21世纪高等学校教材

曹振华 赵 平 胡跃清 编

概率论与数理统计

GAILULUN YU SHULI TONGJI

东南大学出版社

SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

概率论与数理统计

概率论与数理统计

曹振华
赵　平　编
胡跃清

东南大学出版社
·南京·

内 容 提 要

本书介绍随机数学的一些基本知识，总共12章，内容包括概率论、数理统计、随机过程三部分。每章附有习题，书末附有习题答案，可作为高等学校工学类、经管类本科专业的教材，也可供教师及工程技术人员、管理决策者参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/曹振华，赵平，胡跃清编．—南京：东南大学出版社，2001.10

ISBN 7-81050-820-2

Ⅰ.概… Ⅱ.①曹…②赵…③胡… Ⅲ.①概率论②数理统计 Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第050459号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼2号 邮编210096)

出版人 宋增民

江苏省新华书店经销 华东有色地研所印刷厂印刷

开本：700mm×1000mm 1/16 印张：21.75 字数：395千字

2002年8月第1版第2次印刷

定价：26.00元

(凡有印装质量问题，可直接向发行科调换，电话：025-3792327)

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象规律性的数学学科。随着现代科学技术的迅猛发展，概率统计的理论和方法得到了日益广泛的应用，可以毫不夸张地讲，几乎所有的科学技术领域，工农业生产和国民经济的各个部门都离不开概率统计的方法。例如，使用概率统计的方法可以进行气象预报、水文预报；现代工业生产中，产品质量抽样验收方案的制定，大型设备的可靠性分析，研制新产品时最佳生产方案的寻求等都要用到概率统计的原理；在医疗卫生中，治疗一种疾病时种种药物的疗效以及治疗方法的效果也要用统计资料来评定。另外，随机数学的理论和方法向工程学科的渗透已成为近代科学技术发展的特征之一，随机数学已成为许多重要学科的基础，如信息论、控制论、人工智能、通讯科学等。

这本概率论与数理统计教材就是为高等学校的工学类、经济类、管理类各专业编写的。目的是使学生通过本教材内容的学习，初步掌握处理随机现象的基本理论和方法，培养他们解决实际问题的能力。

本书实质上由三部分组成，虽然在正文中并没有给出这种形式的划分。第一部分包括第 1 至第 5 章，它们构成了本书的概率论部分；第二部分包括第 6 至第 9 章，为本书的数理统计部分；第三部分包括第 10 至第 12 章，构成了随机过程的基础。书中带 * 号的章节各专业可根据学时以及专业的需要适当选取；带 * 号的习题，初学者可以略去。

本书由长期从事概率统计课程教学的老师编写，书中融入了作者在长期教学实践中的一些经验体会。文字的叙述尽量以讲课的形式展开；概念的阐述十分注意它的统计背景；内容的安排注意抓住重点，保持前后呼应。为了巩固读者所学的知识，书中举有较多的典型例题。每章附有习题和答案。由于作者水平有限，书中也会有许多不妥和错误，恳请读者提出批评和意见。

本书在编写过程中得到东南大学应用数学系领导的热情关心和支持，韦博成教授详细阅读了书稿并提出了许多宝贵意见，谨此一并表示衷心的感谢！

本书概率论部分由曹振华编写，数理统计部分由赵平编写，随机过程部分由胡跃清编写。

编　者

2001 年 4 月于东南大学应用数学系

目　　录

1 随机事件与概率

1.1 随机事件

1.1.1 随机试验

概率论是研究随机现象规律性的数学分支。也就是说，其研究对象是随机现象；对非随机现象，概率论没有用武之地。那么，什么是随机现象呢？这要从自然界存在的现象来分辨。

自然界和人类社会中有一类现象，我们可以预言它在一定条件下是否会出现。例如，重物让它自由地下落必然是垂直下落。纯水在一个标准大气压下加热到 100℃ 必然会沸腾。这种在一定条件下必然会发生的事件称为必然事件。反之，在一定条件下必然不会发生的事件称为不可能事件。例如，“同性的电荷互相吸引”这种现象是不可能发生的。必然事件和不可能事件虽然形式相反，但两者的实质是相同的，即在一定条件下可以预言是否会发生。所有这类现象称为决定性现象。

但是，自然界中还存在着与决定性现象有着本质区别的现象。例如，抛一枚硬币，假定其不能直立，则可能正面朝上，也可能反面朝上；某地区在将来某一时刻可能下雨，也可能不下雨；向一目标进行射击可能击中目标，也可能击不中目标等等。这些在一定条件下可能发生也可能不发生的现象称为随机现象。

