新世纪高等院校精品教材

OPERATIONS RESEARCH
ROR MANAGEMENT

管理运筹学教程（第二版）

蒋绍忠 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

新世纪高等院校精品教材

管理运筹学教程

（第二版）

蒋绍忠 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

管理运筹学教程/蒋绍忠编著. —2版. —杭州:浙江大学出版社,2014.8
ISBN 978-7-308-13635-8

Ⅰ. ①管… Ⅱ. ①蒋… Ⅲ. ①管理学—运筹学—高等学校—教材 Ⅳ. ①C931.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第176803号

管理运筹学教程(第二版)
蒋绍忠 编著

责任编辑 沈国明
封面设计 杭州林智广告有限公司
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路148号 邮政编码310007)
(网址:http://www.zjupress.com)
排　　版 浙江时代出版服务有限公司
印　　刷 德清县第二印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 24.75
字　　数 600千
版 印 次 2014年8月第2版 2014年8月第4次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-13635-8
定　　价 48.00元

第二版前言

对本书的第一版，作者收到了不少读者的来信，许多读者，特别是运筹学课程老师，对本书提出了很多宝贵的意见和建议，指出了其中的错误和缺点。对大家的指导和帮助，作者深表感谢。第二版的修改很多是来自读者的意见。

本书是一本管理专业研究生教材，内容覆盖了传统运筹学的主要领域。通过本书的学习，读者既能够了解运筹学的基本理论和原理，同时可以掌握运筹学的模型构建、软件应用、优化求解和案例分析，具备运用运筹学的知识和技能来研究管理理论问题和解决管理实际问题的能力。

本书每一章都配备了习题，从第1章到第6章配备了相应的案例。

本书的习题都要求用手算完成。信息化时代人们越来越不习惯手算。尽管手算比较麻烦，但要理解和熟练掌握运筹学的相关算法，手算还是必不可少的。从某种意义上讲，学习运筹学也就是学习各种算法。要充分理解和熟练掌握这些算法，必须通过习题的手算练习。

配备案例的目的则是为了掌握运筹学建模、求解、分析和软件应用的能力。本书的案例提供了一些管理问题的背景材料和相关数据，要求通过运筹学建模、求解和分析来提出解决方案。习题有标准答案，而案例是没有标准答案的。从不同的角度，可以对案例问题有不同的理解，可以建立不同的模型，产生不同的解决方案。

与第一版相比，本书第二版增加了案例数量，同时减少了每个案例模型的规模，使得大多数学生都有能力和时间来完成案例。案例可以要求每个学生独立完成，也可以要求学生分组完成。如果有可能的话，作者建议教师安排学生课堂案例报告，通过对不同的案例分析报告的提问和点评，来扩充学生的视野。

作为一本教材，本书还备有以下电子版课件：

· 教学演示 PPT 文档

· 习题解答 Word 文档

· 案例的 Excel 模型 LINDO 模型以及案例分析报告的 Word 文档

· 课堂教学视频 AVI 文档

采用本书作为教材的教师，如果需要以上课件，请填写书后的“电子版课件申请书”并经系主任签字盖章，将申请书扫描用电子邮件发送给作者。确认申请者的身份后，作者会将电子版课件发给申请者。作者的电子邮箱是：jiangsz@zju.edu.cn。

作者继续恭候读者对本书第二版的意见和建议。

蒋绍忠

于浙江大学紫金港校区

2014.6

目　　录

第1章 线性规划

Chapter 1 Linear Programming

本章内容提要

线性规划是运筹学的重要内容。本章介绍线性规划数学模型、线性规划的基本概念以及求解线性规划数学模型的基本算法——单纯形法。

学习本章,要求掌握以下内容:

- 线性规划模型的结构
- 线性规划的标准形式,非标准形式转化为标准形式
- 线性规划的图解以及相应的概念。包括:约束直线,可行半空间,可行解,可行域,凸集,极点,目标函数等值线,最优解
- 线性规划的基本概念。包括:基,基础解,基础可行解,基变量,非基变量,进基变量,离基变量,基变换
- 单纯形法原理。包括:基变量和目标函数用非基变量表示,检验数,选择进基变量的原则,确定离基变量的方法,主元,旋转运算
- 单纯形表。包括初始单纯形表的构成,单纯形表运算方法
- 初始基础可行解,两阶段法
- 退化的基础可行解

