线性规划与对策论

Linear Programming and Game Theory

殷志宏 冯爱军 殷亚君 著

经济学中最优化方法

飞天出版传媒集团
甘肃文化出版社

线性规划与对策论

Linear Programming and Game Theory

殷志宏 冯爱军 殷亚君 著

经济学中最优化方法

飞天出版传媒集团
甘肃文化出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性规划与对策论 / 殷志宏，冯爱军，殷亚君著.
—兰州：甘肃文化出版社，2014.8
ISBN 978-7-5490-0730-1

Ⅰ.①线… Ⅱ.①殷… ②冯… ③殷… Ⅲ.①线性规划—对策论 Ⅳ.①O225

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第190662号

线性规划与对策论

殷志宏　冯爱军　殷亚君 | 著

责任编辑 | 李浩强
封面设计 | 苟妍婕
校　　对 | 成　捷　芦孝忤
版式设计 | 徐丽媛　任丽晋

出版发行 | 甘肃文化出版社
网　　址 | http://www.gswenhua.cn
投稿邮箱 | press@gswenhua.cn
地　　址 | 兰州市城关区曹家巷1号 | 730030（邮编）

营销中心 | 王　俊　贾　莉
电　　话 | 0931-8454870　8430531（传真）

印　　刷 | 兰州中正印刷有限责任公司
开　　本 | 787毫米×1092毫米 1/32
字　　数 | 300千
印　　张 | 11.375
版　　次 | 2014年8月第1版
印　　次 | 2015年4月第2次
书　　号 | ISBN 978-7-5490-0730-1
定　　价 | 38.00元

前　言

当今世界经济发展主流仍是以数学化、定量化的实证性研究方法为主要手段. 本书介绍经济学中最优化方法的基本内容:线性规划与对策论.

对策论(经济学家称博弈论)是研究竞争、对立现象的数学理论与方法,1944 年以来应用于经济学,已经并正在引起经济学一系列重大发展和突破,深刻地改变着现代经济学的面貌. 对策论方法已经越来越成为经济理论研究的核心方法,成为经济学理论的一部分. 1994 年、1996 年、2001 年、2005 年和 2007 年诺贝尔经济学奖屡屡授予研究对策论在经济学、信息经济学等领域中成功应用的学者,足见对策论在经济学里的重要地位.

然而有趣的是,任何一个对策问题在其数学模型化的过程中都会引出一个线性规划问题,而此线性规划的解又恰好给出了这个对策问题的结果. 正是这个原因,作者把线性规划与对策论合在一起,用线性规划的单纯形法对对策论里的各类(非合作对策与合作对策)数学模型都给出一个规范的求解过程、合理的求解结果,用线性规划理论解释对策论中各种解概念,这些不仅是对策论的理论体系,也是对策论的理论和方法在经济学中成功有效应用的现实基础.

随着对策论在现代经济学中研究和应用的深入，以及经济复杂性现象的不断涌现．一个在经济学领域从事科研、教学和实际应用的人，不掌握这些理论和方法，他的思维方法和分析技巧是很难跟上现代经济学发展的步伐的，且很难融入当今世界经济发展的主流．

本书适用于高等院校各类专业本科生、研究生，也适用于有志从事最优化工作的科学研究、工程技术、经济管理的实际工作者．

本书第一章线性规划概要，第二章单纯形法，第三章对偶理论，第四章目标规划由殷亚君撰稿；第五章整数规划，第六章二人零和对策由冯爱军撰稿；第七章N人非合作对策，第八章N人合作对策由殷志宏撰稿，全书由殷志宏统稿审定，囿于作者学识有限，书中难免有所不妥和差错，敬盼读者指正！

在这里还要特别感谢成捷、徐丽媛、芦孝忭、任丽晋同学在本书资料整理、制表绘图、电子输入方面做的大量艰辛工作，让我欣慰的是，这也是对他们从事科研能力的锻炼。

“天之大，唯有你的爱是完美无瑕”，我谨以此书献给我的母亲．

殷志宏

2014．6．2

目 录

第一章　线性规划概要

§1　线性规划模型

一、引言

最优化理论和方法在现代经济管理中有着重要的地位.例如:微观经济学中研究消费者理论,要解决消费者的效用最大化和费用最小化;研究厂商理论,要去解决厂商的利润极大化和成本极小化,即要研究消费者和厂商如何运用有限的资金、资源去争取最大效用、利润;或者为达到一定目标,如何让自己的花费、成本降低到最小,这都可以归结为最优化问题来处理.而线性规划就是利用数学方法解决最优化问题的重要工具之一,它能够解决微积分不能解决的、在实际中更为广泛存在的最优化(optimization)问题.

线性规划(Linear Programming),顾名思义是解决线性方面的最优化问题,即变量为一次的表示式.例如:$-x_1+3x_2-7x_3$ 为线性的,而 $x_1x_2+2x_3+4x_4$ 及 $x_1^2+3x_2$ 均为二次表示式,故凡含变量为二次或三次以上的式子,均属非线性的.

