概率论与数理统计

主　编　黄　勇
副主编　黄燕革　赵世安
柳长青

武汉理工大学出版社
WUTP Wuhan University of Technology Press

概率论与数理统计

（非数学专业类）

主　编　黄　勇
副主编　黄燕革　赵世安　柳长青

武汉理工大学出版社
·武　汉·

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/黄勇主编. —武汉:武汉理工大学出版社,2014.8
ISBN 978-7-5629-3945-0

Ⅰ.①概… Ⅱ.①黄… Ⅲ.

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 023581 号

项目负责人:尹杰 彭佳佳
责任编辑:彭佳佳
责任校对:尹杰
装帧设计:芳华时代
出版发行:武汉理工大学出版社
社 址:武汉市洪山区珞狮路 122 号
邮 编:430070
网 址:http://www.techbook.com.cn
经 销:各地新华书店
印 刷:武汉兴德林工贸有限公司
开 本:787×960 1/16
印 张:13.75
字 数:280 千字
版 次:2014 年 8 月第 1 版
印 次:2014 年 8 月第 1 次印刷
定 价:30.00 元
本社购书热线电话:027-87664138 87384729 87515798 87165708(传真)
凡购本书,如有缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请向出版社发行部调换。

前　　言

众所周知，以计算机技术的广泛应用为标志的信息时代的到来，是各方面技术共同发展的结果，其中数学为计算机提供的算法支持是计算机技术得以迅猛发展的关键。反之，计算机技术的逐步成熟又为数学科学的发展和数学教育手段的更新提供了新的契机，同时也对数学教育提出了新的要求。

“概率论与数理统计”作为数学科学中的实用学科，广泛渗透和应用于社会的各个领域，但由于受传统观念的束缚和影响，概率论与数理统计的教学效果还不尽如人意，尤其是对非数学专业的学生而言，存在理论太多，理解困难；公式太多，记忆困难；方法很多，但运用困难等方面的问题。这些问题导致学生兴趣不足、学习被动。要解决这些问题就要求我们数学教育工作者积极解放思想，了解学生的需求，与时俱进，不断更新教材的形式和内容，改进教学方法，针对不同专业和不同水平的学生开设不同层次的概率论与数理统计课程，采用符合学生学习特点，适合他们将来发展，具有时代特征的教材。《概率论与数理统计》(非数学专业类)正是在这一思想的指导下诞生的。本教材的最大特点是引入了现代化的计算机应用软件工具，使学生清晰地看到如何在计算机上轻松完成统计工作，也使他们体会到统计学的魅力所在。在编写过程中我们力求做到：

(1)涵盖概率论与数理统计的基本内容，为学生以后进一步的学习打下良好的基础；

(2)在保证科学性的基础上，力求语言通俗易懂；

(3)例题多来源于学生较熟悉的题材，贴近生活；

(4)在习题的编写上，注重考察基础知识且能体现知识的融会贯通，不片面追求难度，无偏题、怪题；

(5)强调概率论与数理统计处理问题的思路和方法，弱化计算技巧；

(6)将计算机应用软件引入概率论与数理统计，统计计算部分都是通过 Excel 软件、SPSS 软件等来实现的，目的是通过计算机软件，使学生在轻松完成烦琐的统计计算的同时，加深对基本原理和方法的理解，激发学习兴趣，培养数学素质，增强解决实际问题的能力。

本教材的作者都是多年来工作在教学第一线且具有丰富教学经验的教师，他们在总结多年的教学经验、充分了解社会对数学教育的需求的基础上，结合国内外的数学教育的改革动态，编写了此教材。其中第 1 章由黄燕革编写，第 2 章由赵世安编写，第 5 章由柳长青编写，第 3、4、6 章由黄勇编写，全书由黄勇教授统稿。我

们诚挚地希望能使学生在较轻松的氛围中体会概率论与数理统计方法的优越性，提高学生学习概率论与数理统计的兴趣，并能充分利用所学知识解决自己专业的相关问题。本教材适合少学时的本科专业和高职高专师生使用，也可作为个人自修概率论与数理统计课程的入门参考书。

书中内容难免存在疏漏之处，恳请广大专家及读者批评指正。

编　者

2014 年 6 月

目　录

第1章　随机变量

概率论与数理统计是从数量化的角度来研究现实世界中一类不确定现象（随机现象）规律性的一门应用数学学科. 20 世纪以来，其广泛应用于工业、国防、国民经济及工程技术等各个领域. 本章介绍的随机事件与概率是概率论中最基本、最重要的概念之一.

