

组合泛函方程论

Theory of Combinatorial Functional Equations



刘彦佩 著

中国科学技术大学出版社

当代科学技术基础理论与前沿问题研

中国科学技术大学
校友文库

组合泛函方程论

Theory of Combinatorial Functional Equations

刘彦佩 著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书旨在为组合泛函方程建立一种普遍的定性理论, 求出解的正项和表示. 内容包括差分方程、常微分方程、偏微分方程以及居中心地位的介子泛函方程. 之所以冠以“组合”一词, 是因为它们全是本书作者在研究组合地图的各种分类计数中发现或由其他方程演化而来的. 借此, 本书试图引起人们在将来的工作中对这些方程的注意.

本书适合于大学数学专业、计算机专业、工程专业高年级本科生、研究生使用, 同时也适于高中数学教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

组合泛函方程论/刘彦佩著. —合肥: 中国科学技术大学出版社, 2015. 1
(当代科学技术基础理论与前沿问题研究丛书; 中国科学技术大学校友文库)
“十二五”国家重点图书出版规划项目
ISBN 978-7-312-03534-0

I. 组… II. 刘… III. 泛函方程—研究 IV. O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 284623 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号, 230026
<http://press.ustc.edu.cn>
印刷 合肥市宏基印刷有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 710 mm×1000 mm 1/16
印张 29
字数 560 千
版次 2015 年 1 月第 1 版
印次 2015 年 1 月第 1 次印刷
定价 88.00 元

总 序

大学最重要的功能是向社会输送人才，培养高质量人才是高等教育发展的核心任务。大学对于一个国家、民族乃至世界的重要性和贡献度，很大程度上是通过毕业生在社会各领域所取得的成就来体现的。

中国科学技术大学建校只有短短的五十余年，之所以迅速成为享有较高国际声誉的著名大学，主要就是因为她培养出了一大批德才兼备的优秀毕业生。他们志向高远、基础扎实、综合素质高、创新能力强，在国内外科技、经济、教育等领域做出了杰出的贡献，为中国科大赢得了“科技英才的摇篮”的美誉。

2008年9月，胡锦涛总书记为中国科大建校五十周年发来贺信，对我校办学成绩赞誉有加，明确指出：半个世纪以来，中国科学技术大学依托中国科学院，按照全院办校、所系结合的方针，弘扬红专并进、理实交融的校风，努力推进教学和科研工作的改革创新，为党和国家培养了一大批科技人才，取得了一系列具有世界先进水平的原创性科技成果，为推动我国科教事业发展和社会主义现代化建设做出了重要贡献。

为反映中国科大五十年来的人才培养成果，展示我校毕业生在科技前沿的研究中所取得的最新进展，学校在建校五十周年之际，决定编辑出版《中国科学技术大学校友文库》50种。选题及书稿经过多轮严格的评审和论证，入选书稿学术水平高，被列入“十一五”国家重点图书出版规划。

入选作者中，有北京初创时期的第一代学生，也有意气风发的少年班毕业生；有“两院”院士，也有中组部“千人计划”引进人才；有海内外科研院所、大专院校的教授，也有金融、IT行业的英才；有默默奉献、矢志报国的科技将军，也有在国际前沿奋力拼搏的科研将才；有“文革”后留美学者中第一位担任美国大学系主任的青年教授，也有首批获得新中国博士学位的中年学者……在母校五十周年华诞之际，他们通过著书立说的独特方式，向母校献礼，其深情厚谊，令

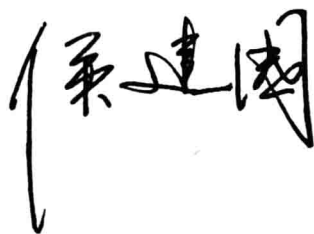
人感佩!

《文库》于 2008 年 9 月纪念建校五十周年之际陆续出版, 现已出书 53 部, 在学术界产生了很好的反响. 其中, 《北京谱仪 II: 正负电子物理》获得中国出版政府奖; 中国物理学会每年面向海内外遴选 10 部“值得推荐的物理学新书”, 2009 年和 2010 年, 《文库》先后有 3 部专著入选; 新闻出版总署总结“‘十一五’国家重点图书出版规划”科技类出版成果时, 重点表彰了《文库》的 2 部著作; 新华书店总店《新华书目报》也以一本书一个整版的篇幅, 多期访谈《文库》作者. 此外, 尚有十数种图书分别获得中国大学出版社协会、安徽省人民政府、华东地区大学出版社研究会等政府和行业协会的奖励.

