

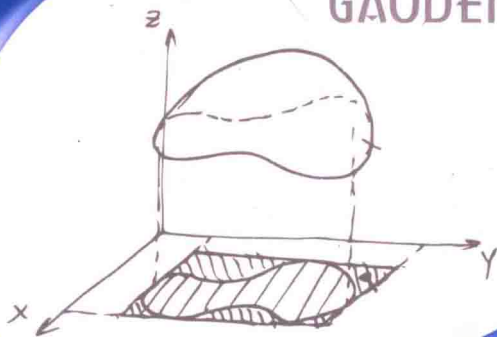


全国高职高专教育“十二五”规划教材

高等数学

主编 王 彬 张学茂

GAODENG SHUXUE



东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

全国高职高专教育“十二五”规划教材

高等数学

主 审	邓友祥	杨俊林	
主 编	王 彬	张学茂	
副主编	潘小明		
参 编	管训贵	阚玉峰	王宝平
	杨 琴	曹春芳	于圣斌

东南大学出版社
· 南京 ·

内 容 简 介

本教材按照“必须、够用、兼顾发展”的原则,兼顾各专业的不同层次需求精心组织内容,主要包括:函数的极限与连续、导数与微分、不定积分和定积分、常微分方程初步、概率论初步、数理统计基础、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学基础、多元函数积分学基础、线性代数初步、无穷级数基础等十一章。内容编排力求在知识体系相对完整的前提下,注重实质、删繁就简、避难从易、强化应用。

实际使用时,教者可根据课时安排情况和专业培养要求等进行适当选择。比如,文科类专业可选择第一至第六章的有关内容;理工类专业可在前六章的基础上,适当选学后五章的有关内容。

本教材可作为高职高专院校、成人高校及本科院校开办的二级院校各专业的数学教材,同时也可作为数学爱好者的自学用书。

本书可作为高职高专院校高等数学课程的教材,也可作为“专转本”考生的复习用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/王彬,张学茂主编. —南京:东南大学出版社,2012.7

全国高职高专教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5641-3534-8

I. ①高… II. ①王… ②张… III. ①高等数学—高等职业教育—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 107751 号

高等数学

出版发行:东南大学出版社

社 址:南京四牌楼 2 号 邮编:210096

出 版 人:江建中

网 址:<http://www.seupress.com>

经 销:全国各地新华书店

印 刷:江苏海信印务有限公司

开 本:787mm×1092mm 1/16

印 张:20

字 数:480 千字

版 次:2012 年 7 月第 1 版

印 次:2012 年 7 月第 1 次印刷

印 数:1—3000 册

书 号:ISBN 978-7-5641-3534-8

定 价:36.00 元

前 言

高等数学因其应用的广泛性和思想方法的重要性,已经成为各高校几乎所有专业都要开设的一门基础理论课程或公共平台课程。以学生为本,编写一本理想的高等数学教材,使初等数学基础比较薄弱的学生也能很好地掌握高等数学的思想方法,领略其精彩与奥妙,不仅是高等院校进一步提高数学课程地位,强化数学课程内涵建设,提高人才培养质量的现实需要,更是高等教育深入贯彻落实科学发展观,不断深化课程与教学改革的一个重要举措。

为了实现这一“理想”目标,我们作了以下尝试:

1. 以“拓宽基础、强化能力、立足应用”为着力点,结合学生后续学习与实际应用的需要,顺应高职高专课程与教学内容体系改革方向,将传统的高等数学内容进行了必要的整合,摒弃深奥的理论探究和繁杂的数学运算,力求体现“联系实际、深化概念、注重应用、重视创新、提高素质”的特色。

2. 体系编排循序渐近,行文表述通俗易懂。针对高职高专学生认知水平,借助几何直观或专业应用案例,导出相应的数学概念,在具体内容展开时,对思想性和应用性较强的内容作了重点介绍,尽量使用描述性语言或几何图示阐述概念、定理或性质,避免抽象的论述和复杂的论证与推导,促进学生对基础知识的理解,强化学生的数学应用意识,培养学生的数学应用能力,激发学生学习数学的兴趣。

3. 重视数学思想方法和学法指导。教材结合具体案例的剖析,渗透了“以有限代无限”、“以不变代变”、“以直代曲”、“微元分析”等重要的高等数学思想方法,旨在培养学生的数学素养,强化辩证唯物观。在基础知识和思想方法的运用中,重视数学模型的构建,讲究通性通法,彰显高等数学的工具性,培养学生综合应用能力。在每一章节的开头设置相应的导引和学习目标,使学生初步了解知识体系与实际应用之间的相互联系,找准知识切入点,把握学习重点。对于应用性、综合性较强的习题、复习题,在附录中的参考答案中,给出了必要的指导。