概率论 —— 是根据大量同类随机现象的统计规律，对随机现象出现某一结果的可能性作出一种客观的科学判断，对这种结果出现的可能性大小作出数量上的描述；比较这些结果可能性的大小、研究它们之间的联系，从而形成一整套数学理论和方法.

数理统计 —— 是应用概率的理论知识来研究大量随机现象的规律性，对通过科学安排的一定数量的实验所得到的统计方法给出严谨的理论证明，并判定各种方法应用的条件以及方法、公式、结论的可靠程度和局限性，使我们能通过一组样本来判定某一判断是否能以相当大的概率来保证它是正确的，并可以控制发生错误的概率.

在自然界和现实生活中，一些事物是相互联系和不断发展的. 在它们彼此间的联系和发展中，根据它们是否有必然的因果联系，可以分成截然不同的两大类：

一类是确定性的现象. 这类现象是指在一定条件下，必定会导致某种确定的结果. 举例来说，在标准大气压下，水加热到 100℃，就必然会沸腾. 事物间的这种联系是属于必然性的. 通常，自然科学各学科就是专门研究和认识这种必然性的，寻求这类必然现象的因果关系，把握它们之间的数量规律.

另一类是不确定性的现象. 这类现象是指在一定条件下，事件的结果是不确定的. 举例来说，同一个工人在同一台机床上加工同一种零件若干个，它们的尺寸总会有一点差异. 又如，在同样条件下，进行小麦品种的人工催芽试验，各粒种子的发芽情况也不尽相同，有强、弱和早、晚的分别等. 为什么在相同的情况下，会出现这种不确定的结果呢？这是因为所谓的“相同条件”是针对一些主要条件来说的，除了这些主要条件外，还会有许多次要条件和偶然因素又是人们无法事先一一掌握的. 正因为这样，在这一类现象中，就无法用必然性的因果关系对个别现象的结果事先做出确定的判断. 事物间的这种关系是属于偶然性的，这种现象叫做偶然现象，或者叫做随机现象.

确定性现象　在一定条件下必然发生的现象称为确定性现象. 确定性现象的特征：条件完全决定结果.

随机现象 在一定的条件下,可能出现这样的结果,也可能出现那样的结果,而在试验或观察之前不能预知确切的结果.随机现象的特征:条件不能完全决定结果.

① 随机现象揭示了条件和结果之间的非确定性联系,其数量关系无法用函数加以描述.

② 随机现象在一次观察中出现什么结果具有偶然性,但在大量试验或观察中,这种结果的出现就具有一定的统计规律性,概率论就是研究随机现象这种本质规律的一门数学学科.

如何来研究随机现象?随机现象是通过随机试验来进行研究的.

由于随机现象的结果事先不能预知,初看似乎毫无规律.然而人们发现:当同一随机现象大量重复出现时,其每种可能的结果出现的频率具有稳定性,从而表明随机现象也有其固有的规律性.人们把随机现象在大量重复出现时所表现出的量的规律性称为随机现象的统计规律性,为了对随机现象的统计规律性进行研究,就需要对随机现象进行重复观察,把对随机现象的观察称为随机试验,并简称为试验,记为 E.例如,观察某射手对固定目标进行射击;抛一枚硬币三次,观察出现正面的次数;记录某市 120 急救电话一昼夜接到的呼叫次数等,均为随机试验.

