线性代数

学习指导

Xianxing Daishu Xuexi Zhidao

上海理工大学应用数学教研室 编

科学出版社

线性代数学习指导

上海理工大学应用数学教研室　编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是高等学校非数学专业线性代数课程的教辅书，是根据教育部数学与统计学教学指导委员会《工科类本科数学基础课程教学基本要求》编写的．全书共分7章，每章由基本要求、内容提要、重点与难点分析和典型题解4部分组成，在典型题解中给出了教材中大部分习题的详细解答．本书另附4套模拟试题和2010～2013年全国硕士研究生入学统一考试的线性代数试题，并给出详细解答，供同学复习、提高使用．

本书与《线性代数》教材（科学出版社，刘锡平等主编）配套使用，可作为学习线性代数的辅导书，也可作为教师的教学参考用书．

图书在版编目（CIP）数据

线性代数学习指导/上海理工大学应用数学教研室编．--北京：科学出版社，2014.2

ISBN 978-7-03-039582-5

Ⅰ．①线…　Ⅱ．①上…　Ⅲ．①线性代数－高等学校－教学参考资料　Ⅳ．①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第011946号

责任编辑：谭宏宇　孙翠勤
责任印制：刘　学／封面设计：殷　靓

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http：//www.sciencep.com
江苏省句容市排印厂印刷
上海蓝鹰文化传播有限公司排版制作
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2014年2月第　一　版　开本：B5（720×1000）
2014年2月第一次印刷　印张：8
字数：149 000
定价：23.00元

《线性代数学习指导》编辑委员会

前　言

线性代数是高等学校理、工、经、管各专业的重要基础课，也是硕士研究生入学统一考试的重要内容. 它的理论和方法在工程技术、科学研究以及经济管理中有着广泛的应用. 为帮助读者更好地学习线性代数，我们编写了这本学习指导书.

本书是编者在总结多年教学实践经验的基础上，根据教育部数学与统计学教学指导委员会《工科类本科数学基础课程教学基本要求》编写的，本书与教材《线性代数》（科学出版社，刘锡平主编）配套使用，内容编排顺序与教材一致. 每章包括以下四部分内容：

基本要求：给出教学大纲对本章各知识点的具体要求.

内容提要：对本章涉及的主要知识点进行梳理，使学习内容系统化.

重点与难点分析：解析本章学习的重点与难点.

典型题解：选取教材中各章的大部分习题及书外一些典型题目，按知识点和方法分类作出详细解答，并对具有代表性的题解给出评注.

本书另附 4 套模拟试题和 2010 ~ 2013 年全国硕士研究生入学统一考试的线性代数试题，并给出详细解答，方便读者自我检验和自学提高使用.

本书第 1 至 7 章分别由樊亚莉、艾克凤、李洪波、张海强、何常香、雍燕、魏连鑫编写，模拟试题和研究生入学考试试题部分由吴宝丰编写，全书由魏连鑫统稿，刘锡平教授通读了全文，并多次提出宝贵的修改意见. 应用数学教研室及数学系的教师给予了大力支持.

在编写过程中，上海理工大学理学院和教务部门给予了大力帮助. 本书的出版得到了科学出版社的大力支持，在此向关心、支持、帮助本书编写与出版的广大师生表示衷心的感谢.

由于作者水平有限，书中难免出现疏漏和不足之处，恳请广大读者和同行批评指正.

编　者

2013 年 9 月

目　录

第1章　行　列　式

一、基 本 要 求

1. 了解行列式的概念，掌握二阶、三阶行列式的对角线法则；
2. 掌握行列式的性质，会应用行列式的性质计算行列式；
3. 掌握行列式的展开式，会应用行列式的展开式计算行列式；
4. 掌握克拉默法则，会用克拉默法则解线性方程组.

二、内 容 提 要

1. 基本概念

1）排列的逆序数，排列的奇偶性.

2）二阶、三阶行列式，n 阶行列式，行列式的转置.

3）行列式的余子式、代数余子式.

2. 基本理论

1）对换排列中的任意两个数，则排列的奇偶性发生改变.

