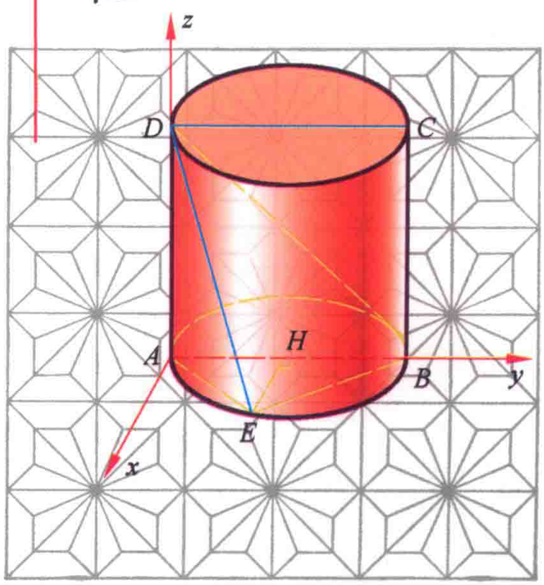
新编中学数学解题方法1000招丛书

立体几何

高中版 09

刘培杰数学工作室 编



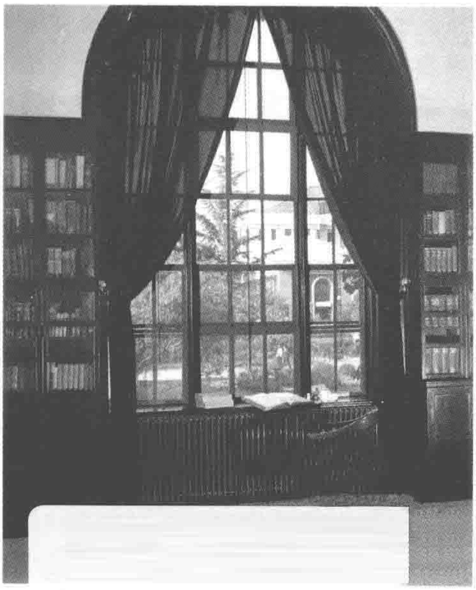
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高中版 09

新编中学数学解题方法1000招丛书

立体几何

刘培杰数学工作室 编



在这个世界上没有丑陋数学的容身之地。如果读者看到一个定理的证明显得丑陋，那他的明确责任就是找到一个更好的证明。不美的数学是不允许继续存在的。

C.A.Coulson

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书以专题的形式对高中数学中几体几何的重点、难点进行了归纳、总结，涵盖面广，内容丰富，可使学生深入理解立体几何概念，灵活使用解题方法，可较大程度地提高学生在各类考试中的应试能力。

本书适合中学生、中学教师以及数学爱好者阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

新编中学数学解题方法1000招丛书．立体几何/刘培杰数学工作室编．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2014．4

ISBN 978-7-5603-4657-1

Ⅰ．①新… Ⅱ．①刘… Ⅲ．①中学数学课—高中—题解 Ⅳ．①G634．605

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第051846号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 宋晓翠
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张13.5 字数310千字
版 次 2014年4月第1版 2014年4月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-4657-1
定 价 28.00元

总序

俗话说:“自古华山一条路”,如果将学数学比作爬山,那么精通之道也只有一条,那就是做题,做大量的习题.

华罗庚曾将光看书不做习题比作“入宝山而空返”.

著名数学家苏步青教授读书时为学好微积分,光是不定积分题就做了近万道.近年来,参加国际中学生数学奥林匹克的中国选手们,则更是因为遍解难题,才得以屡获金牌.正所谓“踏遍坎坷成大路”.

然而解数学题却不是一件容易的事,世界级解题专家、美国数学教育家波利亚曾不无悲观地说:“解题同钓鱼术一样永远不会学会”.但解题作为一项有规则的活动还是有一些方法可学,至少是可模仿的.华侨大学的王志雄教授曾说出这样的体会:“相对于问题似欲爆炸,题型不断更新,方法是较少也较稳定,如能较深入地、熟练地、灵活地掌握一些重要的解题方法,将使我们如乘快艇,得以优游于题海之上,达到数学王国的彼岸.”