这套发端于五十周年校庆之际的文库, 能在两年的时间内形成现在的规模, 并取得这样的成绩, 凝聚了广大校友的智慧和母校的感情. 学校决定, 将《中国科学技术大学校友文库》作为广大校友集中发表创新成果的平台, 长期出版. 此外, 国家新闻出版总署已将该选题继续列为“十二五”国家重点图书出版规划, 希望出版社认真做好编辑出版工作, 打造我国高水平科技著作的品牌.

成绩属于过去, 辉煌仍待新创. 中国科大的创办与发展, 首要目标就是围绕国家战略需求, 培养造就世界一流科学家和科技领军人才. 五十年来, 我们一直遵循这一目标定位, 积极探索科教紧密结合、培养创新拔尖人才的成功之路, 取得了令人瞩目的成就, 也受到社会各界的肯定. 在未来的发展中, 我们依然要牢牢把握“育人是大学第一要务”的宗旨, 在坚守优良传统的基础上, 不断改革创新, 进一步提高教育教学质量, 努力践行严济慈老校长提出的“创寰宇学府, 育天下英才”的使命.

是为序.



中国科学技术大学校长
中国科学院院士
第三世界科学院院士
2010 年 12 月

序

本书旨在专门讨论组合泛函方程, 内容包括差分方程、常微分方程、偏微分方程以及介子泛函方程. 之所以冠以“组合”一词, 是因为它们都在组合学中有意义. 事实上, 它们全是本书作者近 30 年来在各种地图同构分类的计数中发现或由其他方程演化而来的. 考虑到普遍性, 本书试图引起人们在将来的工作中对这些方程的注意.

这部专著分三个重要阶段.

第一阶段是在 Tutte 平面根三角剖分的计数过程中, 解二次函数方程重根法的基础上, 发现非二次函数方程采用特征曲线的解法 (重根法, 或二次法, 可视为特例). 同时将参数方程转化为差分方程和微分方程.

这一阶段有两个主要任务.

任务 1: 发现尽可能多的具有相当普遍性的地图类. 通过对每类地图进行合适的分解, 可以对于适合的参数, 导出在任何给定参数下, 这类地图根同构类数的计数函数所满足的方程.

这里, 有两个关键点.

一个是选择适合的计数参数, 因为如果选择不当, 就会难以找到合适的分解.

另一个是找到合适的分解, 因为即使找到了一个分解, 如不合适也是枉然. 在这个过程中, 所建立起来的各种类型的无限集合的分解理论, 也为下两个阶段建立更具普遍性的方程奠定了理论根基.

任务 2: 求出这个满足给定方程的所需要的解. 这些方程的未定元一般至少是两个变元的函数, 同时还带至少一个由这个未定元决定的, 但少一个变元的函数, 我们称之为侧函数, 由此导致直接求解困难.

如果能首先将侧函数求出来, 那么原方程在原则上可以直接求解.

为了确定侧函数, 先要选择一个或几个参数, 通过特征曲线或曲面建立一个至少减少一个变元的方程组, 设法用 Lagrange 隐函数定理 (或 Lagrange 反演),

求出这些侧函数. 将原方程变为通常的多变量函数方程. 如果方程是二次的, 这样的一类消元法就是 Tutte 在研究平面三角化时所说的二次法.

这里, 也有两个关键点.

一个是如何对方程选择参数. 这种参数必将决定所得的方程组是否相容, 以及求解这个方程组能否回避可能产生的复杂性.

另一个就是如何变换这些参数, 使得反演出的结果有利于进一步地尽量简化到正项和, 甚至单项 (即无和) 显式.

本书的第 3 章至第 7 章中所出现的方程, 多可采用这种消元法求解. 这里, 完全没有必要如此, 而只需在扩张整域中进行运算就够了. 在第 1 章中, 之所以提到 Lagrange 反演, 是因为这些方程在应用实例中屡见不鲜.

下面的两个阶段都是讨论从无穷计数参数演化来的方程, 称为介子泛函方程, 或者简称介子方程.

关于介子泛函, 第 2 章仅就与求解有关的方面提供本书所需要的一个预备理论基础.

第二阶段是关于平面型介子方程的发现, 用无穷维的矩阵分析和 Lagrange 反演求解其中的一些方程.