2）n 阶行列式的定义：

$$\det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

其中 t 为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

3）行列式的性质：

（1）行列式与其转置行列式相等，即 $D = D^{\mathrm{T}}$；

（2）互换行列式的两行(列)，行列式变号；

（3）行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式；

（4）行列式中如果有两行(列)元素成比例，则此行列式为零；

（5）行列式按行(列)具有可加性；

（6）把行列式的某一行(列)的各个元素乘以同一数加到另一行(列)对应的

元素上去，行列式的值不变.

4）展开定理及其推论：对 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$，A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式，则有

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i\neq j, \end{cases} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i\neq j, \end{cases}$$

$$i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

5）克拉默(Cramer)法则

若 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$ 的系数行列式 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

那么线性方程组有唯一解，并且解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中 D_j 是把行列式 D 中第 j 列换成常数项 b_1，b_2，$\cdots$，b_n 所成的行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

三、重点与难点分析

本章的重点是二、三阶行列式的计算，行列式的性质及按行(列)展开.

本章的难点是行列式的定义及 n 阶行列式的计算.

行列式是线性代数课程的基本内容，应理解行列式的概念，行列式本质是一个数，它是将一个表达式用一个具有某种规律的、简单的记号来表示. 对于低阶行列式(如二、三阶)可以使用对角线法则或定义计算，对于高阶行列式，对角线法则将不再适用，通常是利用行列式的性质化为特殊行列式(如三角或对角行列式)或利用按行(列)展开对其降阶进行计算. 行列式的定义是本章的一个难点，对于行列式的概念要理解，对于用排列的逆序数给出的行列式的定义只要清楚就可以了，不必死记硬背.

四、典型题解

题型1 运用对角线法则计算二阶、三阶行列式.

例1 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 9 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}=(a+b)^2-(a-b)^2=4ab.$

(2) $\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}=\cos^2\varphi-(-\sin^2\varphi)=1.$

(3) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 9 \end{vmatrix}=1\times1\times9+0\times2\times2+1\times1\times(-1)-1\times1\times2-0\times1\times9$$
$$-1\times2\times(-1)=8.$$

(4) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=1\times1\times1+2\times2\times2+2\times2\times2-2\times1\times2-2\times2\times1-1\times2\times2$$
$$=5.$$

评注： 运用对角线法则计算时，需注意各项的符号.

题型2 计算逆序数以及利用行列式定义计算行列式中的项.

例2 按自然数从小到大的顺序为标准次序，确定下列各排列的逆序数：

(1) 2 4 1 3；

(2) 1 3 ⋯ $2n-1$ 2 4 ⋯ $2n$；

(3) 2 4 ⋯ $2n$ 1 3 ⋯ $2n-1$.

解 (1) 排列 2 4 1 3 的逆序数为 $t=0+0+2+1=3$；

(2) 排列 1 3 ⋯ $2n-1$ 2 4 ⋯ $2n$ 的逆序数为 $t=n-1+n-2+\cdots+0=\dfrac{n(n-1)}{2}$；

(3) 排列 2 4 ⋯ $2n$ 1 3 ⋯ $2n-1$ 的逆序数为 $t=n+n-1+\cdots+1=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

例3 写出五阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{32}a_{53}$ 的项.

解 五阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{32}a_{53}$ 的项为 $(-1)^{t}a_{11}a_{25}a_{32}a_{44}a_{53}$ 和 $(-1)^{t'}a_{11}a_{24}a_{32}a_{45}a_{53}$，而 1 5 2 4 3 的逆序数为 $t=0+0+1+1+2=4$，1 4 2 5 3 的逆序数为 $t'=0+0+1+0+2=3$，所以五阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{32}a_{53}$ 的项为 $a_{11}a_{25}a_{32}\cdot a_{44}a_{53}$ 和 $-a_{11}a_{24}a_{32}a_{45}a_{53}$.

例 4 写出多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}2&1&0&1\\1&x&-1&x\\0&4&1&x^2\\1&8&-5&x^3\end{vmatrix}$ 中 x^4 的系数.

解 根据行列式的定义，包含 x^4 的项必须包含 $a_{22}=x$ 和 $a_{44}=x^3$ 这两项，因此有 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 和 $-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$，而 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=2x^4$，$-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}=0$，所以 x^4 的系数为 2.