概率论是数学的一个分支,它研究随机现象的数量规律.一方面,它有自己独特的概念和方法,另一方面,它与其他数学分支又有紧密的联系,它是现代数学的重要组成部分.概率论的广泛应用几乎遍及所有的科学技术领域,例如天气预报,地震预报,产品的抽样调查,工农业生产和国民经济的各个部门,在通信工程中可用以提高信号的抗干扰性、分辨率等.

概率论就是研究随机现象规律性的一门数学学科.

§1.1 随机事件及其概率

§1.1.1 随机事件

1.随机试验

我们遇到过各种试验.在这里,我们把试验作为一个含义广泛的术语,它包括各种各样的科学试验,甚至对某一事物的某一特征的观察也可认为是一种试验.下面举一些试验的例子:

E_1:抛一枚硬币,观察正面、反面出现的情况.

E_2:将一枚硬币抛三次,观察出现正面的次数.

E_3:抛一枚骰子,观察出现的点数.

E_4:记录车站售票处一天内售出的车票数.

E_5:在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的寿命.

E_6:记录某地一昼夜的最高温度和最低温度.

这些试验都具有以下特点:

① 可重复性:试验可以在相同的条件下重复进行;

② 可观察性:试验结果可观察,每次试验的可能结果不止一个,所有可能的结果是明确的;

③ 不确定性:每次试验出现的结果事先不能准确预知.

在概率论中,我们将具有上述三个特点的试验称为随机试验.

2. 随机事件

在随机试验中,可能发生也可能不发生的事情就叫随机事件(Random Event).随机事件常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示,它是样本空间 S 的子集合.在每次试验中,当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时,称事件 A 发生.

例如在 E_3 中,如果用 A 表示事件"掷出奇点数",那么 A 是一个随机事件.由于在一次投掷中,当且仅当掷出的点数是 1、3、5 中的任何一个时才称事件 A 发生了,所以把事件 A 表示为 $A=\{1,3,5\}$.同样地,若用 B 表示事件"掷出偶点数",那么 B 也是一个随机事件,且 $B=\{2,4,6\}$.

对于一个试验 E,在每次试验中必然发生的事件,称为 E 的必然事件(Certain Event);在每次试验中都不可能发生的事件,称为 E 的不可能事件(Impossible Event).例如在 E_3 中,"掷出的点数不超过 6"就是必然事件,用集合表示这一事件就是 E_3 的样本空间 $S_3=\{1,2,3,4,5,6\}$.而事件"掷出的点数大于 6"是不可能事件,这个事件不包括 E_3 的任何一个可能的结果,所以用空集 $\varnothing$ 表示.对于一个试验 E,它的样本空间 S 是 E 的必然事件;空集 $\varnothing$ 是不可能事件.必然事件与不可能事件虽已无随机性可言,但在概率论中,常把它们当做两个特殊的随机事件,这样做是为了数学处理上的方便.

3. 样本空间

尽管一个随机试验将要出现的结果是不确定的,但其所有可能结果是明确的,随机试验的每一种可能的结果称为一个样本点,记为 e(或 ω);它们的全体称为样本空间,记为 S(或 Ω).

基本事件的称谓是相对观察目的而言的,它们是不可再分解的、最基本的事件,其他事件均可由它们复合而成,一般地,称由基本事件复合而成的事件为复合事件.

4. 事件的集合表示

按定义，样本空间 S 是随机试验的所有可能结果(样本点)的全体，故样本空间就是所有样本点构成的集合，每一个样本点都是该集合的元素. 一个事件是由具有该事件所要求的特征的那些可能结果所构成的，所以一个事件对应于 S 中具有相应特征的样本点(元素)所构成的集合，它是 S 的一个子集. 于是，任何一个事件都可以用 S 的某一子集来表示，常用字母 $A,B,\cdots$ 等表示.

5. 事件间的关系与运算

因为事件是一个集合，因而事件间的关系和运算是按集合间的关系和运算来处理的. 下面给出这些关系和运算在概率中的提法，并根据“事件发生”的含义，给出它们在概率中的含义.