4. 开设数学实验,注重数学软件的应用。涉及函数图像描绘、数值计算、符号运算等内容,适当安排相应的数学实验,着重介绍 Mathematica 软件的操作及应用,充分展示计算机技术解决数学问题的优越性,淡化运算技巧的训练,培养学生的创新意识和创新能力,激发学生的求知欲望,增强学生学好数学、用好数学的信心。

本教材由长期在教学一线、具有丰富实践经验的老师编写,王彬、张学茂、潘小明、管训贵、阚玉峰、王宝平、杨琴、曹春芳、于圣斌等同志参编,邓友祥与杨俊林两位教授主审。

本教材的出版发行,得到了泰州师范高等专科学校、东南大学出版社等单位领导的大力支持和许多朋友的热心帮助,在此表示衷心感谢!

限于编者水平,教材中若有不当之处,恳请同仁和读者给予批评指正。

编者

2012年4月

目 录

第一章 函数的极限与连续	1
1.1 初等函数	1
习题 1.1	9
1.2 函数的极限	11
习题 1.2	15
1.3 函数极限的运算法则	16
习题 1.3	19
1.4 两个重要极限与无穷小的比较	20
习题 1.4	23
1.5 函数的连续性	24
习题 1.5	29
1.6 数学实验一 用 Mathematica 进行计算	29
习题 1.6	32
复习题 1	33
第二章 导数与微分	35
2.1 导数的概念	35
习题 2.1	38
2.2 函数的求导法则	39
习题 2.2	44
2.3 高阶导数	45
习题 2.3	47
2.4 函数的微分	48
习题 2.4	52
2.5 微分中值定理与洛必达法则	53
习题 2.5	57
2.6 导数的应用	58
习题 2.6	63
2.7 数学实验二 用 Mathematica 求导数与绘图	64
习题 2.7	66
复习题 2	67

第三章 不定积分和定积分	68
3.1 不定积分的概念与基本性质	68
习题 3.1	72
3.2 换元积分法和分部积分法	73
习题 3.2	80
3.3 定积分的概念与基本性质	81
习题 3.3	84
3.4 定积分的计算	85
习题 3.4	89
3.5 定积分的应用	90
习题 3.5	98
3.6 广义积分	98
习题 3.6	103
3.7 数学实验三 用 Mathematica 求积分	103
习题 3.7	105
复习题 3	105
第四章 常微分方程初步	107
4.1 常微分方程的基本概念	107
习题 4.1	109
4.2 一阶微分方程的解法	110
习题 4.2	113
4.3 可降阶的高阶微分方程的解法	114
习题 4.3	115
4.4 n 阶常系数线性微分方程的解法	116
习题 4.4	119
4.5 数学实验四 用 Mathematica 解方程(组)	120
习题 4.5	121
复习题 4	122
第五章 概率论初步	124
5.1 随机事件	124
习题 5.1	127
5.2 事件的概率	128
习题 5.2	132
5.3 事件相互独立性与全概率	133
习题 5.3	137
5.4 随机变量及其分布	138
习题 5.4	144
5.5 随机变量的数字特征	145

习题 5.5	148
复习题 5	149
第六章 数理统计基础	150
6.1 简单的随机样本	150
习题 6.1	152
6.2 参数估计	152
习题 6.2	157
6.3 假设检验	158
习题 6.3	161
复习题 6	161
第七章 空间解析几何与向量代数	163
7.1 空间解析几何简介	163
习题 7.1	169
7.2 向量及其线性运算	170
习题 7.2	175
7.3 向量的数量积与向量积	175
习题 7.3	179
7.4 平面、直线及常见二次曲面	179
习题 7.4	186
复习题 7	187
第八章 多元函数微分学基础	189
8.1 多元函数的极限与连续	189
习题 8.1	192
8.2 偏导数与全微分	192
习题 8.2	196
8.3 复合函数与隐函数的微分法	197
习题 8.3	201
8.4 多元函数微分学的几何应用	201
习题 8.4	207
复习题 8	207
第九章 多元函数积分学基础	208
9.1 二重积分的概念与性质	208
习题 9.1	211
9.2 二重积分的计算	212
习题 9.2	216
9.3 二重积分的应用	217