从上面的叙述中我们可以看到，随机现象是一定综合条件下的表现，研究它就要对其进行观察。在概率论中，通常称“观察一定条件下发生的现象”为试验。条件实现一次就完成一次试验。若试验满足下述 3 个条件，则称该试验为随机试验：

(1) 它可以在相同条件下重复进行；

(2) 每次试验中可以出现不同的结果，而究竟会出现哪一个结果试验前不能预先断言；

(3) 试验中一切可能出现的结果可以预先知道。随机试验通常用字母 E 表示，本书中以后提到的试验都是指随机试验。下面举一些试验的例子：

例 1　E_1:掷一枚硬币,观察其正面(H) 和反面(T) 出现的情况。试验的条件就是掷一枚硬币,条件实现(一枚硬币掷出) 就完成一次试验。

例 2　E_2:将一枚硬币掷 2 次,观察正、反面出现的情况。试验的条件就是把硬币掷 2 次,条件实现(硬币掷了 2 次) 就完成了一次试验。

例 3　E_3:从含有2个黑球 a_1, a_2 和3个白球 b_1, b_2, b_3 的盒子中任意地取出 3 个球,观察取出的球。条件实现(从含有 5 个球的盒中取出 3 个球) 就完成一次试验。

下面几个试验中的试验条件请读者自己分析。

例 4　E_4:把 2 个球 a 和 b 任意地放入 3 个盒中(每个盒中可以容纳任意多个球),观察球在盒中的放法。

例 5　E_5:记录某电话交换台在 1 min 内所来的电话呼叫次数。

例 6　E_6:观察某厂生产的灯泡的使用寿命 t。

1.1.2　随机事件与样本空间

从前面试验的例子中可以看到,随机现象是通过随机试验表现出来的。我们称一个试验 E 中可能发生也可能不发生的事件为该试验 E 的随机事件,以后简称为事件。通常用字母 $A, B, C, \cdots$ 来表示。称试验 E 可能出现的每一个基本结果 w 为 E 的基本事件。基本事件的全体组成的集合称为该试验 E 的样本空间。所以,基本事件也称为样本点。在具体问题中,十分重要的是要认清样本空间是由什么构成的。下面就来看一看 1.1.1 中 6 个试验的样本空间:

$$\Omega_1 = \{H, T\}。$$

$$\Omega_2 = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}。$$

$$\begin{aligned}\Omega_3 = \{&(a_1, a_2, b_1), (a_1, a_2, b_2), (a_1, a_2, b_3), (a_1, b_1, b_2),\\ &(a_1, b_1, b_3), (a_1, b_2, b_3), (a_2, b_1, b_2), (a_2, b_1, b_3),\\ &(a_2, b_2, b_3), (b_1, b_2, b_3)\}。\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_4 = \{&\lfloor ab \mid \quad \mid \quad \rfloor, \lfloor \quad \mid ab \mid \quad \rfloor, \lfloor \quad \mid \quad \mid ab \rfloor, \lfloor a \mid b \mid \quad \rfloor,\\ &\lfloor b \mid a \mid \quad \rfloor, \lfloor a \mid \quad \mid b \rfloor, \lfloor b \mid \quad \mid a \rfloor, \lfloor \quad \mid a \mid b \rfloor,\\ &\lfloor \quad \mid b \mid a \rfloor\}。\end{aligned}$$

$$\Omega_5 = \{0, 1, 2, \cdots\}。$$

$$\Omega_6 = \{t \mid t \geqslant 0\}。$$

要注意的是:样本空间的构成是由试验的条件和观察目的所决定的。例如试验 E_1 和 E_2 都是掷硬币,由于掷的次数(试验的条件) 不一样,其样本空间 Ω_1 和 Ω_2 也不一样。又如在试验 E_3 中,若不是观察取出的 3 个球的情况,而是

观察取出的 3 个球中白球的个数，则其样本空间应为 $\Omega_3' = \{1,2,3\}$。

基本事件是事件的一种，一般的事件总是由若干个基本事件共同组成的，因而是样本空间的一个子集。如在例 3 中，事件 A："取出的 3 个球中有 1 个白球"。事件 A 发生当且仅当基本事件(a_1,a_2,b_1)，(a_1,a_2,b_2)，(a_1,a_2,b_3) 中的一个出现。这样，我们可以认为 A 是由这 3 个基本事件组成的，即

