知道克尼格和马克劳林的计算。不过 250 年来，人们早已找到了很多有别于他们的更加简便的算法。

让我们把问题先作一番简化。本节开头说过，蜂房底部的构造能够看成是把正六棱柱切去三个角，然后翻转到顶面堆砌而成。这样的图形明显的没有改

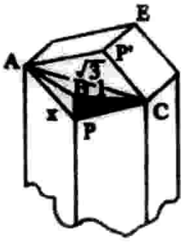


图 4

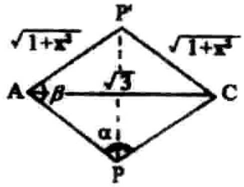


图 5

变原来正六棱柱的体积，现在问题的症结是：翻转后的表面积是增加呢还是减少？

如图 5，假设正六棱柱边长为 1，切去三个角的高为 x，很显然，经过切割翻转后的蜂房模型，比起原正六棱柱来说，表面积少了一个面积为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$的顶面和六个直角边长为 1，x 的小直角三角形（图中阴影部分为一个小直角三角形）；但却多了三个边长为$\sqrt{1+x^2}$，又一条对角线为$\sqrt{3}$的菱形面积。由于菱形面积 $S_\diamond$ 不难算出是

$$S_\diamond=\sqrt{3}\cdot\sqrt{(1+x^2)-(\frac{\sqrt{3}^2}{2})}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+4x^2}$$

这样，表面积的增加量，便能够表示为 x 的函数 f(x)

$$f(x)=3S_\diamond-6S_\triangle-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+4x^2}-3x-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

显然，使表面积增加量 f(x) 达最小值的 x，便是最经济蜂房所要求的。让我们介绍一种，由南京师大附中学生发现的，求 f(x) 的最小值的方法：

设 $y=f(x)+\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ y+3x=\frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+4x^2}$

两边平方并加以整理得：

$$x^2-(\frac{y}{3})x+(\frac{3}{8}-\frac{y^2}{18})=0$$

由于 x 必须为实数，从而上述二次方程的判别式

$$\triangle=\frac{y^2}{9}-4\times(\frac{3}{8}-\frac{y^2}{18})\geq 0$$

$$\therefore \frac{y^2}{3}-\frac{3}{2}\geq 0$$

$$\because y>0$$

$$\therefore y_{min}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

将上述 y 的最小值代入求 x 得

$$x=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

所以菱形的边长为$\frac{3\sqrt{2}}{4}$，根据三角函数定义可以算出菱形的钝角 α 和锐角 β：

$$\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{3}=0.8165$$

查反正弦函数表可得：

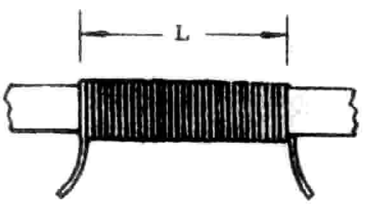
$$\frac{\alpha}{2}=54°44'$$

$$\therefore \begin{cases}\alpha=109°28' \\ \beta=70°32'\end{cases}$$

最小二乘法

下面是一道有趣的开发智力的思考题。

给你一本书，你能否仅用一般的刻度尺，测出一张纸的厚度吗？答案是肯定的！我想聪明的读者都已猜出了：只需量出全书的厚度（假如书很薄，可以把同样的书叠它几本！），然后除以全书纸的总张数，即得每张纸的厚度。



上述方法可以用在类似的场合。比如，为了测出细漆包线的直径大小，可以采取绕线的办法，在一根铅笔上，紧密地绕上 n 圈，如图测量出这 n 圈漆包线在铅笔上所占位置的长 L，则该漆包线的直径 d，显然应满足

$$dn=L$$

$$d\approx\frac{L}{n}$$

然而，尽管很多人都明白应该这样去做，但并不是所有的人都知道其中的科学道理。假定某本书共 1128 页(除封页)，测得厚 60mm，各页的厚度(单位 mm)为：

$$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_{1128}$$

可得出：

$$\sum_{i=1}^{1128} a_i = a_1 + a_2 + \cdots\cdots a_{1128} = 60$$

而一张纸的厚度 0.0532(mm)，就是这 1128 个数的平均值。

现在要证明的是：对于量 x 的 n 个观测值 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$，它们的平均值

$$\frac{\sum_{a_i}}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n}{n}$$

是所要测定的量 x 的最佳取值。式中求和符号表示从 1 累加到 n。

实际上，最理想的取值 x，应当让它与 n 个观察值的差的总和为最小。但考虑到差$(x-a_i)(i=1,2,\cdots\cdots,n)$或许有正有负，假如直接地把它们相加，势必会使某些差的值相抵消，影响了偏离的真实性，这明显是不合理的。于是，人们想到了用$(x-a_i)^2$ 来取代相应的差。这样，最理想的取值 x 应当使函数

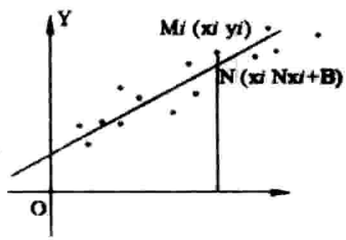
$$\begin{aligned} y &= (x-a_i)^2 + (x-a_2)^2 + \cdots\cdots + (x-a_n)^2 \\ &= nx^2 - 2(\sum a_i)x + \sum_{a_i}{}^2 \end{aligned}$$

取极小值。这是关于 x 的二次函数，易知当

$$x = \frac{\sum_{a_i}}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n}{n}$$

时 y 取极小。这就是为什么平均值能够看成是观测量最理想取值的道理。

同样的原理可以用于二维的情形，只是计算要略为繁琐一些，我们将要得到的结果，在数学上十分有名，叫做最小二乘法。它是德国数学家高斯，在公元 1795 年创立的，那时他年仅 18 岁！



现在假设我们观察到 n 个经验点：

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$

如果我们认定这 n 个经验点 $M_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是对直线 $y=A_x+B$ 上的点在观测时的误差。那么，这些经验点 $M_i(x_i, y_i)$与直线上相应点 $N(x_i, A_i+B)$之间的以下量

$$y = \frac{2}{\sum M_i N_i} = \sum[y_i - (Ax_i + B)]^2$$

应当取极小值。“最小二乘法”的名称，大概就是由此而来！

函数 y 明显可以写成 A 的二次函数

$$y = (\sum x_i^2)A^2 - 2[\sum x_i(y_i - B)]A + \sum(y_i - B)^2$$

从而当 $$A = \frac{(\sum x_i y_i) - B(\sum x_i)}{(\sum x_i^2)}$$

时取极小值。整理得：