设试验 E 的样本空间为 S，而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 S 的子集.

(1) 事件的包含与相等

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $B\supset A$ 或者 $A\subset B$. 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，即 $A=B$，则称事件 A 与事件 B 相等.

(2) 事件的和

事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件称为事件 A 与事件 B 的和事件，记为 $A\cup B$. 事件 $A\cup B$ 发生意味着：或事件 A 发生，或事件 B 发生，或事件 A 与事件 B 都发生.

事件的和可以推广到多个事件的情形. 设有 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，定义它们的和事件为 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生$\}$，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

(3) 事件的积

事件 A 与事件 B 都发生的事件称为事件 A 与事件 B 的积事件，记为 $A\cap B$，也简记为 AB. 事件 $A\cap B$(或 AB) 发生意味着事件 A 发生且事件 B 也发生，即 A 与 B 都发生.

类似地，可以定义 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=\{A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都发生$\}$.

(4) 事件的差

事件 A 发生但事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A-B$.

(5) 互不相容事件(互斥)

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是互斥的，或称它们是互不相容的. 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意两个都互斥，则称这些事件是两两互斥的.

(6) 对立事件

“A 不发生”的事件称为事件 A 的对立事件，记为 $\overline{A}$. A 和 $\overline{A}$ 满足：$A\cup\overline{A}=S$，$A\overline{A}=\varnothing$，$\overline{\overline{A}}=A$.

(7) 事件运算满足的定律

设 A,B,C 为事件,则有

交换律:$A\cup B=B\cup A$;$AB=BA$.

结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;$(AB)C=A(BC)$.

分配律:$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$;

$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$.

对偶律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$;$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

【例1.1】 向指定目标射三枪,观察射中目标的情况.用 A_1,A_2,A_3 依次表示事件"第一、二、三枪击中目标",试用 A_1,A_2,A_3 表示以下各事件:

(1) 只击中第一枪;

(2) 只击中一枪;

(3) 三枪都没击中;

(4) 至少击中一枪.

解 (1) 事件"只击中第一枪",意味着第二枪不中,第三枪也不中.所以,可以表示成 $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

(2) 事件"只击中一枪",并不指定哪一枪击中.三个事件"只击中第一枪"、"只击中第二枪"、"只击中第三枪"中,任意一个发生,都意味着事件"只击中一枪"发生.同时,因为上述三个事件互不相容,所以,可以表示成 $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$.

(3) 事件"三枪都没击中",就是事件"第一、二、三枪都未击中",所以,可以表示成$\overline{A_1A_2A_3}$.

(4) 事件"至少击中一枪",就是事件"第一、二、三枪至少有一次击中",所以,可以表示成 $A_1\cup A_2\cup A_3$ 或 $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3+A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3+A_1A_2A_3$.

注意:事件之间的关系与运算完全和集合之间的关系与运算一致,只是术语不同而已,详见表1.1所列。

表1.1 事件与集合

记号	概率论	集合论
Ω	样本空间,必然事件	空间,全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	样本点	元素
A	事件	集合
$\overline{A}$	A 的对立事件(逆事件)	A 的余(补)集

①$A\subset B$,A 是 B 的子集,表示若事件 A 出现,事件 B 一定出现.

②$A \cup B(A+B)$，A 与 B 的并(和)，表示事件 A，B 至少有一个出现.

③$A \cap B(AB)$，A 与 B 的交(积)，表示事件 A 和 B 同时出现.

④$A \cap B = \varnothing$，表示事件 A 和 B 不能同时出现，称 A 与 B 互斥(或互不相容).

⑤$A \cap B = \varnothing$，且 $A \cup B = \Omega$，表示事件 A 和 B 为对立事件，记为 $\overline{A} = B$ 或 $\overline{B} = A$.

⑥$A - B$，表示事件 A 出现，而事件 B 不出现，且 $A - B = A\overline{B}$.

⑦ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，表示事件 A 和事件 B 都不出现.