1.1 运筹学和线性规划

1.1.1 运筹学

运筹学是20世纪第二次世界大战期间由于战争的需要而发展起来的一门学科。当时,英国组织了一批自然科学和工程科学的学者,与军队指挥员一起,研究大规模战争提出的一些问题。如轰炸战术的评价和改进、反潜艇作战研究等,研究结果在战争实践中取得了明显的效果。这些研究当时在英国称为 Operations Research,直译为作战研究。战争结束以后,这些研究方法不断发展完善,并逐步形成学科理论体系。其中一些主要的理论和方法包括:线性规划,网络流,整数规划,动态规划,非线性规划,排队论,决策分析,对策论,计算机模拟等。这些理论和方法在经济管理领域也得到了广泛应用,Operations Research也转义成为"作业研究"。我国将 Operations Research 译成"运筹学",非常贴切地将 Operations Research这一英文术语所包含的作战研究和作业研究两方面的涵义都表达了出来。

现在,运筹学已经成为管理科学重要的基础理论和应用方法,是管理科学专业基本的必修课程之一。

1.1.2 线性规划

线性规划是运筹学中最重要的一种系统优化方法。它的理论和算法已十分成熟,应用领域十分广泛,包括生产计划,物资调运,资源优化配置、物料配方、任务分配、经济规划等问题。随着计算机硬件和软件技术的发展,目前用微型计算机就可以求解变量个数达 10^6、约束个数达 10^4 的巨大规模的问题,并且计算时间也不太长。

线性规划问题最早是前苏联学者康德洛维奇(L. V. Kantorovich)于 1939 年提出的,但他的工作当时并未广为人知。第二次世界大战中,美国空军的一个研究小组 SCOOP(Scientific Computation of Optimum Programs)在研究战时稀缺资源的最优化分配这一问题时,提出了线性规划问题;并且由丹泽(G. B. Dantzig)于 1947 年提出了求解线性规划问题的单纯形法。单纯形法至今还是求解线性规划最有效的方法。20 世纪 50 年代初,电子计算机研制成功,较大规模的线性规划问题的计算已经成为可能。因此,线性规划和单纯形法受到数学家、经济学家和计算机工作者的重视,得到迅速发展,很快发展成为一门完整的学科并得到广泛的应用。1952 年,美国国家标准局(NBS)在当时的 SEAC 电子计算机上首次实现单纯形算法。1976 年 IBM 研制成功功能十分强大、计算效率极高的线性规划软件 MPS,后来又发展成为更为完善的 MPSX。这些软件的研制成功,为线性规划的实际应用提供了强有力的工具。

在本章中,我们将介绍线性规划的基本概念、单纯形法的基本原理及线性规划在经济分析中的应用。对计算方法和计算机软件应用方面的问题,可参阅有关文献。

1.2 线性规划问题

根据实际问题的要求,可以建立线性规划问题数学模型。线性规划问题由目标函数、约束条件以及变量的非负约束三部分组成。下面列举五种最常见的线性规划问题的类型。

1.2.1 生产计划问题

例 1.1 某工厂拥有 A、B、C 三种类型的设备,生产甲、乙、丙、丁四种产品。每件产品在生产中需要占用的设备机时数、每件产品可以获得的利润以及三种设备可利用的时数见表 1-1。

表 1-1

设备名称	每件产品占用的机时数/(小时/件)				设备能力/小时
	产品甲	产品乙	产品丙	产品丁	
设备 A	1.5	1.0	2.4	1.0	2000
设备 B	1.0	5.0	1.0	3.5	8000
设备 C	1.5	3.0	3.5	1.0	5000
利润/(元/件)	5.24	7.30	8.34	4.18	

用线性规划制订使总利润最大的生产计划。

设变量 x_i 为第 i 种产品的生产件数($i=1,2,3,4$),目标函数 z 为相应的生产计划可以获得的总利润。在加工时间以及利润与产品产量呈线性关系的假设下,可以建立如下的线