$$A = \{(a_1,a_2,b_1),(a_1,a_2,b_2),(a_1,a_2,b_3)\}$$

这是 Ω_3 的一个子集。

以后，我们就将事件定义为样本空间 Ω 的某个子集。事件 A 发生当且仅当试验中出现 A 中某个基本事件。

样本空间 Ω 作为一个事件，因为在每次试验中至少要出现一个基本事件。所以 Ω 在一次试验中必然会发生，即 Ω 是必然事件。

空集 $\varnothing$ 作为一个事件，它在每次试验中都不会发生，所以空集 $\varnothing$ 是不可能事件。

必然事件和不可能事件是可以预言在一定条件下是否会发生的事件，是决定性事件，不属于随机事件的范畴，但为了研究问题方便起见，仍将它们作为特殊的随机事件。

1.1.3 事件之间的关系及其运算

现在，对应着集合之间的关系及运算，定义事件之间的关系及运算。在以下的叙述中，设 Ω 是给定的样本空间，所出现的 Ω 的子集都是事件，并用字母 $A,B,A_i,B_i,\cdots$ 表示。

1) 如果 A 发生必然导致 B 发生，则称 B 包含 A，记作 $A \subset B$。如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，就说 A 与 B 相等(或等价)，记作 $A = B$。

例如，在例 3 中，A："取出的 3 个球中有一个白球"，B："取出的 3 个球中有 2 个黑球"。因为一共只取 3 个球，有 1 个白球必然有 2 个黑球，故 $A \subset B$。反之，取出的 3 个球中有 2 个黑球必然有 1 个白球，故亦有 $B \subset A$，因此 $A = B$。

2) "2 个事件 A,B 中至少有一个发生"也是一个事件，称此事件为 A 与 B 的和(或称 A 与 B 的并)。记作 $A \cup B$。

例如，在例 3 中，A："取出的 3 个球中有 1 个白球"，B："取出的 3 个球中有一个黑球"。则 $A \cup B$ 表示"取出的 3 个球中至少有 1 个黑球"。即

$$A = \{(a_1,a_2,b_1),(a_1,a_2,b_2),(a_1,a_2,b_3),(a_1,b_1,b_2),(a_1,b_1,b_3),(a_1,b_2,b_3),(a_2,b_1,b_2),(a_2,b_1,b_3),(a_2,b_2,b_3)\}$$

2 个事件的和可以推广到多个事件的和，"事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有

一个发生”称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$。“事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生”称为可列多个事件的和，记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots$ 或 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$。

例如，在例5中，A_i：“在1 min内来 i 次呼叫($i=0,1,2,\cdots$)”，则 $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}A_{2i}$ 表示“在1 min内来偶数次呼叫”。

3)“2个事件 A,B 都发生”也是一个事件，称此事件为 A 与 B 的交，记作 $A\cap B$(或 AB)类似地“n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生”也是一个事件，称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交，记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$(或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$)。“事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 都发生”称为可列多个事件的交，记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots$(或 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$)。

例如，在例6中，$A_n=\left\{t\mid t<1\,000+\frac{1}{n}\right\}$ 表示“灯泡的使用寿命小于 $\left(1\,000+\frac{1}{n}\right)$ h”($n=1,2,\cdots$)，则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 表示“灯泡的使用寿命不超过1 000 h”。

4)“事件 A 发生而 B 不发生”也是一个事件，称为 A 与 B 的差，记作 $A-B$。

例如，考虑随机试验 E：“从含有分别标有号码 $1,2,\cdots,N$ 的 N 个球的盒子中有放回地抽取 n 个球”。记 A_k 为事件“取出的 n 个球中最大号码不超过 k”($k=1,2,\cdots$)，则 A_k-A_{k-1} 表示“取出的 n 个球中最大号码刚好等于 k”这一事件。

5)如果2个事件 A,B 满足关系式

$$AB=\varnothing \tag{1.1}$$

也就是说，事件 A,B 不能同时发生，则称 A 与 B 是互不相容的事件。

6)2个事件 A,B 如果满足关系式

$$A\cup B=\Omega,\qquad AB=\varnothing \tag{1.2}$$

也就是说，A,B 中至少有一个发生，但也最多只有一个发生，则称 A 与 B 是相互对立的事件，或者说 A 是 B(或 B 是 A)的对立事件。A 的对立事件记作 $\overline{A}$。

相互对立的事件一定是互不相容的事件，反之，不一定成立。如在例6中若令 $A=\{t\mid t>1\,000\}$ 即“灯泡的使用寿命超过1 000 h”，$B=\{t\mid t\leqslant 500\}$ 即“灯泡的使用寿命不超过500 h”。显然 $AB=\varnothing$，但 $A\cup B=\{t\mid t\leqslant 500$ 或 $t>1\,000\}\neq\Omega$。