⑧ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$，表示事件 A 和事件 B 至少有一个不出现.

结果 ⑦、⑧ 可分别推广为 $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$，$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

【例 1.2】 设 A、B、C 为任意三个事件，试用它们表示下列事件：

(1)A、B 出现，C 不出现； (2)A、B、C 中恰有一个出现；

(3)A、B、C 中至多有一个出现； (4)A、B、C 中至少有一个出现.

解 (1)$AB\overline{C}$.

(2)$A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$.

(3)$\overline{A}\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$.

(4)$A + B + C$.

【例 1.3】 考察某一位同学在一次数学考试中的成绩，分别用 A，B，C，D，P，F 表示下列各事件(括号中表示成绩所处的范围)：

A—— 优秀([90,100])， B—— 良好([80,90))，

C—— 中等([70,80))， D—— 及格([60,70))，

P—— 通过([60,100])， F—— 未通过([0,60)).

则 A，B，C，D，F 是两两不相容事件，P 与 F 互为对立事件，即有 $\overline{P} = F$；A，B，C，D 均为 P 的子事件，且有 $P = A \cup B \cup C \cup D$.

§1.1.2 随机事件的概率

对一个随机事件 A，在一次随机试验中，它是否会发生事先不能确定. 但可以问，在一次试验中，事件 A 发生的可能性有多大?并希望找到一个合适的数来表征事件 A 在一次试验中发生的可能性大小. 为此，本节首先引入频率，它描述了事件发生的频繁程度，进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数 —— 概率.

1. 频率及其性质

定义 1 若在相同条件下进行 n 次试验，其中事件 A 发生的次数为 $r_n(A)$，则称 $f_n(A) = \dfrac{r_n(A)}{n}$ 为事件 A 发生的频率.

易见，频率具有下述基本性质：

①$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

②$f_n(S) = 1$；

③ 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_n)$$

2. 概率的统计定义

定义 2　在相同条件下重复进行 n 次试验，若事件 A 发生的频率 $f_n(A) = \frac{r_n(A)}{n}$ 随着试验次数 n 的增大而稳定地在某个常数 $p(0 \leqslant p \leqslant 1)$ 附近摆动，则称 p 为事件的概率，记为 $P(A)$.

频率的稳定值是概率的外在表现，并非概率的本质. 据此确定某事件的概率是困难的，但当进行大量重复试验时，频率会接近稳定值. 因此，在实际应用时，往往是用试验次数足够大的频率来估计概率的大小，且随着试验次数的增加，估计的精度会越来越高.

3. 概率的公理化定义

任何一个数学概念都是对现实世界的抽象，这种抽象使得其具有广泛的适用性. 概率的频率解释为概率提供了经验基础，但是不能作为一个严格的数学定义，从概率论有关问题的研究算起，经过了近三个世纪的漫长探索历程，人们才真正完整地解决了概率的严格数学定义. 1933 年，苏联著名的数学家柯尔莫哥洛夫，在他的《概率论的基本概念》一书中给出了现在已被广泛接受的概率公理化体系，第一次将概率论建立在严密的逻辑基础上.

定义 3　设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，若 $P(A)$ 满足下列三个条件：

① 非负性：对每一个事件 A，有 $P(A) \geqslant 0$；

② 完备性：$P(S) = 1$；

③ 可列可加性：设 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

【例 1.4】　圆周率 $\pi = 3.1415926\cdots$ 是一个无限不循环小数，我国数学家祖冲之第一次把它计算到小数点后 7 位，这个记录保持了 1000 多年！以后有人不断把它算得更精确. 1873 年，英国学者沈克士公布了一个 π 的数值，它的数目在小数点后一共有 707 位之多. 但几十年后，曼彻斯特大学的费林生对它产生了怀疑. 他统计了 π 的 608 位小数，得到了表 1.2.

表 1.2 π 的小数的统计数

数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
出现次数	60	62	67	68	64	56	62	44	58	67

你能说出他产生怀疑的理由吗?

