高等学校教材

数学分析 2

北京大学数学系　沈燮昌　编

高等教育出版社

高等学校教材

数学分析 2

北京大学数学系　沈燮昌　编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是北京大学数学系合编《数学分析》一书的第二册（全书共三册，另有配套的习题集一册）。内容包括定积分及其应用、实数空间、广义积分、级数等共八章。本书在第一册极限论基础上，从有理数的分割法引入实数，证明实数域是一个实数空间，引入了连通性、紧性、完备性等重要概念。对于黎曼积分，给出了积分存在的另两个等价定理和定积分的几种近似计算方法及其误差估计。本书还介绍了多项式逼近定理的勒贝格证明。在讨论级数、广义积分的敛散性时，渗透了无穷小量阶的思想，例题丰富，有趣。

本书经欧阳光中副教授、董延闿教授审查，可作综合大学、师范院校数学系的试用教材或教学参考书。

本书于1986年出版，恰逢高等教育出版社建社60周年，甲午重印，以飨读者。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析．2/沈燮昌编．--北京：高等教育出版社，2014.12

ISBN 978-7-04-040358-9

Ⅰ．①数…　Ⅱ．①沈…　Ⅲ．①数学分析-高等学校-教材　Ⅳ．①O17

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第136201号

策划编辑　李　蕊　　责任编辑　李　蕊　　封面设计　杨立新　　版式设计　于　婕
插图绘制　黄建英　　责任校对　陈旭颖　　责任印制　韩　刚

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	850mm×1168mm　1/32		http://www.landraco.com.cn
印　　张	12.25	版　　次	2014年12月第1版
字　　数	310千字	印　　次	2014年12月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	25.80元

物 料 号　40358-00

出版说明

1954 年 5 月,高等教育出版社正式成立。60 年来,在教育部领导的关怀下,在数学教育工作者的支持下,高教社出版了众多数学教材,可谓群贤毕至,精品迭出,伴随着青年学子们度过了难忘的大学时光。

由于各种原因,部分优秀教材没有机会再版或重印。这其中有我国第一部高等数学教学大纲的制定者朱公谨先生编写的《高等数学(初稿)》;教材编审委员会主任赵访熊先生主编的《高等数学》;西安交通大学陆庆乐先生主编的《高等数学(基础部分)》;清华大学程紫明主编的《高等数学(基础部分)》;还有项武义先生的《微积分大意》,谷超豪、李大潜、沈玮熙的《应用偏微分方程》,吴大任先生的《微分几何讲义》(修订版),北京大学的《数学分析》及其习题集……这些教材,不仅是数学专家、广大数学教师的教学经验的积累,也是历届数学教材编审委员会的集体智慧的结晶,更是各个时期数学教学改革的成果代表,它们呈现了数学教材建设的真实历史,深深影响了几代人。

虽然这些教材出版时间较早,但从数学学科的发展和教学改革的趋势来看,它们对现在的数学课程教学仍然有一定的借鉴意义。为了使广大读者能够对比各时期高校数学教学要求、教学内容体系的变迁,更好地传承数学的教学思想、教学方法,促进当前数学教学改革,提高教学质量,我们遴选了 60 年来具有代表性的经典数学教材进行重新印刷。

这套教材的重版,牵动各方专家的关注,凝结了很多前辈的厚

爱和支持。在联系原作著作权人的过程中，西安交通大学马知恩教授、上海交通大学乐经良教授、清华大学盛祥耀教授都给予了我们帮助。已故作者的子女也积极地配合我们工作。高等教育出版社的郭思旭编审从选题到提供样书给予了很大帮助，胡乃冏、徐刚编审提供了部分资料和样书，王雎老师为这套书的封面从选纸到配色做了精美的设计，使得这套教材不仅保持了原有的风貌，更融入了现代元素。

在本套教材的重版编辑过程中，我们克服了重重困难，本着古建筑修复中"整旧如旧"的原则，尽管这套书中提及的有些算法已经不再用了，我们仍然保留了这些部分，以求保持经典教材的原汁原味，仅做了规范方面的微小改动。重温经典，不仅让老专家、老前辈们抚今追昔，也让我们倍感自豪和使命感，我们还会进一步增加重版的品种，奉献给读者更多优秀教材。