题型 3 化行列式为三角形式进行计算.

例 5 证明下列等式：

（1）上三角行列式 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；

（2）$\begin{vmatrix}&&&a_{1n}\\&&a_{2,n-1}&a_{2n}\\&\begin{matrix}\cdot\\&\cdot\\&&\cdot\end{matrix}&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn-1}&a_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

解 （1）由 n 阶行列式定义，$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&a_{nn}\end{vmatrix}=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{t}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，

在行列式中第 n 行的元素除去 a_{nn} 以外全是零，所以只要考虑 $j_n=n$ 的情况．在第 $n-1$ 行中，除去 $a_{n-1,n-1}$，$a_{n-1,n}$ 外，其余的项全是零，故 j_{n-1} 只有 $n-1$，n 这两种可能．由于 $j_n=n$，所以 j_{n-1} 就不可能等于 n 了，从而 $j_{n-1}=n-1$，这样一步步推上去，可以看出，在展开式中，除去 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项外，其余项全是 0. 而这一项的逆序数 t 为 0，所以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地，主对角线行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

(2) 证明类似(1)，需要注意的是 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 这一项的逆序数 $t=\frac{n(n-1)}{2}$，因此结果是 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

例6 计算下列各行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ c_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$（其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$）；

(4) 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\,3,\,4]{c_1+c_i} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_i-r_1 \\ i=2,\,3,\,4}]{c_1\times\frac{1}{10}} 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_4+r_2]{r_3+2r_2} 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -160.$$

评注：该题也可以直接利用行列式的性质 6 来化为三角形行列式.

(2) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\ 3,\ 4]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

评注：一般，除对角线元素外，其余元素都相等(不等于 0)的行列式，都可以利用和本题类似的方法.

(3) 用第一列分别减去第 i 列的 $\frac{c_i}{a_i}$($i=2, 3, 4, \cdots, n$)倍，有

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ c_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - \sum\limits_{i=2}^{n} c_i \frac{b_i}{a_i} & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \left(a_1 - \sum_{i=2}^{n} c_i \frac{b_i}{a_i}\right) a_2 a_3 \cdots a_n.$$

评注：此行列式称为箭形(爪形)行列式.

(4) $$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\ 3,\ \cdots,\ n]{c_1+c_i} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\,3,\,\cdots,\,n]{r_i-r_1}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1 & b & b & \cdots & b\\0 & a-b & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & a-b & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & a-b\end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

评注：本题的方法适用于各行(列)元素之和相等的情况.

题型4 运用行列式性质和展开定理计算行列式.

例7 (1) $\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\-1 & -1 & 2 & 1\\1 & 2 & -2 & 2\\1 & 0 & 2 & 2\end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & 1\\1 & 2 & -1 & 0 & 2\\2 & 2 & 4 & 6 & 1\\2 & 3 & 1 & 3 & 3\\1 & 0 & 2 & 2 & 1\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix}-ab & ac & ae\\bd & -cd & de\\bf & cf & -ef\end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & 0 & a_{14}\\0 & a_{22} & a_{23} & 0\\0 & a_{32} & a_{33} & 0\\a_{41} & 0 & 0 & a_{44}\end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1 & 1\\1 & 1-x & 1 & 1\\1 & 1 & 1+y & 1\\1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix}a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2\\b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2\\c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2\\d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2\end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\-1 & -1 & 2 & 1\\1 & 2 & -2 & 2\\1 & 0 & 2 & 2\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1,\ r_4-r_1]{r_2+r_1}\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\0 & 0 & 1 & 2\\0 & 1 & -1 & 1\\0 & -1 & 3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\1 & -1 & 1\\-1 & 3 & 1\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_3+r_2}\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\1 & -1 & 1\\0 & 2 & 2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 2\end{vmatrix}=2.$$

(2) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & 1\\1 & 2 & -1 & 0 & 2\\2 & 2 & 4 & 6 & 1\\2 & 3 & 1 & 3 & 3\\1 & 0 & 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & 1\\0 & 1 & -3 & -3 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & -1\\0 & 1 & -3 & -3 & 1\\0 & -1 & 0 & -1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -3 & -3 & 1\\0 & 0 & 0 & -1\\1 & -3 & -3 & 1\\-1 & 0 & -1 & 0\end{vmatrix}=0.$