事件之间的关系及运算也常用图形来直观地示意(如图1.1所示)。

因为事件之间的关系及运算完全对应着集合之间的关系与运算，从而事件的运算也有如下的运算规律：

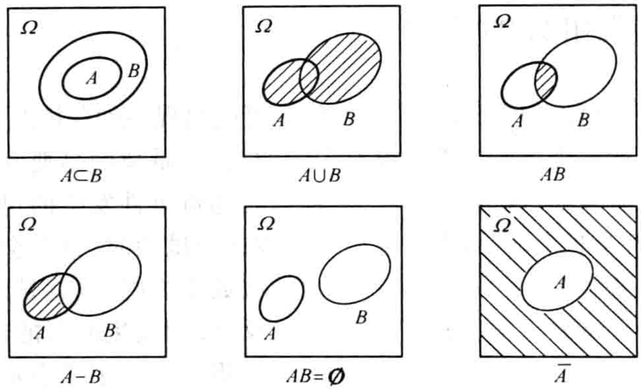

图 1.1

交换律　$A \cup B = B \cup A, AB = BA$

结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (AB)C = A(BC)$

分配律　$(A \cup B)C = AC \cup BC, AB \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$

德摩根(De Morgan)公式　$\overline{A \cup B} = \overline{A}\overline{B}, \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$

分配律和德摩根公式可以推广到任意有限或无限多个事件：

$$\overline{(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\overline{A}_n \cup \overline{C})$$

$$\overline{(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \cup C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{(A_n \cup C)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n \overline{C}$$

在以后的运用中，常常需要用已知事件通过事件运算来表示另一些事件。

例 7　设 A_1, A_2, A_3 是 3 个事件，试用它们来表示事件 B："A_1, A_2, A_3 中至多有一个发生"。

解　事件 B："A_1, A_2, A_3 中至多有一个发生" 当且仅当"A_1, A_2, A_3 这 3 个事件都不发生或 3 个事件中刚好有 1 个发生"。故

$$B = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$$

它的一种等价表示为

$$B = \overline{A}_1\overline{A}_2 \cup \overline{A}_1\overline{A}_3 \cup \overline{A}_2\overline{A}_3$$

即 A_1, A_2, A_3 这 3 个事件至少有 2 个不发生。事实上

$$\begin{aligned}
&\overline{A}_1\overline{A}_2 \cup \overline{A}_1\overline{A}_3 \cup \overline{A}_2\overline{A}_3 \\
&= \overline{A}_1\overline{A}_2\Omega \cup \overline{A}_1\overline{A}_3\Omega \cup \overline{A}_2\overline{A}_3\Omega \\
&= \overline{A}_1\overline{A}_2(A_3 \cup \overline{A}_3) \cup \overline{A}_1\overline{A}_3(A_2 \cup \overline{A}_2) \cup \overline{A}_2\overline{A}_3(A_1 \cup \overline{A}_1) \\
&= \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3
\end{aligned}$$

1.2 随机事件的概率

从 1.1 节的讨论中看到,一个随机试验可能出现各种各样的随机事件。但是仅知道它可能发生哪些事件并没有多大的意义,重要的是要掌握这些事件发生的可能性有多大,这里首先有一个问题是随机事件发生的可能性有没有大小之分?回答是肯定的。因为当我们多次做某一试验时,常常会发现某些事件发生的次数要多些,而另一些事件发生的次数要少些。也就是说,发生次数多的事件在一定试验中发生的可能性要大,反之,则发生的可能性要小。既然各事件发生的可能性有大小之分,自然想到该用一个数字来表示事件发生的可能性大小,较大的可能性就用一个较大的数字来表示,可能性小的就用一个较小的数字来表示。那么,对于给定的随机事件 A,刻划它发生的可能性大小的数字应具备哪些特征呢?为此,首先引入描述事件发生频繁程度的概念——频率。

1.2.1 事件的频率

定义 1.1 设 E 是一个随机试验,A 是该试验E 的一个随机事件。把 E 重复做 n 次,以 n_A 表示事件A 在这 n 次试验中发生的次数,比值

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

称为事件 A 在这 n 次试验中发生的频率,n_A 称为 A 在这 n 次试验中发生的频数。

定理 1.1 对任意随机试验 E,频率具有下列性质:

(1) 对任意事件 A,$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$;

(2) $f_n(\Omega) = 1$;

(3) 对任意有限多个互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 有

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = \sum_{i=1}^{m} f_n(A_i) \tag{1.3}$$

其中 n 是任意整数。

证 由 $f_n(A)$ 的定义知(1)是显然的。又因 $n_\Omega = n$,故(2)得证。最后,因 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 互不相容得

$$n_{\bigcup_{i=1}^{m} A_i} = \sum_{i=1}^{m} n_{A_i}$$

以 n 除上式两边就得式(1.3)。