近年来,由《美国数学月刊》前主编、美籍加拿大老数学家哈尔莫斯(Halmos, Paul Richard)一句“问题是数学的心脏”的惊人之语,将解题运动推向高潮.1987 年在上海举行的国际数学教育研讨会上,美国南伊利诺伊大学的 J·P·贝克(Baker)教授在他的以《解题教学——美国当前数学教学的新动向》为题的报告论文中指出:“如果说确有一股贯穿 20 世纪 80 年代初期的潮流的话,那就是强调解题(Problem Solving)的潮流”.

为了配合这股潮流，世界各国大量出版数学问题与解题的丛书，真是汗牛充栋，精品纷现．光是著名的斯普林格出版社（Springer Verlug）从 1981 年开始出版的一套高水平的《数学问题丛书》至今就出版了 20 多种．我国教育界及出版界十分重视这类书的出版工作，早在 1949 年 2 月，旧中国教育部曾举行会议为补救当时数学教育质量低下提出了四点建议，其中一条是提倡学生自己动手解题并“希望各大书局大量编印中学解题参考用书”．近些年我国各大出版社出版了一些中学数学教育方面的丛书，如江苏教育社的《数学方法论丛书》（13 册），北大出版社的《数学奥林匹克》系列及翻译的美国的《新数学丛书》，湖南教育社的《走向数学丛书》，但直至今天似乎还没有迹象表明要推出一套大型解题方法丛书．

哈尔滨工业大学出版社作为一“边陲小社”，出版这样一套丛书，尽管深感力所不逮，但总可算做一块引玉之砖．

最后编者有两点忠告：一是本丛书是一套入门书，不能包解百题，本丛书在编写之初曾以“贪大求全”为原则，试图穷尽一切方法，妄称“解题精技，悉数其间”．然而这实在是不可能的，也是不必要的．正所谓“有法法有尽，无法法无穷”．况且即使是已有的方法也不能生搬硬套．我国继徐光启和李善兰之后的清末第三大数学家华衡芳（1835—1902）曾指出：解题要随机应变，不能“执一而论”，死记硬背为“呆法”，“题目一变即无所用之矣”，须“兼综各法”以解之，方可有效．数学家惠特霍斯（Whitworth）说过“一般的解题之成功，在很大的程度上依赖于选择一种最适宜的方法”．

二是读者读本丛书一定要亲自动手解题．正如陕西师大罗增儒教授所指出：解题具有探索性与实战性的特征，解题策略要在解题中掌握．

最后，我们送给读者一句德国著名数学家普林斯海姆（1850—1941，Pringsheim，Alfred）的名言．

不下苦功是不能获得数学知识的，而下苦功却是每个人自己的事，数学教学方法的逻辑严格性并不能在较大程度上去增强一个人的努力程度．

愿读完本丛书后，解题对你不再是难事．

刘培杰

2013 年 12 月 15 日

于哈工大

⊙ 前言

台湾地区知名人士俞大维先生自谓平生受益的书仅一部半，即半部《论语》，教会处世做人道理；一部《几何原理》，给以敏锐逻辑思考和高度判断能力.

俞大维先生曾留学哈佛大学，其专业是数理逻辑.在国民党高级将领中算是一员儒将.抗日战争时期在重庆还专门为破译日军密码请教过华罗庚先生，他对《几何原理》如此推崇也体现了几何在培养人逻辑思维能力中不可或缺的地位.

立体几何是平面几何的继续，它对学习者有更高的智力要求，有人将人的智力分成了7大方面.其中空间想象能力是一大方面.据研究还是先天带来的，后天很难培养，但由于高考还考它，所以还要加强辅导和培训，正所谓知不可为而为之，不过由于高考对考生的要求不是很高，普通考生还是完全有可能后天补足的.

我们先概述一下立体几何的研究对象及其地位和作用.

立体几何的研究对象是空间图形.具体地讲，它主要研究空间图形的基本位置关系、主要性质、画法及其有关的度量问题.

首先，立体几何是平面几何的发展.