性规划模型：

$$
\begin{array}{llllllll}
\max & z = 5.24x_1 & +7.30x_2 & +8.34x_3 & +4.18x_4 & & & \text{目标函数} \\
\text{s. t.} & 1.5x_1 & +1.0x_2 & +2.4x_3 & +1.0x_4 & \leqslant 2000 & & \\
 & 1.0x_1 & +5.0x_2 & +1.0x_3 & +3.5x_4 & \leqslant 8000 & & \text{约束条件} \\
 & 1.5x_1 & +3.0x_2 & +3.5x_3 & +1.0x_4 & \leqslant 5000 & & \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geqslant 0 & & \text{变量非负约束}
\end{array}
$$

这是一个典型的利润最大化的生产计划问题。其中 max 表示极大化，s. t. 是 subject to 的缩写。求解这个线性规划，可以得到最优解为：

$$x_1 = 294.12 \qquad x_2 = 1500 \qquad x_3 = 0 \qquad x_4 = 58.82 \quad (\text{件})$$

最大利润为

$$z = 12737.06(\text{元})$$

请注意最优解中利润率最高的产品丙在最优生产计划中不安排生产。说明按产品利润率大小为优先次序来安排生产计划的方法有很大局限性。尤其在产品品种很多、设备类型很多的情况下，用手工方法安排生产计划很难获得满意的结果。

1.2.2　配料问题

例 1.2　某工厂要用四种合金 T_1，T_2，T_3 和 T_4 为原料，经熔炼成为一种新的不锈钢 G。这四种原料中元素铬(Cr)、锰(Mn)和镍(Ni)的含量(%)，这四种原料的单价以及新的不锈钢材料 G 所要求的 Cr，Mn 和 Ni 的最低含量(%)见表 1-2。

表 1-2

	T_1	T_2	T_3	T_4	G
Cr	3.21%	4.53%	2.19%	1.76%	3.20%
Mn	2.04%	1.12%	3.57%	4.33%	2.10%
Ni	5.82%	3.06%	4.27%	2.73%	4.30%
单价/(元/千克)	115	97	82	76	

设熔炼时重量没有损耗，要熔炼成 100 千克不锈钢 G，为使成本最小，应选用原料 T_1，T_2，T_3 和 T_4 各多少千克？

设选用原料 T_1，T_2，T_3 和 T_4 的重量分别为 x_1，x_2，x_3，x_4 千克，根据条件，可建立相应的线性规划模型如下：

$$
\begin{array}{lllllll}
\min & z = & 115x_1 & +97x_2 & +82x_3 & +76x_4 & \\
\text{s. t.} & & 0.0321x_1 & +0.0453x_2 & +0.0219x_3 & +0.0176x_4 & \geqslant 3.20 \\
 & & 0.0204x_1 & +0.0112x_2 & +0.0357x_3 & +0.0433x_4 & \geqslant 2.10 \\
 & & 0.0582x_1 & +0.0306x_2 & +0.0427x_3 & +0.0273x_4 & \geqslant 4.30 \\
 & & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & =100 \\
 & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geqslant 0
\end{array}
$$

这是一个典型的成本最小化的问题。其中 min 表示极小化。这个线性规划问题的最优解是

$$x_1 = 26.58 \qquad x_2 = 31.57 \qquad x_3 = 41.84 \qquad x_4 = 0 \quad (\text{千克})$$

最低成本为 $z = 9549.87$(元)。

1.2.3 背包问题

例 1.3 一只背包最大装载重量为 50 千克。现有三种物品,每种物品数量无限,每种物品每件的重量、价值如表 1-3 所示:

表 1-3

	物品 1	物品 2	物品 3
重量/(千克/件)	10	41	20
价值/(元/件)	17	72	35

要在背包中装入这三种物品各多少件,使背包中的物品价值最高。

设物品 1,物品 2 和物品 3 分别装入 x_1, x_2, x_3 件,由于物品的件数必须是整数,因此背包问题的线性规划模型是一个整数规划问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 17x_1 + 72x_2 + 35x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 10x_1 + 41x_2 + 20x_3 \leqslant 50 \\ & x_1, x_2, x_3 \geqslant 0,\ x_1, x_2, x_3 \text{ 是整数} \end{aligned}$$