在第 8 章中, 所讨论的都是外面型介子泛函方程, 建立了其适定性理论, 求出了其解的正项和递推形式. 这类方程都是在研究非外平面的平面地图的计数根同构类数时发现的. 由线性性, 还可以用无穷维的矩阵分析和 Lagrange 反演, 求它们解的正项和或单项显式.

在第 9 章中, 所讨论的都是内面型介子泛函方程, 建立了其适定性理论, 求出了解的正项和递推形式. 因为这类方程全是在研究非外平面的平面地图的计数根同构类数时发现或衍生出来的, 根据适定性, 它们的解也可以从相应的计数得到. 由非线性性, 至今无论从这个递推形式, 还是从相应的计数中, 都未发现直接显式. 虽然给定地图基图上的所有劈对以及每一对的重数, 然后通过自伴同构群的阶, 由根地图计数的结果就可以直接得到一个无和显式, 不过, 这个式子的表达似会过于复杂.

第三阶段是曲面型介子方程的发现, 以及通过计数理论导出其中一些方程解的显式, 为直接求解提供了明确的目标. 这些都围绕地图的计数.

在第 10 章中, 所讨论的都是曲面型介子泛函方程, 建立了它们的适定性理论, 求出了解的正项和递推形式.

这些方程全是在研究曲面上地图的计数根同构类数时发现或衍生出来的. 根据适定性, 它们的解也可以从相应的计数得到.

对于这些方程, 在这本书中, 都求出了其解的正项和递推形式. 但从这些递推

形式出发, 还没有导出直接显式. 不过, 从相应的地图计数, 通过地图基图的自伴同构群的阶, 都已经得到了解的无和显式.

虽然本书的主要内容完全不依赖地图计数, 但根据这里提供的理论, 地图计数确可以视为一个应用实例. 这就是为什么几乎每一节之后都列举出一些地图的缘由. 以备必要时验证相关理论的结果.

本书中的新结果都得到过国家自然科学基金 (批准号: 11201024;11371052) 的部分资助. 尤其感谢北京交通大学理学院数学系对本书的完成所给予的支持和帮助.

刘彦佩

于北京稻田村

2014 年 9 月

编 委 会

顾 问 吴文俊 王志珍 谷超豪 朱清时

主 编 侯建国

编 委 (以姓氏笔画为序)

王 水 史济怀 叶向东 朱长飞

伍小平 刘 兢 刘有成 何多慧

吴 奇 张家铝 张裕恒 李曙光

杜善义 杨培东 辛厚文 陈 颢

陈 霖 陈初升 陈国良 陈晓剑

郑永飞 周又元 林 间 范维澄

侯建国 俞书勤 俞昌旋 姚 新

施蕴渝 胡友秋 骆利群 徐克尊

徐冠水 徐善驾 翁征宇 郭光灿

钱逸泰 龚惠兴 童秉纲 舒其望

韩肇元 窦贤康 潘建伟

“十一五”国家重点图书

中国科学技术大学校友文库

第一辑书目

- ◎ *Topological Theory on Graphs*(英文) 刘彦佩
- ◎ *Advances in Mathematics and Its Applications*(英文) 李岩岩、舒其望、沙际平、左康
- ◎ *Spectral Theory of Large Dimensional Random Matrices and Its Applications to Wireless Communications and Finance Statistics*(英文) 白志东、方兆本、梁应昶
- ◎ *Frontiers of Biostatistics and Bioinformatics*(英文) 马双鸽、王跃东
- ◎ *Spectroscopic Properties of Rare Earth Complex Doped in Various Artificial Polymer Structure*(英文) 张其锦
- ◎ *Functional Nanomaterials: A Chemistry and Engineering Perspective*(英文) 陈少伟、林文斌
- ◎ *One-Dimensional Nanostructures: Concepts, Applications and Perspectives*(英文) 周勇
- ◎ *Colloids, Drops and Cells*(英文) 成正东
- ◎ *Computational Intelligence and Its Applications*(英文) 姚新、李学龙、陶大程
- ◎ *Video Technology*(英文) 李卫平、李世鹏、王纯
- ◎ *Advances in Control Systems Theory and Applications*(英文) 陶钢、孙静
- ◎ *Artificial Kidney: Fundamentals, Research Approaches and Advances*(英文) 高大勇、黄忠平
- ◎ *Micro-Scale Plasticity Mechanics*(英文) 陈少华、王自强
- ◎ *Vision Science*(英文) 吕忠林、周逸峰、何生、何子江
- ◎ 非同余数和秩零椭圆曲线 冯克勤
- ◎ 代数无关性引论 朱尧辰
- ◎ 非传统区域 Fourier 变换与正交多项式 孙家昶
- ◎ 消息认证码 裴定一