习题 9.3	220
9.4 数学实验五 用 Mathematica 计算多元微积分	220
习题 9.4	222
复习题 9	222
第十章 线性代数初步	224
10.1 行列式的概念与性质	224
习题 10.1	231
10.2 克莱姆法则	232
习题 10.2	236
10.3 矩阵的概念及运算	237
习题 10.3	243
10.4 矩阵的秩与初等变换	243
习题 10.4	249
10.5 线性方程组的矩阵求解	250
习题 10.5	254
10.6 数学实验六 用 Mathematica 进行矩阵运算	255
习题 10.6	259
复习题 10	259
第十一章 无穷级数基础	260
11.1 数项级数的概念与性质	260
习题 11.1	263
11.2 数项级数的审敛法	264
习题 11.2	268
11.3 幂级数	269
习题 11.3	272
11.4 函数的幂级数展开	273
习题 11.4	277
复习题 11	277
附录 I 基本初等函数的图像与性质一览表	279
附录 II 参考答案	281
附录 III 几种常见的概率密度分布图	302
附录 IV 常用分布表	303
参考文献	308

第一章 函数的极限与连续

微积分学是高等数学的重要内容,函数是微积分学的主要研究对象,函数的极限和连续是研究微积分学的重要基础.本章将在复习函数基本知识的基础上,研究函数的极限与连续等有关问题.

1.1 初等函数

学习目标

学习完本节后,你应该能够:

- 理解掌握函数的概念及基本性质
- 熟练掌握基本初等函数的图像与性质
- 理解分段函数、复合函数和反函数的概念
- 会建立函数关系式解简单实际问题

在中学里已经学过函数的概念及其基本性质,为了更好地学习高等数学,先简要回顾一下函数的有关知识.

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义 1 设有两个变量 x 和 y , D 是一个给定的非空数集,若对于 D 中每一个数 x , 变量 y 按照一定的对应法则 f 总有确定的数值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作:

$$y = f(x), x \in D.$$

x 称为自变量, y 称为因变量. 自变量 x 的变化范围 D 称为函数的定义域, 因变量 y 的变化范围称为函数的值域, 有时也记作

$$f(D) = \{y | y = f(x), x \in D\}.$$

若 $x_0 \in D$, 则称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处有定义, 函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的函数值记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

表示函数常用的方法有:解析法、图像法、列表法.

根据定义,函数有三个要素:定义域、值域和对应法则.这是判断两个函数是否相同的依据.研究解析法表示的函数,如果没有给出它的定义域,那么其定义域就是使得解析式有意义的一切自变量的集合,值域则由定义域和对应法则所完全确定.判断这样的两个函数是否相同,只要判断它们的定义域和对应法则这两个要素是否相同即可.

对于数轴上某一段对应的数集,通常用区间来表示.如 $a \leq x \leq b$,表示为 $x \in [a, b]$,称为闭区间; $a < x < b$,表示为 $x \in (a, b)$,称为开区间.以后,函数的定义域和值域通常用区间表示.

例 1 下列函数与函数 $f(x) = |x|$ 相同的是_____.

① $y = \sqrt{x^2}$; ② $y = \frac{x^2}{x}$; ③ $y = e^{\ln x}$; ④ $y = \log_2 2^x$.

分析:对于用解析法表示的函数,判断它们是否相同,应紧扣两点:(1)定义域是否相同;(2)对应法则即解析式是否相同(指解析式化简后的本质相同).

解 ②与 $y = x(x \neq 0)$ 相同,③与 $y = x(x > 0)$ 相同,④与 $y = x$ 相同,①与 $y = |x|$ 相同.所以,应选①.

例 2 求函数 $y = \frac{1}{4-x^2} + \sqrt{x+2}$ 的定义域.

解 要使解析式有意义,须有 $\begin{cases} 4-x^2 \neq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$

解之,得 $x \neq \pm 2, x \geq -2$

故该函数的定义域为 $(-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

例 3 设 $f(x) = 3x^2 - 5$, 求 $f(0), f\left(\frac{1}{a}\right)$.

解 $f(0) = 3 \times 0^2 - 5 = -5, \quad f\left(\frac{1}{a}\right) = 3\left(\frac{1}{a}\right)^2 - 5 = \frac{3-5a^2}{a^2}.$

例 4 设 $f(x+3) = \frac{x+1}{x+2}$, 求 $f(x)$.