中学立体几何课程是在初中数学特别是平面几何课程的基础上开设的.进行立体几何教学常常需要综合运用初中数学特别是平面几何、锐角三角函数、解三角形的基础知识.

平面几何的研究对象是平面图形，平面图形是空间图形的特殊情况．因此，在立体几何中，平面几何的一系列内容得到了深化和发展．例如：

在平面几何中图形的基本元素是点和直线，而在立体几何中则增加了平面这个基本元素，这就使基本元素的相关位置由点与直线、直线与直线拓展到点与直线、点与平面、直线与直线、直线与平面和平面与平面；

在平面几何中两条直线的相关位置只有相交和平行两种，而在立体几何中由于突破了面的限制，两条直线的相关位置有了异面的可能，从而使我们对两条直线相关位置的认识进一步深化，对客观世界空间形式的认识更近乎真实．

关于平行的概念和平行线的传递性，在平面几何中不可能获得全面的认识，而在立体几何中我们不只认识了不在同一平面内多条直线的平行关系，对比异面直线的特性进一步完善了对直线平行关系的认识，而且从直线与平面平行、两个平面平行丰富了平行概念的内涵．

角的概念在立体几何中不只从相交直线的夹角拓展到两条异面直线所成的角，而且拓展到直线与平面所成的角和两个平面所成的角，使角的概念深化．

射影概念、距离概念在立体几何中也得到了进一步的拓展和深化．

在立体几何中有关立体图形的度量问题，既要运用空间图形的基本概念和相互关系，又要将立体几何问题回归为平面几何问题来求解，这就为平面几何、锐角三角函数和解三角形等提供了更加广阔的应用范围，对初中数学知识起到了加深理解、提高综合、灵活应用和分析、解决问题能力的作用．

在基本研究方法上，立体几何和平面几何也有一定的继承和发展的关系．例如：

不论是平面几何还是立体几何，都要运用推证通法来进行推理论证，但由于立体几何常用的定理数量少，空间图形往往可以分解为若干平面图形，所以在推证中间接证法和转化思想的运用有了进一步的发展；

不论是平面几何还是立体几何，都需要从对图形、模型或实物的观察、分析入手，通过逻辑方法进行严格的推证．但是在立体几何中，由于立体图形绘制在平面上时必然会产生畸变，这就要求在观察、分析立体图形直观图时有丰富的空间想象力，同时对于运用逻辑方法的要求也更加严格；

在平面几何里求长度和面积，可用割补法将欲解问题转化为已知问题来求解，立体几何沿用这一思想，并进一步发展得到展平、分解、作截面等方法，将转化思想进一步深化；

在处理直、曲矛盾上，平面几何运用了以直代曲无限逼近的方法，立体几何继承了这个思想，并进一步发展到无限细分求和的高度．

总之，立体几何是建立在初中数学主要是平面几何基础上的，同时深化、发

展了平面几何的内容，并为平面几何、锐角三角函数、解三角形以及初中代数等许多知识的综合、灵活运用提供了机会.

在深化、发展初中数学基础知识和综合、灵活运用这些知识的过程中，逻辑思维能力、运算能力、尤其是空间想象能力是必不可少的. 由此可见，立体几何在学生数学能力的发展中占有重要的地位，有着独特的作用.

其次，立体几何是后续课程中有关图形研究的基础.

立体几何的基础知识和通过学习立体几何培育起来的数学能力是学习解析几何、微积分、制图等后续课程中的前提和基础. 同时，如同立体几何深化、发展了平面几何的有关内容一样，上述后续课程的学习也深化、发展了立体几何和平面几何的某些概念和方法，使人们对空间图形的认识达到了更加完善的程度. 例如：

在解析几何里引进了坐标系，几何图形作为动点轨迹加以研究的方法才得以完善，相切的概念于是更加清晰，用代数方法研究几何图形把转化思想推向更高的层次；

在学习了微积分以后，立体几何中简单多面体和旋转体的表面积、体积公式的推导就有了理论依据，并使各种形体间的内在联系得到进一步的揭示；

在画法几何和制图学里，立体几何直观图画法规则得到深化、完善，分解结构的思想反映在画图上出现了视图，使空间想象从整体形象发展为整体与部分的辩证统一.