由于本套教材的重版在较短时间内完成，虽竭尽全力，疏漏之处在所难免，恳请各位专家和广大读者批评指正。

高等教育出版社

2014 年 4 月

序

本书是北京大学数学系沈燮昌教授,方企勤、廖可人、李正元副教授合编的“数学分析”一书中的第二册。第一册由方企勤副教授执笔,第二册主要由沈燮昌教授执笔,第三册由廖可人、李正元副教授执笔。全书三册由我统一看过一遍,并做了一些修改。

本册内容包括定积分,定积分的应用,实数空间,广义积分,数值级数,函数项级数,幂级数,傅里叶级数共八章,其中实数空间这一章是由方企勤副教授执笔的。

正如第一册序言所说,为了使难点分散和便于理解,我们商定将极限分成两大部分来讲,在第一册中介绍了极限基础。这里,即第二册中进一步介绍实数空间;从直观的有理数的分割法开始引入实数,然后研究实数是一个有序域,进而证明它是一个实数空间。此外还引入了连通性、紧性以及完备性等重要概念,并说明这些概念本质上用到些什么内容,这对于今后进一步学习一些抽象空间是有启发的。

对于黎曼积分,我们还是用通常直观的方法引入其定义,但是我们说明了,为了保证积分存在就需要研究函数在每一个小的分割区间上的偏差性质。从而引入了积分的大和、小和以及它们的下确界及上确界,而黎曼和正是位于这两者之间,因此自然地引入了上、下积分的概念。这样一来,我们就能给出黎曼积分存在的另两个等价的定理,这给具体使用带来了较大的方便。

对于一些概念的引进,我们尽量给以直观的解释以利于读者理解这些概念。例如在讲有理数分划能确定一个实数时,我们用形象"排队"的说法,如只要知道前面是什么人,而后面又是什么人后就可以确定自身的位置。对于阿贝尔变换,除了给出这个变换的分析表达式以外,还给出了对面积进行不同的分法而得到同一个结果的解释。

在本册中还渗透了无穷小量阶的思想,这对研究级数及广义积分的收敛与发散性更能看清其本质,而且也易于判别。

此外,还给出定积分的几种近似计算方法并用简洁的方法给出了误差估计式。考虑到目前是广泛地使用计算机的时代,初步了解一些计算方法以及知道误差估计的重要性,这对学生来说无疑是有好处的。

本册还给出了很多例题,由易到难,有些例子不仅是较有趣,而且也给出一些重要的结果。这些例题可以使学生加深对理论的理解并且对如何灵活地运用所学到的理论起重要的示范作用。

这里还介绍了两个逼近定理,在常见的教科书中总是用伯恩斯坦多项式来实现多项式逼近,这个多项式对初学者来说是很难理解的。这里介绍了多项式逼近定理的勒贝格证明,首先用折线来逼近连续函数,然后再用幂级数展开的方法来逼近折线函数。这样的证明比较直观、易懂,且也是所学过的方法的灵活运用。

作者在书写本书过程中深深地感到,对于像这类基本内容都已经比较成熟的教科书,如何进行改革,一方面要使学生容易接受,能够通过学习掌握一些最基本的知识且在能力上有所提高,另一方面又能适当地现代化,这是一件很不容易做的事。希望广大读者多多地提出宝贵意见。

作者感谢李正元副教授,他仔细地阅读了原稿,并提出了很多宝贵的意见。作者也感谢欧阳光中副教授、董延闿教授仔细地审阅了原稿,并提出了很多改进意见。

沈燮昌

1985年3月于北京大学

目　录

第七章

定　积　分

在上一章中，我们讲了原函数与不定积分的概念及它们的计算方法，这是属于积分学中的第一基本问题．但是在很多实际问题中，如求一些平面图形的面积、求变速直线运动的路程、求变力所作的功、求侧压力、求质量中心、转动惯量等，这些问题都是可以通过“和的极限”的运算来解决．人们由此概括出数学中的另一个重要概念——定积分的概念，这是积分学中的第二基本问题．初看起来，似乎这两个问题没有什么联系，一个是求原函数，另一个是求“和的极限”．历史上，开始时也确实是独立发展的，只是到了 17 世纪，牛顿与莱布尼茨发现了微积分基本定理以后，才将这两个重要的概念紧密地联系在一起了．定积分的计算可以通过微积分基本定理转化为求不定积分的计算问题．反之，不定积分的存在性问题又可以通过定积分而得到解决．

这一章主要介绍定积分的概念、性质和它的计算方法，至于它在几何上及力学上的一些应用，将在下一章中再详细地加以讨论．

§1　定积分的概念

1.1　实际问题中的例

一、求曲边梯形所围成的面积

在很多实际问题中，经常需要计算平面图形的面积．如果这些

图形是长方形、平行四边形、三角形、多角形等,则我们可以用初等方法来进行计算.但是,如果这个图形是以一般曲线为边界,如圆、椭圆或一般的曲边梯形等,则就不能用初等方法来解决了.