解 令 $x+3 = t$, 则 $x = t-3$, 于是 $f(t) = \frac{(t-3)+1}{(t-3)+2} = \frac{t-2}{t-1}$

故 $f(x) = \frac{x-2}{x-1}.$

2. 分段函数

定义 2 有些函数把定义域划分为几部分,分别用不同的式子分段表示,这类函数称为分段函数.

常见的分段函数有:

(1) 绝对值函数 $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x > 0, \\ 0 & x = 0, \\ -x & x < 0, \end{cases}$ 图像如图 1.1.1.

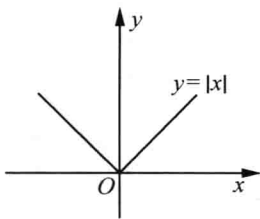


图 1.1.1

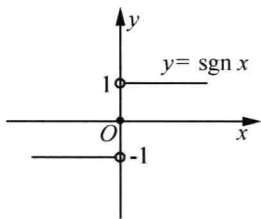


图 1.1.2

(2) 符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x = 0, \\ -1 & x < 0, \end{cases}$ 图像如图 1.1.2.

显然, $x = |x| \operatorname{sgn} x$.

(3) 取整函数 $y = [x]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 图像(如图 1.1.3)为阶梯曲线(在 x 为整数值处, 图形发生跳跃, 跃度为 1).

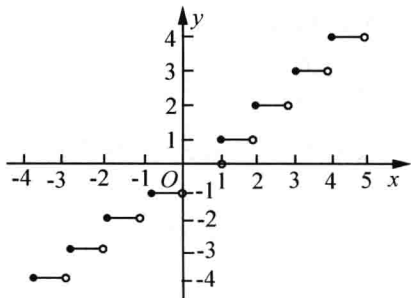


图 1.1.3

(4) 狄利克雷函数 $y = D(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 是有理数时,} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 是无理数时.} \end{cases}$

求分段函数的函数值时, 应把自变量的值代入相应范围的表达式中去计算.

例 5 已知函数 $y = f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1+x, & x > 1 \end{cases}$, 求 $f(\frac{1}{2})$ 及 $f(\frac{1}{t})$.

解 $f(\frac{1}{2}) = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, $f(\frac{1}{t}) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{t}, & 0 < t < 1, \\ \frac{2}{\sqrt{t}}, & t \geq 1. \end{cases}$

3. 反函数

定义 3 设函数 $y = f(x)$, 其定义域为 D , 值域为 M . 如果对于 M 中的每一个值 y , 都可以从关系式 $y = f(x)$ 确定唯一的 $x(x \in D)$ 值与之对应, 这样就确定了一个以 y 为自变量的函数, 记为 $x = \varphi(y)$ 或 $x = f^{-1}(y)$, 这个函数就叫做函数 $y = f(x)$ 的反函数, 它的定义域为 M , 值域为 D .

习惯上用 x 表示自变量, y 表示因变量. 因此函数 $y = f(x)$ 的反函数通常表示为 $y = f^{-1}(x)$.

根据定义, 函数 $y = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上没有反函数, 但在 $(-\infty, 0]$ 及 $[0, +\infty)$ 上分别有反函数 $y = -\sqrt{x}$ 及 $y = \sqrt{x}$.

指数函数 $y = e^x, x \in (-\infty, +\infty)$ 与对数函数 $y = \ln x, x \in (0, +\infty)$ 互为反函数, 它们的图像关于直线 $y = x$ 对称, 这一性质具有一般性, 即函数 $y = f(x)$ 的图像与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称 (如图 1.1.4).

求反函数的一般步骤是: 从 $y = f(x)$ 中解出 x , 得到 $x = f^{-1}(y)$, 并说明 y 的取值范围 (即原来函数的值域), 再将 x, y 互换, 则 $y = f^{-1}(x)$ 就是 $y = f(x)$ 的反函数.

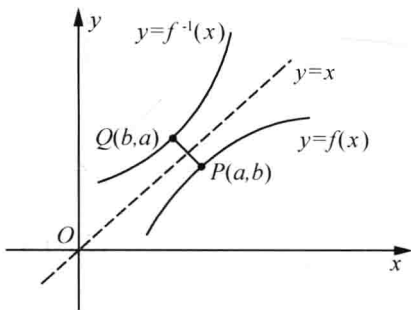


图 1.1.4

例 6 求 $y = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1, 0]$ 的反函数.

解 由 $y = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1, 0]$ 得 $x = -\sqrt{1-y^2}, y \in [0, 1]$

故所求函数的反函数为 $y = -\sqrt{1-x^2}, x \in [0, 1]$.