- ◎完全映射及其密码学应用 吕述望、范修斌、王昭顺、徐结绿、张剑
- ◎摄动马尔可夫决策与哈密尔顿圈 刘克
- ◎近代微分几何：谱理论与等谱问题、曲率与拓扑不变量 徐森林、薛春华、胡自胜、金亚东
- ◎回旋加速器理论与设计 唐靖宇、魏宝文
- ◎北京谱仪Ⅱ·正负电子物理 郑志鹏、李卫国
- ◎从核弹到核电——核能中国 王喜元
- ◎核色动力学导论 何汉新
- ◎基于半导体量子点的量子计算与量子信息 王取泉、程木田、刘绍鼎、王霞、周慧君
- ◎高功率光纤激光器及应用 楼祺洪
- ◎二维状态下的聚合——单分子膜和LB膜的聚合 何平笙
- ◎现代科学中的化学键能及其广泛应用 罗渝然、郭庆祥、俞书勤、张先满
- ◎稀散金属 翟秀静、周亚光
- ◎SOI——纳米技术时代的高端硅基材料 林成鲁
- ◎稻田生态系统 CH_4 和 N_2O 排放 蔡祖聪、徐华、马静
- ◎松属松脂特征与化学分类 宋湛谦
- ◎计算电磁学要论 盛新庆
- ◎认知科学 史忠植
- ◎笔式用户界面 戴国忠、田丰
- ◎机器学习理论及应用 李凡长、钱旭培、谢琳、何书萍
- ◎自然语言处理的形式模型 冯志伟
- ◎计算机仿真 何江华
- ◎中国铅同位素考古 金正耀
- ◎辛数学·精细积分·随机振动及应用 林家浩、钟万勰
- ◎工程爆破安全 顾毅成、史雅语、金骥良
- ◎金属材料寿命的演变过程 吴犀甲
- ◎计算结构动力学 邱吉宝、向树红、张正平
- ◎太阳能热利用 何梓年
- ◎静力水准系统的最新发展及应用 何晓业
- ◎电子自旋共振技术在生物和医学中的应用 赵保路
- ◎地球电磁现象物理学 徐文耀
- ◎岩石物理学 陈颢、黄庭芳、刘恩儒
- ◎岩石断裂力学导论 李世愚、和泰名、尹祥础
- ◎大气科学若干前沿研究 李崇银、高登义、陈月娟、方宗义、陈嘉滨、雷孝恩

目 次

总序	i
序	iii
绪论	1
第 1 章 基本知识	8
1.1 集合与映射	8
1.2 函数与变换	12
1.3 级数与整域扩张	17
1.4 函数方程	20
1.5 Lagrange 反演	27
1.6 注记	34
第 2 章 介子泛函	36
2.1 基本概念	36
2.2 移位	38
2.3 截段	40
2.4 投影	41
2.5 卷积	43
2.6 微分与积分	45
2.7 差分	49
2.8 注记	51
第 3 章 一元函数方程	53
3.1 变首型	53
3.2 变尾型	58
3.3 多变型	62
3.4 三角化型	68

3.5 四角化型	74
3.6 普通型	77
3.7 注记	81
第 4 章 多元函数方程	83
4.1 消减变量	83
4.2 一次形式	88
4.3 二次形式	95
4.4 高次形式	99
4.5 注记	108
第 5 章 差分函数方程	110
5.1 单变直差式	110
5.2 多变直差式	115
5.3 单变斜差式	118
5.4 多变斜差式	125
5.5 直斜混合式	133
5.6 注记	138
第 6 章 常微分方程	141
6.1 参数方程	141
6.2 瓣丛和	149
6.3 可定向和	155
6.4 不可定向和	159
6.5 普通总和	164
6.6 球面三角化四色和	166
6.7 注记	170
第 7 章 偏微分方程	171
7.1 球面四角化	171
7.2 射影面四角化	180
7.3 环面四角化	187
7.4 Klein 瓶四角化	191
7.5 曲面无环型	198
7.6 曲面无端型	202
7.7 曲面 Euler 型	206
7.8 注记	209