因为 π 是一个无限不循环小数,所以,理论上每个数字出现的次数应近似相等,或它们出现的频率应都接近于0.1,但7出现的频率过小.这就是费林产生怀疑的理由.

【例 1.5】 检查某工厂一批产品的质量,从中分别抽取10件、20件、50件、100件、150件、200件、300件检查,检查结果及次品频率列入表1.3中.

表 1.3 检查结果

抽取产品总件数(n)	10	20	50	100	150	200	300
次品数(μ)	0	1	3	5	7	11	16
次品频率(μ/n)	0	0.050	0.060	0.050	0.047	0.055	0.053

由表1.3看出,在抽出的 n 件产品中,次品数 μ 随着 n 的不同而取不同值,从而次品频率 $\frac{\mu}{n}$ 仅在0.05附近有微小变化.所以0.05是次品频率的稳定值.

【例 1.6】 从某鱼池中取100条鱼,做上记号后再放回鱼池中.现从该池中任意捉来40条鱼,发现其中两条有记号,问池内大约有多少条鱼?

解 设池内有 n 条鱼,则从池中捉到一条有记号鱼的概率为 $\frac{100}{n}$,它近似于捉到有记号鱼的频率 $\frac{2}{40}$,即 $\frac{100}{n} \approx \frac{2}{40} \Rightarrow n \approx 2000$,故池内大约有2000条鱼.

§1.1.3 古典概率

引例 一个纸桶中装有10个大小、形状完全相同的球.将球编号为 $1 \sim 10$,然后把球搅匀,蒙上眼睛从中任取一球.因为抽取时这些球被抽到的可能性是完全相同的,所以没有理由认为这10个球中的某一个会比另一个更容易抽得,也就是说,这10个球中的任一个被抽取的可能性均为 $\frac{1}{10}$.

这样一类随机试验是一类最简单的概率模型,它曾经是概率论发展初期主要的研究对象.

1. 古典概型

称具有下列两个特征的随机试验模型为古典概型:

① 随机试验只有有限个可能的结果；

② 每一个结果发生的可能性大小相同.

因而古典概型又称为等可能概型. 在概率论的产生和发展过程中，它是最早的研究对象，且在实际中也是最常用的一种概率模型. 它在数学上可表述为：

在古典概型的假设下，来推导事件概率的计算公式. 设事件 A 包含其样本空间 S 中的 k 个基本事件，即

$$A = \{e_{i_1}\} \cup \{e_{i_2}\} \cup \cdots \cup \{e_{i_k}\}$$

则事件 A 发生的概率为

$$P(A) = P(\bigcup_{j=1}^{k} e_{i_j}) = \sum_{j=1}^{k} P(e_{i_j}) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 中基本事件的总数}}$$

称此概率为古典概率. 这种确定概率的方法称为古典方法. 这就把求古典概率的问题转化为对基本事件的计数问题.

2. 计算古典概率的方法

基本计数原理：

(1) 加法原理

设完成一件事有 m 种方式，其中第 1 种方式有 n_1 种方法，第 2 种方式有 n_2 种方法，…，第 m 种方式有 n_m 种方法，无论通过哪种方法都可以完成这件事，则完成这件事的方法总数为 $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$.

(2) 乘法原理

设完成一件事有 m 个步骤，其中第 1 个步骤有 n_1 种方法，第 2 个步骤有 n_2 种方法，…，第 m 个步骤有 n_m 种方法；完成该件事必须通过每一步骤才算完成，则完成这件事的方法总数为 $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_m$.

(3) 排列组合方法

排列组合的基本公式有：排列公式、组合公式、二项式公式.

注意：古典概型的判断方法、古典概率的计算步骤：弄清试验与样本点；数清样本空间与随机事件中的样本点数；列出比式进行计算.

【例 1.7】 两批产品各 50 件，其中次品各 5 件，从这两批产品中各抽取 1 件. 问：(1)2 件都不是次品的选法有多少种？(2) 只有 1 件次品的选法有多少种？

解 (1) 用乘法原理，结果为：$C_{45}^1 \cdot C_{45}^1 = 45^2$.