这个问题的最优解是:$x_1 = 1$ 件,$x_2 = 0$ 件,$x_3 = 2$ 件,最高价值为:$z = 87$(元)。

1.2.4 运输问题

例 1.4 设某种物资从两个供应地 A_1, A_2 运往三个需求地 B_1, B_2, B_3。各供应地的供应量、各需求地的需求量、每个供应地到每个需求地的单位物资运价如表 1-4 所示。

表 1-4

供应地	运价/(元/吨)			供应量/吨
	B_1	B_2	B_3	
A_1	2	3	5	35
A_2	4	7	8	25
需求量/吨	10	30	20	

这个问题也可以表示为图 1.1。其中节点 A_1、A_2 表示供应地,节点 B_1、B_2、B_3 表示需求地,从每一供应地到每一需求地都有相应的运输路线,共有 6 条不同的运输路线。如何安排每条运输路线上的运量,使需求量都得到满足,并且总运费最低?

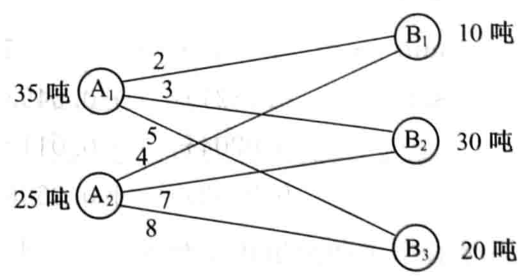

图 1.1

设 x_{ij} 为从供应地 A_i 运往需求地 B_j 的物资

数量 $(i=1,2;\ j=1,2,3)$，z 为总运费，则总运费最小的线性规划模型为：

$$
\begin{array}{llllllllr}
\min & z = 2x_{11} & +3x_{12} & +5x_{13} & +4x_{21} & +7x_{22} & +8x_{23} & & \\
\text{s.t.} & x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & & & & =35 & (1)\\
 & & & & x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & =25 & (2)\\
 & x_{11} & & & +x_{21} & & & =10 & (3)\\
 & & x_{12} & & & +x_{22} & & =30 & (4)\\
 & & & x_{13} & & & +x_{23} & =20 & (5)\\
 & x_{ij}\geqslant 0 & & & & & & &
\end{array}
$$

以上约束条件(1)、(2)称为供应地约束，(3)、(4)、(5)称为需求地约束。

这个问题的最优解为：

$$x_{11}=0,\ x_{12}=30,\ x_{13}=5,\ x_{21}=10,\ x_{22}=0,\ x_{23}=15(\text{吨})$$

最小运费为：$z=275$(元)。

1.2.5　指派问题

例 1.5　有 n 项任务由 n 个人去完成，每项任务交给一个人，每个人都有一项任务。由第 i 个人去做第 j 项任务的成本(或效益)为 c_{ij}。求使总成本最小(或效益最大)的分配方案。

设：
$$x_{ij}=\begin{cases}0 & \text{第 } i \text{ 个人不从事第 } j \text{ 项任务}\\ 1 & \text{第 } i \text{ 个人被指派完成第 } j \text{ 项任务}\end{cases}$$

得到以下的线性规划模型：

$$
\begin{aligned}
\min(\max)\quad & z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\\
\text{s.t.}\quad & \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1 \quad j=1,2,\cdots,n\\
& \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1 \quad i=1,2,\cdots,n\\
& x_{ij}=0,1
\end{aligned}
$$

例如，有张、王、李、赵 4 位教师被分配教语文、数学、物理、化学 4 门课程，每位教师教一门课程，每门课程由一位老师教。根据这四位教师以往教课的情况，他们分别教这四门课程的平均成绩见表 1－5。