(3) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} = adf\begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix} = adf\begin{vmatrix} -b & c & e \\ 0 & 0 & 2e \\ 0 & 2c & 0 \end{vmatrix}$

$$= -2adfe\begin{vmatrix} -b & c \\ 0 & 2c \end{vmatrix} = 4abcdef.$$

(4) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$

$$+(-1)^{4+1}a_{41}\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}.$$

评注：此题也有另外一种做法，可以通过对调两行或两列的方法，把行列式变成分块行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 \leftrightarrow r_2]{r_4 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3 \leftrightarrow c_2]{c_4 \leftrightarrow c_3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{44} - a_{14}a_{41})(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}).$$

(5) 原式 $\xlongequal[r_3 - r_4]{r_1 - r_2} \begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & y & y \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \xlongequal[c_4 - c_3]{c_2 - c_1} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -y \end{vmatrix}$

$$= x\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & -y \end{vmatrix} = x^2y^2.$$

(6) 原式 $\xlongequal[\substack{c_3 - c_2 \\ c_2 - c_1}]{c_4 - c_3} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3 - c_2]{c_4 - c_3} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

例 8 若三阶行列式$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 2b_1-a_1 & 2b_2-a_2 & 2b_3-a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=6$，求三阶行列式$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

解 $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 2b_1-a_1 & 2b_2-a_2 & 2b_3-a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 6.$$

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=3.$$

例 9 **证明** （1）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & a+b & 2b \\ a^2 & ab & b^2 \end{vmatrix}=(b-a)^3$；

（2）$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$.

证明 （1）$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & a+b & 2b \\ a^2 & ab & b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & 2b-2a \\ 0 & ab-a^2 & b^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & 2b-2a \\ ab-a^2 & b^2-a^2 \end{vmatrix}$$
$$=(b-a)(b^2-a^2)-(ab-a^2)(2b-2a)$$
$$=(b-a)^2(b+a)-2a(b-a)^2=(b-a)^3.$$

（2）反复利用行列式的可加性，有

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} ax & ay & az \\ ay & az & ax \\ az & ax & ay \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ax & ay & bx \\ ay & az & by \\ az & ax & bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ax & bz & az \\ ay & bx & ax \\ az & by & ay \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ax & bz & bx \\ ay & bx & by \\ az & by & bz \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} by & ay & az \\ bz & az & ax \\ bx & ax & ay \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & ay & bx \\ bz & az & by \\ bx & ax & bz \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & bz & az \\ bz & bx & ax \\ bx & by & ay \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & bz & bx \\ bz & bx & by \\ bx & by & bz \end{vmatrix}.$$

上式右边八项中，除了第一项和第八项，其余三阶行列式都有两列对应成比例，因此，

$$原式=\begin{vmatrix} ax & ay & az \\ ay & az & ax \\ az & ax & ay \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & bz & bx \\ bz & bx & by \\ bx & by & bz \end{vmatrix}=a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}+b^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$

例 10 解方程 $\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-11$，求 x.

解 $\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal[i=2,\ 3,\ 4]{c_1-c_ix}\begin{vmatrix} 1-3x^2 & x & x & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1-3x^2=-11\Rightarrow x=\pm 2.$

评注：此题利用箭形行列式的特点来计算.

例 11 计算下列 n 阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$.

解 (1) 原式 $=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m\right)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m\right)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m\right)(-m)^{n-1}.$$

评注：该行列式各行元素之和相等，做法类似于例6第4小题.

(2) 原行列式先是从第2行到第n行都减去第1行，然后按照第2列展开，有

$$原式=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$=(-2)(n-2)!,\quad n\geqslant 2.$

(3) 各列加到第一列，再按照第一列展开，有

$$原式=\begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\frac{1}{2}(n+1)!.$$

题型5 运用数学归纳法及递推关系计算行列式.

例12 用数学归纳法证明 $D_n=\begin{vmatrix} \cos\varphi & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\varphi & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\varphi & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\varphi & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\varphi \end{vmatrix}=\cos n\varphi.$

证明 对二阶行列式，有