第 8 章 外面型介子方程	211
8.1 植树型	211
8.2 普树型	220
8.3 单圈型	227
8.4 超轮型	235
8.5 冬梅型	244
8.6 无裂外面型	255
8.7 受限外面型	262
8.8 普通外面型	270
8.9 注记	279
第 9 章 内面型介子方程	284
9.1 内面 Halin 型	284
9.2 普通内面型	292
9.3 无环内面型	303
9.4 无隔内面型	313
9.5 单内面型	327
9.6 内面 Euler 型	341
9.7 无隔 Euler 内面型	348
9.8 无环 Euler 内面型	358
9.9 单二部内面型	368
9.10 注记	376
第 10 章 曲面型介子方程	379
10.1 曲面限端型	379
10.2 曲面无桥型	389
10.3 曲面无环型	398
10.4 曲面 Euler 型	409
10.5 曲面普通型	418
10.6 注记	431
参考文献	437
索引	443

绪 论

若将函数都视为带一个或多个未定元的无穷级数, 其上的差分、微分、积分, 特别是介子运算, 均可视为线性泛函 (前三者都是从函数空间到它本身, 后者为由函数空间到向量空间). 这些方程都是带有泛函的方程. 自然, 函数本身也可视为在全同变换下的泛函.

仅以单个未定元为例, 函数 $f = f(x)$ 的形式为

$$f_x = \sum_{i \geq 0} a_i x^i, \quad (1)$$

其中 a_i ($i \geq 0$) 为与 x 无直接因果关系的函数 (常数为其一个特例). 记 $\mathcal{F}$ 为所有这种函数构成的空间. 本书所关心的差分有两种一般形式. 令 $\Delta u = z - x$. 第一类 (或称直差分) 是

$$\delta_{z,x} f|_{x=u} = \frac{f(z) - f(x)}{\Delta u} = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \in \mathcal{F}. \quad (2)$$

第二类 (或称斜差分) 是

$$\partial_{z,x} f|_{x=u} = \frac{xf(z) - zf(x)}{\Delta u} = \frac{xf(z) - zf(x)}{z - x} \in \mathcal{F}. \quad (3)$$

将介子泛函视为一个函数空间 $\mathcal{F} = \langle y^0 (= 1), y^1, y^2, \dots \rangle$ 到无穷维向量空间 $\mathcal{V} = \langle \mathbf{1}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots \rangle$ 的一类变换, 用 $\int_y$ 表示, 即

$$\int_y y^i = \begin{cases} \mathbf{y}_i, & i \geq 1, \\ \mathbf{1}, & i = 0, \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\mathbf{y}_i$ ($i \geq 0$) 为向量空间 $\mathcal{V}$ 的一组基 (或生成元).

介子泛函的前身可以看作 19 世纪 Blissard (J., 生卒年份不详) 曾用过的一种算子, 参见文献 [3]. 20 世纪, Rota (Gain-Carlo, 1932~1999) 曾用这个算子作

为函数空间本身两个坐标系之间的变换,称之为阴影,提供整数分拆数(或集合剖分数)的一个简洁表示,参见文献[91].随之,出现了一系列的代数研究.因为变换间的两空间不同,本书只能称我们的变换为介子(或介子泛函),以区别阴影(或阴影泛函).

虽然这些方程的解都有计数方面的意义,但本书所着眼的是如何从方程本身将其解提取出来.时至今日,在尚未能求解的方程中,尽管有些已经通过计数公式的变换可以给出解的形式,绝大部分仍然既未能通过计数公式的变换,也未能通过方程本身求出其解的形式.本书对正文中的方程,在同一个理论路线下,毫无例外地不仅给出了在更广的意义下的定性理论,而且提供了解的正项和表示,以便在此基础上进一步研究有效化,甚至智能化实现.

在前两章中,提供了有关基础方面的知识和介子泛函的概念,讨论了一些基本的代数性质.以下诸章均讨论各种类型泛函方程的定性理论与解的结构.

第3章选择普通多项式型一元函数方程,即

$$\begin{cases} a_0(x) + a_1(x)f + a_2(x)f^2 + \cdots + a_n(x)f^n = 0, \\ f(0) = a, \end{cases} \quad (5)$$

其中 $a \geq 0$ 为一个常数, $n \geq 1$, 讨论了它的6种类型.并讨论了它们在整域扩张 $\mathcal{R}\{x\}$ 上有且仅有一个解的条件,以及求这个解的一般方法.同时,也研究了一些具有特殊形式的此类方程更适用的也更行之有效的求解方法.