所谓"曲边梯形"是指它有三条边是直线(当然有的边也可以退化成为一个点),其中两条边互相平行,第三条边与前两条边垂直,叫做底边,第四条边是一段曲线弧,叫做曲边,它与任意一条垂直于底边的直线至多相交于一点(见图 7-1).显然一般的图形可以分解为这些图形的组合.因此我们先来计算"曲边梯形"的面积.为了简单起见,首先考虑一个在极限论中已出现过的简单的例.

例 求由抛物线 $y=x^2$,x 轴及直线 $x=1$ 所围成的曲边三角形的面积(见图 7-2).

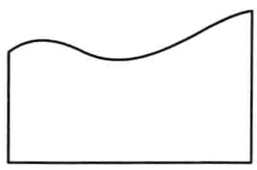

图 7-1

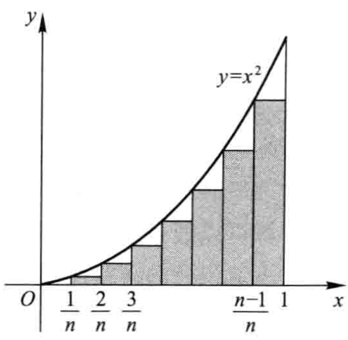

图 7-2

解 用分点

$$0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots\frac{n-1}{n}<1$$

将区间[0,1]分成 n 个等长的小区间,以每一个小区间为下底作矩形,使矩形的左上角正好与此抛物线相交.这样就得到 n 个矩形(见图 7-2 中阴影区域),它们的底长都是$\dfrac{1}{n}$,而高分别是

$$0,\left(\frac{1}{n}\right)^2,\left(\frac{2}{n}\right)^2,\cdots,\left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

令 S_n 表示这 n 个矩形的面积之和. 另一方面,如果作出的矩形其右上角正好与抛物线相交,这样也得到 n 个矩形,它们的底长也都是$\frac{1}{n}$,而高则分别是

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2,\left(\frac{2}{n}\right)^2,\cdots,\left(\frac{n-1}{n}\right)^2,1^2.$$

令 S_n'表示这 n 个矩形之和,如果以 S 记所作曲边三角形的面积,则显然有

$$S_n < S < S_n'.$$

在第二章 §1 中已知

$$\begin{aligned} S_n &= 0\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{1}{n} \\ &= \frac{2n^2-3n+1}{6n^2}\to\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

类似地有

$$\begin{aligned} S_n' &= \left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{1}{n}+1^2\cdot\frac{1}{n} \\ &= \frac{2n^2+3n+1}{6n^2}\to\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

由此可见,此曲边三角形的面积也应该是$\frac{1}{3}$. 这也可以从几何直观看出,当 n 无限增大时,n 个矩形的面积 S_n 将无限地接近曲边三角形的面积,同样 n 个矩形的面积 S_n'也将无限地接近曲边三角形的面积.

在此求曲边三角形面积的过程中可以看到，在每一个小区间 $\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ 上，我们把小曲边梯形的面积近似地看作小矩形面积（只是一个在曲边梯形的内部，一个包有曲边梯形在它本身的内部），即将每一小段曲线近似地看作直线. 也就是说，在局部上以“直”代“曲”，每一个代替所得到的面积是近似的，然后把这些小矩形的面积加起来以后，当 $n\to+\infty$ 时，就得到了曲边三角形面积的精确值为 $\frac{1}{3}$.

下面讨论求一般曲边梯形面积的方法.

取一个直角坐标系使得曲边梯形的底边与 x 轴重合，曲边梯形位于上半平面，并设曲边是连续函数 $y=f(x)$ 的图形（图 7－3）. 现在用例 1 的方法求这个曲边梯形的面积.