(2) 结合加法原理和乘法原理得选法为：$C_5^1 \cdot C_{45}^1 + C_{45}^1 \cdot C_5^1 = 2 \times 5 \times 45 = 450$.

【例 1.8】 箱中有 6 个灯泡，其中 2 个次品 4 个正品，有放回地从中任取两次，每次取 1 个，试求下列事件的概率：(1) 取到的 2 个都是次品；(2) 取到的 2 个中正、次品各 1 个；(3) 取到的 2 个中至少有 1 个正品.

解 设 $A = \{$取到的 2 个都是次品$\}$，$B = \{$取到的 2 个中正、次品各 1 个$\}$，$C = \{$取到的 2 个中至少有 1 个正品$\}$.

(1) 样本点总数为 36，事件 A 包含的样本点数为 4，所以 $P(A)=4/36=1/9$.

(2) 事件 B 包含的样本点数为 $4\times2+2\times4=16$，所以 $P(B)=16/36=4/9$.

(3) 事件 C 包含的样本点数为 $36-2\times2=32$.

思考：① 若改为无放回地抽取两次呢？② 若改为一次抽取 2 个呢？

【例 1.9】 一个袋子中装有 10 个大小相同的球，其中 3 个黑球，7 个白球，求：

(1) 从袋子中任取 1 个球，这个球是黑球的概率；

(2) 从袋子中任取 2 个球，刚好 1 个白球 1 个黑球的概率以及 2 个球全是黑球的概率.

解 (1)10 个球中任取 1 个，共有 $C_{10}^1=10$ 种.

从而根据古典概率计算，事件 A"取到的球为黑球"的概率为

$$P(A)=\frac{C_3^1}{C_{10}^1}=\frac{3}{10}.$$

(2)10 个球中任取 2 个球的取法有 C_{10}^2 种，其中刚好 1 个白球，1 个黑球的取法有 $C_3^1\cdot C_7^1$ 种，2 个球均是黑球的取法有 C_3^2 种，记 B 为事件"刚好取到 1 个白球 1 个黑球"，C 为事件"两个球均为黑球"，则

$$P(B)=\frac{C_3^1C_7^1}{C_{10}^2}=\frac{21}{45}=\frac{7}{15},P(C)=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{3}{45}=\frac{1}{15}$$

【例 1.10】 将 3 个球随机放入 4 个杯子中，问杯子中球的个数最多为 1,2,3 的概率各是多少？

解 设 A、B、C 分别表示杯子中球的最多个数为 1、2、3 的事件. 可认为球是可以区分的，于是，放球过程的所有可能结果数为 $n=4^3$.

(1)A 所含的基本事件数：即是从 4 个杯子中任选 3 个杯子，每个杯子放入 1 个球，杯子的选法有 C_4^3 种，球的放法有 3!种，故 $P(A)=\dfrac{C_4^3\cdot 3!}{4^3}=\dfrac{3}{8}$.

(2)C 所含的基本事件数：由于杯子中球的个数最多为 3，即 3 个球放在同一个杯子中共有 4 种放法，故

$$P(C)=\frac{4}{4^3}=\frac{1}{16}$$

(3) 由于 3 个球放在 4 个杯子中的各种可能放法为事件 $A\cup B\cup C$，显然 $A\cup B\cup C=S$，且 A,B,C 互不相容，故 $P(B)=1-P(A)-P(C)=\dfrac{9}{16}$.

注：在用排列组合公式计算古典概率时，必须注意在计算样本空间 S 和事件 A 所包含的基本事件数时，基本事件数的多少与问题是排列还是组合有关，不要重复计数，也不要遗漏.

【例 1.11】 一个袋子中装有 $a+b$ 个球，其中 a 个黑球，b 个白球，每次随意地从中取出 1 个球(不放回)，求下列各事件的概率：