三角函数在整个定义域上不存在反函数, 但在它们的单调区间上均存在反函数. 为了研究的需要, 我们把 $y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的反函数记为 $y = \arcsin x$, 称为**反正弦函数**; 把 $y = \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上的反函数记为 $y = \arccos x$, 称为**反余弦函数**; 把 $y = \tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的反函数记为 $y = \arctan x$, 称为**反正切函数**; 把 $y = \cot x$ 在 $(0, \pi)$ 上的反函数记为 $y = \operatorname{arccot} x$, 称为**反余切函数**.

二、函数的几种特性

1. 函数的单调性

定义 4 如果对于区间 (a, b) 内的任意两点 x_1 及 x_2 ,

当 $x_1 < x_2$ 时, 总有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内**单调增加**;

当 $x_1 < x_2$ 时, 总有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内**单调减少**.

区间 (a, b) 称为**单调区间**. 在定义域上单调增加 (单调减少) 的函数称为**单调函数**.

2. 函数的奇偶性

定义 5 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , D 关于原点对称. 对于任何 $x \in D$,

若 $f(-x) = f(x)$ 恒成立, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上是**偶函数**;

若 $f(-x) = -f(x)$ 恒成立, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上是**奇函数**.

奇、偶函数图像的特点: 奇函数的图像关于原点对称; 偶函数的图像关于 y 轴对称.

由此可得如下结论:

(1) 奇函数在关于原点对称的区间上的单调性相同, 偶函数在关于原点对称的区间上的单调性相反.

(2) 在公共定义域内, ① 两个奇函数的和 (差) 是奇函数, 两个奇函数的积 (商) 是偶函数;

② 两个偶函数的和 (差)、积 (商) 是偶函数; ③ 一个奇函数与一个偶函数的积 (商) 是奇函数.

例 7 判断下列函数的奇偶性,并说明理由.

(1) $f(x) = x^2 - |x| + 1, x \in [-1, 4]$;

(2) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

分析:判断函数的奇偶性,首先要检验其定义域是否关于原点对称,若关于原点对称,再严格按照奇偶性的定义进行推理判断.

解 (1) 由于 $f(x) = x^2 - |x| + 1, x \in [-1, 4]$ 的定义域不是关于原点对称的区间,因此, $f(x)$ 既不是奇函数,也不是偶函数.

(2) $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$, 关于原点对称

$$\therefore f(-x) = \ln \frac{1-x}{1+x} = -\ln \frac{1+x}{1-x} = -f(x)$$

$\therefore f(x)$ 是奇函数.

3. 函数的有界性

定义 6 如果存在常数 $M > 0$, 对函数 $f(x)$ 在某一区间 I 内的任何 x , 总有 $|f(x)| \leq M$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内有界; 否则称为无界.

一个函数, 如果在它的定义域内有界, 称之为有界函数; 否则称之为无界函数.

有界函数的图像必位于两条直线 $y = M$ 与 $y = -M$ 之间.

例如, 函数 $y = \sin x$ 是有界函数, 因为在它的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内有 $|\sin x| \leq 1$.

注意: 有界函数在它定义域的任何子集中都有界; 无界函数在它定义域的某些子集中也可能有界.

例如, 函数 $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内是无界的, 而在区间 $[1, +\infty)$ 上则是有界的.

4. 函数的周期性

定义 7 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 若存在一正数 T , 对于任何 $x \in D$ 有 $x + T \in D$, 且 $f(x + T) = f(x)$ 成立, 则称函数 $y = f(x)$ 为周期函数, T 为周期. 若周期函数存在最小正周期, 则称此最小正周期为基本周期, 简称周期.

例如, $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的最小正周期是 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$, $y = A \tan(\omega x + \varphi)$ 的最小正周期是 $T = \frac{\pi}{|\omega|}$.

并非所有的周期函数都有最小正周期.

例如, 函数 $f(x) = c$ (c 为常数) 及狄利克雷函数 $y = D(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 是有理数时} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 是无理数时} \end{cases}$ 均为周期函数, 但没有最小正周期.

5. 基本初等函数

以后研究的函数问题, 一般都可归结为研究常量函数 $y = c$, 幂函数 $y = x^\mu$ (μ 为实数), 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$), 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$), 三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$, 反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \text{arccot } x$, 这

些函数统称为基本初等函数.

基本初等函数的图像及其性质请参见附录 I.