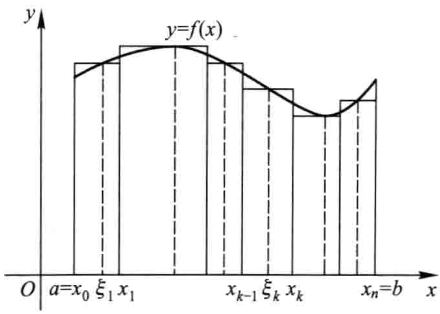

图 7－3

设曲边梯形的底边所在区间为 $[a,b]$，用分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

分它为 n 个小区间 $[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,2,\cdots,n)$，区间 $[x_{k-1},x_k]$ 与它的长度都记作 Δx_k. 这里 Δx_k 的大小可以是任意的，一般说来，它们彼此不一定相等. 这些分点 x_k $(k=0,1,2,\cdots,n)$ 的全体称为区间 $[a,b]$ 的一个“分割”.

在每一个小区间$[x_{k-1},x_k]$上任取一点$\xi_k(x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k)$,以$f(\xi_k)$为高、$\Delta x_k$为底边的小矩形面积近似代替区间$[x_{k-1},x_k]$上的小曲边梯形面积(局部上以“直”代“曲”,见图7-3),所有这些小矩形面积之和可以看作曲边梯形面积A的近似值,即

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.$$

显然,和数σ依赖于区间$[a,b]$的分割以及中间点$\xi_k(k=1,2,\cdots,n)$的取法.但是,当我们把区间$[a,b]$分得足够细时,不论中间点怎样取,直观地可以想象σ就能够任意地接近曲边梯形的面积A(整体上“直”回到了“曲”).这一事实可以用极限概念加以严格地描述.令λ表示一切小区间长度中最大者,即$\lambda=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta x_k$,那么“$\lambda\to0$”就刻画了区间$[a,b]$无限细分的过程,而$\sigma$在此过程中的极限(如果存在且与区间分割及中间点$\xi_k$的取法无关)就是曲边梯形面积$A$的值,即

$$A=\lim_{\lambda\to0}\sigma=\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.$$

二、变力所作的功

物体在不变的力f的作用下作直线运动,设其位置改变为距离s且力的方向与位置改变的方向一致,则它作的功为

$$W=fs.$$

如果物体所受的力f是变力,它随物体的不同位置x而变化,因此力是距离x的函数$f(x)$.设物体在此力作用下从点a到点b且位移方向也与力的方向一致,则如何求出其功呢?我们也可以用求曲边梯形面积的方法来解决.

用分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

将位移区间$[a,b]$分成 n 个小区间$[x_{k-1},x_k]$,$1\leqslant k\leqslant n$,区间$[x_{k-1},x_k]$的长度记作 Δx_k. 可以认为力 $f(x)$ 是连续变化的,因此,如果 Δx_k 很小,则在这段小位移中可以认为 $f(x)$ 变化不大,也就可以近似地看作不变的力. 在这段小位移$[x_{k-1},x_k]$中任取点 $x=\xi_k$,可以近似地认为这段位移中的力是常数 $f(\xi_k)$. 于是,物体从点 x_{k-1} 移到 x_k 时,在力 $f(x)$ 作用下所作的功 W_k 近似地可以看作 $f(\xi_k)\Delta x_k$,即 $W_k\approx f(\xi_k)\Delta x_k$. 这样,在力 $f(x)$ 作用下从 a 到 b 所作的功 W 近似地有表示式

$$W=\sum_{k=1}^{n}W_k\approx\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.$$

与上面一样,如果令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta x_k$,则"$\lambda\to 0$"就刻画了位移区间$[a,b]$无限细分的过程,在这个过程中,上式右边的极限(如果存在)就能够刻画从位置 a 到 b 的变化过程中,由力 $f(x)$ 所产生的功

$$W=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.$$

1.2　定积分的概念及几何意义

上面我们讨论了两个不同的实际问题,一个是几何问题,另一个是力学问题,但是这两个问题都能用一个统一的方法来解决. 还有很多其他的实际问题,如物体在变速运动下所走的路程、物体的质量、转动惯量等问题也可以用这样的统一方法来解决. 因此,我们可以将这种方法抽象出来,就得到定积分的概念.

定义　设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上有定义,用分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

将区间$[a,b]$分成 n 个小区间. 令 λ 表示一切小区间长度 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}(1\leqslant k\leqslant n)$中的最大者,即 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta x_k$. 在每一个小区间