表 1－5

i \ j	语　文	数　学	物　理	化　学
张	92	68	85	76
王	82	91	77	63
李	83	90	74	65
赵	93	61	83	75

四位教师每人只能教一门课，每一门课只能由一个教师来教。要确定哪一位教师上哪

一门课，使四门课的平均成绩之和为最高。

设 $x_{ij}(i=1,2,3,4;\ j=1,2,3,4)$ 为第 i 个教师是否教第 j 门课，x_{ij} 只能取值 0 或 1。

$$x_{ij}=\begin{cases}0 & \text{第 } i \text{ 个教师不教第 } j \text{ 门课}\\ 1 & \text{第 } i \text{ 个教师教第 } j \text{ 门课}\end{cases}$$

变量 x_{ij} 与教师 i 以及课程 j 的关系见表 1－6。

表 1－6

i \ j	语　文	数　学	物　理	化　学
张	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
王	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
李	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}
赵	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}

这个指派问题的线性规划模型为：

$$\begin{aligned}
\max\quad & z=92x_{11}+68x_{12}+85x_{13}+76x_{14}+82x_{21}+91x_{22}+77x_{23}+63x_{24}\\
&\quad +83x_{31}+90x_{32}+74x_{33}+65x_{34}+93x_{41}+61x_{42}+83x_{43}+75x_{44}\\
\text{s.t.}\quad & x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1 \qquad (1)\\
& x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1 \qquad (2)\\
& x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1 \qquad (3)\\
& x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1 \qquad (4)\\
& x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1 \qquad (5)\\
& x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1 \qquad (6)\\
& x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=1 \qquad (7)\\
& x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=1 \qquad (8)\\
& x_{ij}=0,\ 1
\end{aligned}$$

这个问题的最优解为 $x_{14}=1, x_{23}=1, x_{32}=1, x_{41}=1, \max z=336$；即张老师教化学，王老师教物理，李老师教数学，赵老师教语文，如果这样分配教学任务，四门课的平均总分可以达到 336 分。

在线性规划问题中，如果所有的变量都只能取值 0 或 1。这样的线性规划问题称为(纯)0－1 整数规划问题。如果一个线性规划问题中，有的变量是连续变量，而另一些变量是 0－1 变量，这样的问题称为混合 0－1 规划问题。

由以上 5 个例子，我们可以归纳出线性规划问题的一般形式：

$$\begin{aligned}
\max(\min)\quad & z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_jx_j+\cdots+c_nx_n\\
\text{s.t.}\quad & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1j}x_j+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_1\\
& a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2j}x_j+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_2\\
& \quad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\vdots\\
& a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mj}x_j+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_m\\
& x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_j,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0
\end{aligned}$$

其中

$$\max(\min) \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_jx_j + \cdots + c_nx_n$$

称为目标函数；

$$\begin{array}{llllll} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + \cdots & + a_{1j}x_j & + \cdots & + a_{1n}x_n \quad \leqslant (=, \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + \cdots & + a_{2j}x_j & + \cdots & + a_{2n}x_n \quad \leqslant (=, \geqslant) b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + \cdots & + a_{mj}x_j & + \cdots & + a_{mn}x_n \quad \leqslant (=, \geqslant) b_m \end{array}$$

称为约束条件；

$$x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots, x_n \geqslant 0$$

称为变量的非负约束。

在线性规划问题中，目标函数是变量的线性函数，约束条件是变量的线性不等式。例如以下的问题就不是线性规划问题：

$$\begin{array}{ll} \max & z = 5x_1x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + 3x_2 - \dfrac{1}{x_3} \leqslant 15 \\ & |x_1 - x_2| + 4x_3 \geqslant 14 \\ & x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{array}$$

记向量和矩阵

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

则线性规划问题可由向量和矩阵表示

$$\begin{array}{ll} \max(\min) & z = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{AX} \leqslant (=, \geqslant) \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0} \end{array}$$

1.3　线性规划问题的标准形式

为了今后讨论的方便，我们称以下线性规划的形式为标准形式：

$$\begin{array}{ll} \min & z = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0} \end{array}$$

对于各种非标准形式的线性规划问题，我们可以通过以下的变换，将其转化为标准形式。