6. 复合函数

定义 8 设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1 , 函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 D_2 , 值域为 M , 且 $M \subset D_1$. 若对于 D_2 内任意一点 x , 有确定的值 $u = \varphi(x)$ 与之对应, $u = \varphi(x) \in M \subset D_1$, 又有确定的值 y 与之对应, 这样就确定了一个新函数, 此函数称为 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 构成的复合函数, 记为

$$y = f[\varphi(x)], x \in D_1.$$

其中, u 称为中间变量.

例 8 已知 $y = f(u) = \ln u, u = g(x) = \sin x - 1$, 两者能否复合为函数 $y = f[g(x)]$?

解 不能. 这是因为 $g(x) = \sin x - 1 \leq 0$, $g(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域之交集是空集.

例 9 若 $f(x) = (x-1)^2, g(x) = 3x+1$, 求 $g[f(x)], f[g(x)]$.

解 $g[f(x)] = g[(x-1)^2] = 3(x-1)^2 + 1 = 3x^2 - 6x + 4$

$$f[g(x)] = f[3x+1] = [(3x+1)-1]^2 = 9x^2$$

为了研究方便, 往往把一个比较复杂的函数分解成几个基本初等函数的复合. 要把复合函数分解好, 必须准确把握基本初等函数的表达式. 如:

函数 $y = \sqrt[4]{\sin x}$ 由 $y = \sqrt[4]{u}, u = \sin x$ 复合而成.

函数 $y = e^{\arctan \frac{1}{\sqrt{x}}}$ 由 $y = e^u, u = \arctan v, v = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 复合而成.

7. 初等函数

定义 9 由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合运算所构成的函数称为初等函数.

例如: 函数 $y = \sin^2(3x+1), y = \sqrt{x^3}, y = \frac{\lg x + 2 \tan x}{10^x - 1}$ 都是初等函数.

分段函数未必不是初等函数. 例如, 函数 $y = \begin{cases} -x & x \leq 0, \\ x & x > 0 \end{cases}$ 是分段函数, 但是它可以看

成是由 $y = \sqrt{u}, u = x^2$ 复合而成的, 所以它也是初等函数.

三、数学模型中的函数构造

著名数学家怀特海曾说: “数学就是对于模式的研究.” 函数模型是数学模型的一种, 描述(反映)的是客观事物间的对应关系, 它是指对于现实世界的某一特定研究对象, 为了某个特定的目的, 在做了一些必要的简化假设, 运用适当的数学工具并通过数学语言表述出来的一个数学结构.

数学中的各种基本概念, 都是以各自相应的现实原型作为背景而抽象出来的. 许多数学公式、方程式、定理、理论体系等等, 都是一些具体的数学模型.

应用函数模型解决实际问题, 首先要把实际问题翻译成数学语言, 然后分析实际问题所

包含的数学关系,并把实际问题抽象成数学问题,建立起相应的数学模型,再利用数学知识对数学模型进行分析、研究,得到数学结论,然后再把数学结论返回到实际问题中去,其思路和方法可表示如下:

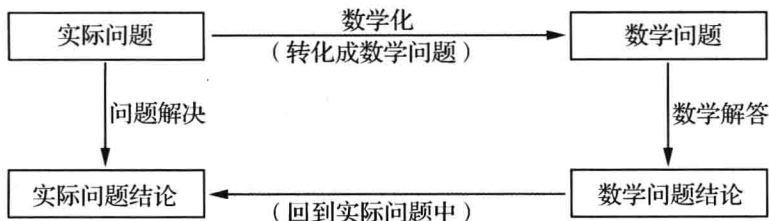


图 1.1.5

构建函数模型需要将问题放到实际背景中考虑,将具体的生产、生活问题,转化为数学问题;然后引进变量,建立函数关系,寻求问题的解决方案.

例 10 某租赁公司拥有汽车 100 辆,当每辆车的月租金为 3 000 元时,可全部租出,而每辆车的月租金每增加 50 元,未租出的车将会增加 1 辆.租出的车每辆每月需要维护费 150 元,未租出的车每辆每月需维护费 50 元,二者都由租赁公司支付.

(1) 当每辆车的月租金定为 3 600 元时,能租出多少辆车?

(2) 当每辆车的月租金定为多少元时,租赁公司的月收益最大?最大月收益是多少?

分析:选定月租金为自变量,建立目标函数,月租金为 x 元时,计算出提高了多少个 50 元,即可求出租出的车辆数和未租出的车辆数.