总之，立体几何是后续课程有关图形研究的基础，是几何学系统中承前启后的重要环节.

最后需要指出的是：立体几何是实用性较强的一门课程.

立体几何的基础知识和基本方法在解决实际问题中有着广泛的应用. 例如：

在检验、测定平面时常应用平面的基本性质；

在判断立柱与板面垂直时要利用直线与平面垂直的判定定理；

过平面外一点作与平面内一直线垂直相交的直线时常利用三垂线定理；

在计算几何体的表面积和体积时要用有关的表面积、体积公式.

在制造各种形状的容器或物体时要用有关的侧面展开图，等等.

总之，立体几何是中学数学中实用性较强、应用范围较广的一门课程.

综上所述，立体几何是平面几何的发展，又是后续课程中有关图形研究的基础；是培养学生数学能力特别是空间想象能力的极好素材，它在解决实际问题上的作用十分突出，是中学数学的重要组成部分.

中国古代虽在求体积中有著名的“祖恒原理”提出，但其教学体系还是学习

西方的.

1840 年,英国传教士麦都思在上海所创办的“墨海书馆”.除了传播宗教类读物之外,亦翻译、出版过一些自然科学类书籍.其中《续几何原本》是当时书馆最著名的译文科学书籍.

在本书即将成书之际浙江省宁波甬江职高的一位教师邵剑波发来了一篇论文,正好是属于用初等方法来研究四面体体积公式的,附于本书后,希望对喜欢在教学之余进行研究的高中数学教师和学有余力致力于进一步探讨的优秀高中生有所启发.

有一位网友用立体几何思维写了一个有趣的段子:“伸手触摸你身体的每一寸肌肤,与心的距离,总是相等.”看到这首诗,我想了一会儿,觉得作者爱上了一个球.

读完本书你也会爱上立体几何这门课的.

刘培杰

2013 年 12 月 15 日

于哈工大

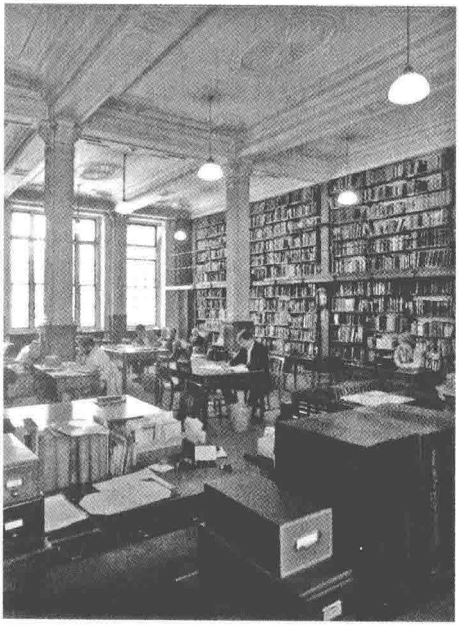
⊙

目录

第一编　解题方法编

第一编

解题方法编



怎样作立体几何中的辅助垂线

一、将垂线合理平移，产生辅助垂线

借助于题中已有的平面的垂线，结合题目将其平移至适当的位置，是产生辅助垂线的一种简捷途径.

例 1　如图 1 所示，在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧棱 $CC_1\perp$ 底面 ABC，$\angle ACB=120°$，$AC=a$，$BC=2a$，$C_1B_1=a$. 且异面直线 AB_1 与 CC_1 所成的角是 $60°$. 求二面角 B_1-AC-B 的正切值.