第4章选择多元函数方程的一般形式

$$\begin{cases} a_0(\mathbf{x}; \hat{f}) + a_1(\mathbf{x}; \hat{f})f + a_2(\mathbf{x}; \hat{f})f^2 + \cdots + a_n(\mathbf{x}; \hat{f})f^n = 0, \\ f(\mathbf{0}) = a, \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \cdots, x_{k-1})$ (自然, $\mathbf{0}$ 为 $x_0 = x_1 = \cdots = x_{k-1} = 0$ 的情形), $\hat{f} = f|_{(x_0 x_1 \cdots x_{k-1} = 0) \vee (x_0 = 1) \vee \cdots \vee (x_{k-1} = 0)}$ (也称为 f 的侧函数), $k \geq 2$, 讨论了它的3种类型.除在整域扩张 $\mathcal{R}\{x\}$ 上的定性讨论,以及导出解的正项和表示外,还顺便讨论这些方程借助特征曲线(实际上,也是一类消去法)的求解.这可以视为 $n = 2$ 时 Tutte(William Thomas, 1917~2002) 所用二次方法被拓广到更高次的情形.

第5章讨论了带有差分运算的多元函数方程,分为单变直差式、多变直差式、单变斜差式、多变斜差式和直斜混合式5种类型.虽然也可转化为单变元和多变元函数方程求解,但这里只用在扩张整域 $\mathcal{R}\{x, y\}$ 上的运算.

只要能确定方程式(6)中出现的所有侧函数,就能将方程式(6)转化为方程式(5).在第6章专门讨论了为确定这些侧函数而建立的常微分方程.除从方程式(6)所引出的常微分方程外,还有 Riccati 型常微分方程.例如文献[57](268页)

中,

$$\begin{cases} 2x^2 \frac{df}{dx} = -1 + (1-x)f - xf^2, \\ f_0 = f(0) = 1; \end{cases} \quad (7)$$

[62](213 页) 中,

$$\begin{cases} 4x^2 \frac{df}{dx} = -1 + (1-2x)f - xf^2, \\ f_0 = f(0) = 1; \end{cases} \quad (8)$$

以及 Tutte^[103] 在研究平面地图四色和时发现的方程:

$$\begin{cases} \frac{d^2 f}{dz^2} \left(2z + 5f - 3z \frac{df}{dz} \right) = 48z, \\ f|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=0} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

第 7 章讨论了带有偏微分运算的多元函数方程. 这些方程有两个来源: 一类源自曲面的四角化, 例如球面、柱面、环面、射影面和 Klein 瓶. 这是沿着一种新的思路发现的. 另一类源自各种地图在曲面上同构类的总和. 诸如

$$\begin{cases} axy \left(2y \frac{\partial f}{\partial y} - x \frac{\partial f}{\partial x} \right) = -1 + (1-xyh)f, \\ f|_{x=0, y=0} = 1, \end{cases} \quad (10)$$

其中 $h = f|_{x=1}$, $a \in \mathbb{R}_+$, $a \neq 0$. 当 $a = 1$ 和 $a = 2$ 时, 分别参见文献 [73](192 页) 和 [67](206 页). 又如方程

$$\begin{cases} ax^3y \frac{\partial f}{\partial x} = \left(1 - ax^2y + \frac{xy}{1-x} \right) f - \frac{x^2y}{1-x} h - xy - 1, \\ f|_{x=0, y=0} = 1, \end{cases} \quad (11)$$

其中 $h = f|_{x=1}$, $a \in \mathbb{R}_+$, $a \neq 0$, 以及方程

$$\begin{cases} 2ax^4y \frac{\partial f}{\partial x^2} = \left(1 - ax^2y + \frac{x^2y}{1-x^2} \right) f - \frac{x^2y}{1-x^2} h - 1, \\ f|_{x=0, y=0} = 1, \end{cases} \quad (12)$$

其中 $h = f|_{x=1}$, $a \in \mathbb{R}_+$, $a \neq 0$.

前面所讨论的都是有限变元的. 此后三章讨论的则全是无穷变元带有介子泛函的方程. 由于上面谈的有限情形都可视为在各种不同条件下的特例, 介子泛函方程在本书中占了近 2/3 的篇幅.