解 (1) 当每辆车的月租金定为 3 600 元时,未租出的车辆数为 $\frac{3\,600 - 3\,000}{50} = 12$,所以能租出 88 辆车.

(2) 设每辆车的月租金定为 x 元,则租赁公司的月收益为

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(100 - \frac{x - 3\,000}{50}\right)(x - 150) - \frac{x - 3\,000}{50} \times 50 \\ &= -\frac{x^2}{50} + 162x - 21\,000 \\ &= -\frac{1}{50}(x - 4\,050)^2 + 307\,050 \end{aligned}$$

所以当 $x = 4\,050$ 时, $f(x)$ 最大,最大值为 307 050.

即当每辆车的月租金定为 4 050 元时,租赁公司的月收益最大,最大月收益为 307 050 元.

例 11 人口问题是当今世界各国普遍关注的问题.认识人口数量的变化规律,可以为有效控制人口增长提供依据.早在 1798 年,英国经济学家马尔萨斯就提出了自然状态下的人口增长模型: $y = y_0 e^{rt}$, 其中 t 表示经过的时间, y_0 表示 $t = 0$ 时的人口数, r 表示人口的年平均增长率.

下表是 1950 ~ 1959 年我国的人口数据资料:

年份(年)	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959
人口(万)	55 196	56 300	57 482	58 796	60 266	61 456	62 828	64 563	65 994	67 207

(1) 如果以各年人口增长率的平均值作为我国这一时期的人口增长率(精确到

0.000 1),用马尔萨斯人口增长模型建立我国在这一时期的具体人口增长模型,并检验所得模型与实际人口数据是否相符;

(2) 如果按表中的增长趋势,大约在哪一年我国的人口达到 13 亿?并据此说明我国实行人口计划生育是否有意义.

解 (1) 设 1951 ~ 1959 年的人口增长率分别为 $r_1, r_2, \dots, r_9$.

由 $55\ 196(1+r_1) = 56\ 300$, 可得 1951 年的人口增长率 $r_1 \approx 0.020\ 0$.

同理可得,

$$r_2 \approx 0.021\ 0, \quad r_3 \approx 0.022\ 9, \quad r_4 \approx 0.025\ 0, \quad r_5 \approx 0.019\ 7,$$

$$r_6 \approx 0.022\ 3, \quad r_7 \approx 0.027\ 6, \quad r_8 \approx 0.022\ 2, \quad r_9 \approx 0.018\ 4$$

于是,1951 ~ 1959 年期间,我国人口的年均增长率为

$$r = (r_1 + r_2 + \dots + r_9) \div 9 \approx 0.022\ 1$$

令 $y_0 = 55\ 196$, 则我国在 1950 ~ 1959 年期间的人口增长模型为

$$y = 55\ 196e^{0.022\ 1t}, t \in \mathbf{N}$$

根据所给表中的数据作出散点图,并画出函数的图像(如图 1.1.6),从图中可以看出,所得模型与 1951 ~ 1959 年的实际人口数据基本吻合.

(2) 将 $y = 130\ 000$ 代入 $y = 55\ 196e^{0.022\ 1t}, t \in \mathbf{N}$ 可得

$$t \approx 38.76$$

所以,如果按题中所给表中数据的增长趋势,那么大约在 1950 年后的第 39 年(即 1989 年)我国的人口就已达到 13 亿.

由此可以看到,我国实行人口计划生育是有意义的,否则,如果让人口自然增长,今天我国将面临难以承受的人口压力.

例 12 某公司为了实现 1 000 万元利润的目标,准备制定一个激励销售人员的奖励方案:在销售利润达到 10 万元时,按销售利润进行奖励,且奖金 y (单位:万元) 随销售利润 x (单位:万元) 的增加而增加,但奖金总数不超过 5 万元,同时奖金不超过利润的 25%. 现有三个奖励模型: $y = 0.25x, y = \log_7 x + 1, y = 1.002^x$. 试探究其中哪个模型能符合公司的要求?

分析: 某个奖励模型要符合公司要求,就是依据这个模型进行奖励时,奖金总数不超过 5 万元,同时奖金不超过利润的 25%. 由于公司总的利润目标为 1 000 万元,于是只需在区间 $[10, 1\ 000]$ 上,检验三个模型是否符合公司要求. 不妨先作出函数图像,通过观察图像,得到初步的结论,再通过具体计算,确认结果.