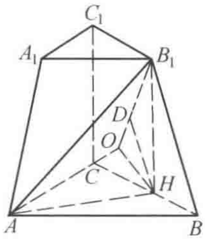


图 1

解析　求二面角的正切值，即求其平面角的正切值，宜用三垂线定理作其平面角. 为此，需作平面的垂线. 因题中的 CC_1 已垂直于二面角的一个半平面 ABC，故考虑过点 B_1 将其平移，即作 $B_1H\parallel CC_1$，交 CB 于 H，联结 AH. 这一平移不仅为作二面角的平面角奠定了基础，而且作出了异面直线 CC_1 与 AB_1 所成的角，此乃一箭双雕. 再过 H 作 $HO\perp AC$ 交 AC 的延长线于 O，联结 OB_1，则由三垂线定理知 $OB_1\perp AC$，故 $\angle B_1OH$ 是二面角 B_1-AC-B 的平面角，易得

$$\tan\angle B_1OH=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

例 2　四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 a 的菱形，且 $\angle ABC=60°$，$PC\perp$ 平面 $ABCD$，$PC=a$，E 是 PA 的中点，如图 2 所示. 求证：平面 $EBD\perp$ 平面 $ABCD$.

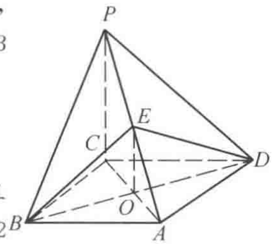


图 2

解析　要证面面垂直，需在一个面内找出或作出另一个平面的垂线. 据题中已有垂线 PC，它垂直于其中一个平面 $ABCD$，但不在另一个平面 EBD 内，由此联想到将其平移. 联结 AC，BD，设它们的交点为 O，则由菱形的性质知 $EO\parallel PC$. 至此易证结论成立.

二、巧用射影的性质，产生辅助垂线

例 3　如图 3 所示，两条异面直线 l_1，l_2 和两个平面 α，β，满足 $l_1\perp\alpha$，$l_1\perp\beta$，A，B 分别是垂足. l_2 分别交 α，β 于 C，D. E 是线段 CD 的中点. 若 EA，EC 与平面 α 所成的角相等，求证：平面 $EBC\perp$ 平面 ABC.

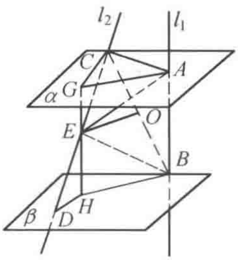


图 3

解析　需用面面垂直的判定定理加以证明，但目前很难在其中一个平面内找到另一个平面的垂线. 于是，对条件作综合分析，为了产生条件中的线面角，需作垂线，为此过 E 将平面 α，β 的垂线

l_1 平移，分别交 α，β 于 G，H. 联结 AG，CG，HD，HB，由 E 为 CD 的中点及 $\angle EAG=\angle ECG$ 易证得 $EC=EA=EB$. 至此，过 E 作 $EO\perp$ 平面 ABC，垂足为 O，则由射影的性质知，O 为 $\triangle ABC$ 的外心. 又 $\triangle ABC$ 是以 BC 为斜边的直角三角形，故 O 为 BC 的中点. 从而可知，平面 $EBC\perp$ 平面 ABC.

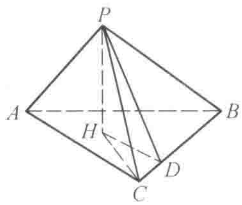


图 4

例 4 如图 4 所示，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$\angle BCA=90^\circ$，PC 与 AC，BC 所成的角均为 60°. 求 PC 与平面 ABC 所成的角.

解析 由线面角的定义知：需作 P 在平面 ABC 上的射影，为此，过 P 作 $PH\perp$ 平面 ABC，垂足为 H. 则由 $\angle PCA=\angle PCB$ 知 HC 为 $\angle ACB$ 的平分线，且 $\angle PCH$ 为所求. 再作 $HD\perp BC$ 于 D，联结 PD，则 $PD\perp BC$，记 $PC=x$，则依次可得 $CD=\frac{1}{2}x$，$HC=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，故 $\cos\angle PCH=\frac{\sqrt{2}}{2}$，从而 $\angle PCH=45^\circ$.

三、应用面面垂直的性质定理，产生辅助垂线

面面垂直的性质定理是产生辅助垂线的主要依据.

应用面面垂直的性质定理解决问题时，就必须首先在其中一个平面内找交线的垂线，它是应用定理的必由之路.