解 借助计算器或计算机作出函数 $y = 0.25x, y = \log_7 x + 1, y = 1.002^x$ 的图像(如图 1.1.7 所示). 观察图像发现,在区间 $[10, 1\ 000]$ 上,模型 $y = 0.25x, y = 1.002^x$ 的图像都有一部分在直线 $y = 5$ 的上方,只有模型 $y = \log_7 x + 1$ 的图像始终在 $y = 5$ 的下方,这说明只有按模型 $y = \log_7 x + 1$ 进行奖励才有可能符合公司的要求. 下面通过计算对能否用这个模型进行奖励进

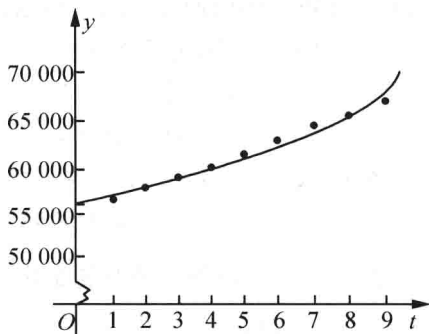


图 1.1.6

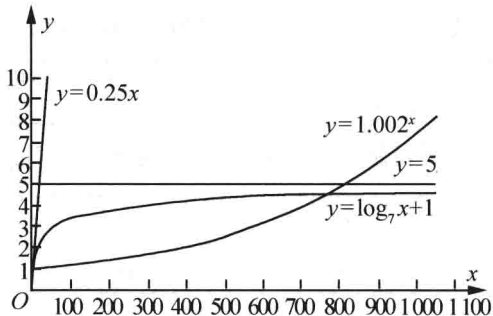


图 1.1.7

行确认.

首先计算哪个模型中的奖金总数不超过 5 万, 对于模型 $y = 0.25x$, 它在区间 $[10, 1\ 000]$ 上单调递增, 当 $x \in (20, 1\ 000]$ 时, $y > 5$, 因此该模型不符合要求.

对于模型 $y = 1.002^x$, 由函数图像, 并利用计算器计算, 可知在区间 $(805, 806)$ 内有一个点 x_0 , 满足 $1.002^{x_0} = 5$. 由于它在区间 $[10, 1\ 000]$ 上单调递增, 故当 $x > x_0$ 时, $y > 5$, 因此该模型也不符合要求.

对于模型 $y = \log_7 x + 1$, 它在区间 $[10, 1\ 000]$ 上单调递增, 而且当 $x = 1\ 000$ 时, $y = \log_7 x + 1 \approx 4.55 < 5$. 所以它符合奖金总数不超过 5 万元的要求.

再计算按模型 $y = \log_7 x + 1$ 奖励时, 奖金是否不超过利润的 25%, 即当 $x \in [10, 1\ 000]$ 时, $\frac{\log_7 x + 1}{x} \leq 0.25$ 是否成立.

令 $f(x) = y = \log_7 x + 1 - 0.25x, x \in [10, 1\ 000]$. 作出函数 $f(x)$ 的大致图像, 可以发现它是单调递减的.

因此 $f(x) \leq f(10) < 0$, 即 $\log_7 x + 1 < 0.25x$.

所以当 $x \in [10, 1\ 000]$ 时, $\frac{\log_7 x + 1}{x} \leq 0.25$, 这说明按模型 $y = \log_7 x + 1$ 奖励, 奖金不会超过利润的 25%.

综上, 模型 $y = \log_7 x + 1$ 确实能符合公司的要求.

建立函数模型并不仅仅是为了描述(反映)客观事物间的对应关系, 而是要解决一些实际问题. 因此, 选择函数模型, 既要关注数学的结论, 也要注意是否符合客观实际的需求.

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \sqrt{x^3 - 8}$;

(2) $y = \frac{1}{|x|}$;

(3) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16 - x^2}$;

(4) $y = \arcsin(x - 3)$.

2. 若 $f(x)$ 的定义域为 $[1, 2]$, 求 $y = f(1 - \ln x)$ 的定义域.

3. 下列各题中的 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

(1) $f(x) = \ln x^2$ 与 $g(x) = 2 \ln x$;

(2) $f(x) = x$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$;

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$ 与 $g(x) = x \cdot \sqrt[3]{x - 1}$;

(4) $f(x) = |x - 1|$ 与 $g(x) = \begin{cases} x - 1 & x > 1, \\ 0 & x = 1, \\ 1 - x & x < 1. \end{cases}$

4. 若 $f(x) = x^2$, 求 $f(2), f(a), f(x+1), f(-\frac{1}{y}), f[f(x)]$.