例 5 将矩形 $ABCD(AB<BC)$ 沿对角线 BD 折起后有平面 $ABC\perp$ 平面 BCD，如图 5 所示. 求证：$AB\perp$ 平面 ACD.

解析 应用面面垂直的性质定理是证明的关键. 需在两个平面内找它们交线的垂线，由 $CD\perp BC$ 便知 $CD\perp$ 平面 ABC. 又 $AB\subset$ 平面 ABC，故 $CD\perp AB$，再据 $AD\perp AB$ 便证结论成立.

当面面垂直且不易在两个平面内找到它们交线的垂线时，则应根据需要在其中一个面内作交线的垂线，创造条件应用定理.

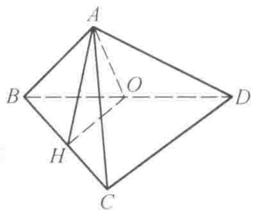


图 5

例 6 在例 5 的条件下，若二面角 $C-AB-D$ 等于二面角 $A-BD-C$. 试求 $AB:BC$ 的值.

解析 作二面角的平面角是解题的突破口. 由例 5 易知二面角 $C-AB-D$ 的平面角是 $\angle CAD=\alpha$. 而作二面角 $A-BD-C$ 的平面角，应先过 A 作平面 BCD 的垂线，这就需要利用面面垂直的性质定理. 可见在平面 ABC 内找不到交线 BC 的垂线. 故需过 A 作 $AH\perp BC$ 于 H，如图 5 所示，则必有 $AH\perp$ 平面 BCD. 再作 $HO\perp BD$ 于 O，联结 AO，则 $AO\perp BD$. 故二面角 $A-BD-C$ 的平面角是 $\angle AOH=\beta$. 令 $AB=a$，$BC=b$，则易得 $\sin\alpha=\frac{a}{b}=x$，$\sin\beta=\sqrt{1-x^4}$，由条件知 $\sin\alpha=\sin\beta$，即 $x=\sqrt{1-x^4}$，解得 $x=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

挖掘隐含于题中或图中的面面垂直关系，并借此产生辅助垂线，不仅是知识的深层次

应用，而且也是思维深刻性和空间想象能力的充分展示.

例 7 如图 6 所示，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=3$，$AA_1=3\sqrt{2}$，D 在 A_1C_1 上，且 BC_1 // 平面 AB_1D. 求二面角 A_1-AB_1-D 的正弦值.

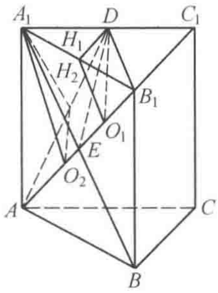


图 6

解析 联结 A_1B 交 AB_1 于 E，联结 ED，由线面平行的性质定理知 ED // BC_1，从而 D 为 A_1C_1 的中点. 要作二面角 A_1-AB_1-D 的平面角，需过 D 向平面 AA_1B_1 作垂线，或过 A_1 向平面 AB_1D 作垂线，为此需挖掘隐含在题中的面面垂直关系，即挖掘过 D 且垂直于 AA_1B_1 的平面，或过 A_1 且垂直于平面 AB_1D.

易发现平面 $DA_1B_1\perp$ 平面 AA_1B_1，平面 $A_1AD\perp$ 平面 B_1AD. 这样作 $DH_1\perp A_1B_1$ 于 H_1，$H_1O_1\perp AB_1$ 于 O_1，联结 O_1D，或作 $A_1H_2\perp AD$ 于 H_2，$H_2O_2\perp AB_1$ 于 O_2，联结 O_2A_1，可证 $\angle DO_1H_1$ 与 $\angle A_1O_2H_2$ 都是所求二面角的平面角. 可求其正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

四、应用化归思想，产生辅助垂线

由题设条件直接过某点不易向平面作出利于解题的垂线时，宜考虑利用转化思想作垂线，即利用有关知识转移点的位置后再作垂线，它是思维灵活性的重要体现.

1. 利用线面平行实施化归.

例 8 在例 2 的条件下，求点 E 到平面 PBC 的距离.

解析 直接过 E 向平面 PBC 作垂线较繁琐，若注意到 EO // 平面 PBC，则可化归为求点 O 到平面 PBC 的距离. 如图 2 所示，因易证平面 $ABCD\perp$ 平面 PBC，故只须作 $OH\perp BC$ 于 H，便有 $OH\perp$ 平面 PBC，得 $OH=\frac{\sqrt{3}}{4}a$，即为所求.

2. 利用比例性质实施化归.

例 9 在例 1 的条件下，求点 B 到平面 AB_1C 的距离.

解析 如图 1 所示，若过 B 直接向平面 AB_1C 作垂线，则必然思维受阻. 但注意到 H 是平面 AB_1C 的斜线段 BC 的中点，故根据比例性质知 B 到平面 AB_1C 的距离是 H 到平面 AB_1C 距离的 2 倍，至此便将问题化归为过 H 向平面 AB_1C 作垂线. 因在例 1 的求解过程中隐含着过 H 且垂直于平面 AB_1C 的平面 HB_1O，故作 $HD\perp OB_1$ 于 D，便有 $HD\perp$ 平面 AB_1C. 可求得 $HD=\frac{\sqrt{21}}{7}a$，从而有点 B 到平面 AB_1C 的距离为 $\frac{2\sqrt{21}}{7}a$.

怎样用体积方法解立体几何题

一、关于体积方法

所谓体积方法，就是在处理一些几何问题时，以考虑体积作为论证(或者计算)的出发点.用体积法证题的基本点在于用不同的方法计算同一块体积，列出等式，从而建立所考虑的量之间的关系.

二、体积法解题例析

体积法的应用是比较广泛的，可以解决立体几何若干方面的问题，经常被大家运用来求点到平面的距离，异面直线间的距离.这两类例子就不再赘述了.下面通过一些例子，进一步发掘体积法在其他方面的应用，显示其独特的威力.

例1 如图1所示，已知正四棱锥侧棱和底面所成的角为 α，相邻两侧面所成的二面角为 β.求证：$\cos\beta=\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha-2}$.

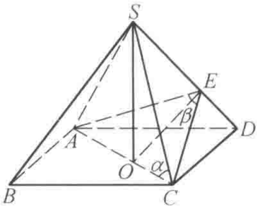


图1

证明 设 $SC=a$，$SO\perp$ 平面 AC 于 O，则 $SO=a\sin\alpha$，$AC=2a\cos\alpha$.在 $\triangle AEC$ 中，$\angle AEC$ 是二面角 $C-SD-A$ 的平面角，O 为 AC 的中点，$AE=EC$，则 $OE\perp AC$，于是 $OE=\dfrac{a\cos\alpha}{\tan\dfrac{\beta}{2}}$.

因为 $V_{S-ACD}=V_{S-AEC}+V_{D-ACE}$，所以

$$\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot SO=\frac{1}{3}S_{\triangle ACE}\cdot SD$$

故

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}(2a\cos\alpha)^2a\sin\alpha=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a\cos\alpha\cdot\frac{a\cos\alpha}{\tan\dfrac{\beta}{2}}\cdot a$$

解得 $\tan\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{1}{\sin\alpha}$.平方得 $\tan^2\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{1}{1-\cos^2\alpha}$，即 $\dfrac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}=\dfrac{1}{1-\cos^2\alpha}$，解得 $\cos\beta=\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha-2}$.

此题用体积法证，简捷利落，别具一格.此题的解答表明，通过体积容易建立有关量之间的关系式，用体积法可计算一些多面体中的二面角，侧棱与底面的夹角.

例2 设四面体 $P-ABC$ 的侧棱长分别是 a,b,c，并且两两互相垂直.

(1) 由顶点 P 作底面 ABC 的高 h，求证：$\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$.

(2) 设 M 为 $\triangle ABC$ 上一点，该点到面 PBC,PCA,PAB 的距离分别是 x,y,z.求 $\dfrac{xyz}{abc}$ 的最大值.

证明 (1) 如图2所示，设 $\triangle PAB,\triangle PBC,\triangle PAC$ 的面积分别为 S_1,S_2,S_3，它们在底