所谓线性函数用数学公式定义,凡是满足如下二式

(1) $f(kx)=kf(x)$

(2) $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$

的函数称为线性函数,否则称之为非线性函数.

例如:$f(x_1,x_2)=\dfrac{x_1^3+x_2^3}{x_1^2+x_2^2}$,虽然满足(1)式,但不满足(2)式,故仍属非线性函数.

二、线性规划问题的实例

例题 1－1　消费者效用最大化

某人有资金 3 万元，现有 4 种投资机会：如果每年年初投资，年底收回本金加利息（本金的 20%），但该项投资额不得超过 2 万元. 如果第一年初投资，第二年底收回本金加利息（本金的 50%）. 如果第二年初投资、第三年底收回本金加利息（本金的 60%），但该项投资额不得超过 1.5 万元. 如果第三年初投资、第三年底收回本金加利息（本金的 40%），但该项投资额不得超过 1 万元. 问应如何制定一个投资计划，使第三年未、本金、利息之和最大？

设 x_{ij} 表示第 i 年初采用第 j 种投资机会的投资金额，($i = 1$、2、3； $j = 1$、2、3、4)，则有：

第一年年初，资金不宜闲置故有投资于 $x_{11} + x_{12} = 3$，且 $x_{11} \leqslant 2$.

第二年年初（即第一年底），可收回资金 $1.2x_{11}$，即可利用再投资的资金，其余尚未到期收回，故有投资于 $x_{21} + x_{23} = 1.2x_{11}$ 且 $x_{23} \leqslant 1.5$.

第三年初（即第二年底），可收回利用资金 $1.2x_{21} + 1.5x_{12}$，故有投资于 $x_{31} + x_{34} = 1.2x_{21} + 1.5x_{12}$、且 $x_{34} \leqslant 1$.

第三年底，可收回资金（本金 + 利息）$1.2x_{31} + 1.6x_{23} + 1.4x_{34}$. 目的应该是使 $1.2x_{31} + 1.6x_{23} + 1.4x_{34}$ 最大，并且投资于各种机会的资金数 $x_{ij} \geqslant 0$，为此这个问题可用线性规划模型表示为

$$LP \quad \max Z = 1.2x_{31} + 1.6x_{23} + 1.4x_{34}$$

$$s.t. \begin{cases} x_{11} + x_{12} = 3 \\ x_{21} + x_{23} - 1.2x_{11} = 0 \\ x_{31} + x_{34} - 1.2x_{21} - 1.5x_{12} = 0 \\ x_{12} \leqslant 2 \\ x_{23} \leqslant 1.5 \\ x_{34} \leqslant 1 \\ x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1、2、3, j = 1、2、3、4) \end{cases}$$

例题 1－2　厂商成本最小化

某河流附近有二个化工厂，如图 1－1 所示，流经第Ⅰ个化工厂的河水流量为每天 500 万 m^3，在二厂之间有一条流量为 200 万 m^3 的支流.

工厂Ⅰ每天排放含有某种有害物质的工业污水 2 万 m^3、Ⅱ厂每

天排放这种工业污水 1.4 万 m^3，但从工厂 Ⅰ 排出的工业污水，流到 Ⅱ 厂之前有 20% 可以自然净化. 根据环保部门要求，河流中工业污水的含量应不大于 0.2%. 这二个厂都需要各自处理一部分工业污水，Ⅰ 厂处理工业污水的成本是1000元 / 万 m^3，Ⅱ 厂处理工业污水的成本是 800 元 / 万 m^3.

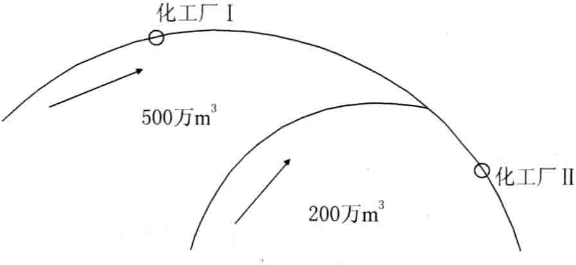

图 1－1

现在要问，在满足环保要求的条件下，每厂各应处理多少工业污水，使这二个厂处理工业污水所花总费用最小.

如果能把所有工业污水处理掉，当然好，但厂商要付出高额资金，这些代价均要打入产品成本，产品价格高势必影响企业市场竞争力. 但不去处理工业污水，会造成河水严重污染，有极坏的负面社会效应，环保部门不会答应. 为此

设 Ⅰ 厂每天处理工业污水量为 x_1 万 m^3

　Ⅱ 厂每天处理工业污水量为 x_2 万 m^3.

要达到环保部门要求，Ⅰ 厂每天处理的污水量 x_1 需满足约束条件：$\frac{2-x_1}{500} \leqslant \frac{2}{1000}$；Ⅱ 厂每天处理的工业污水量 x_2 应满足约束条件：$\frac{0.8(2-x_1)}{500+200}+\frac{1.4-x_2}{500+200} \leqslant \frac{2}{1000}$，又因各厂每天处理工业污水量不能为负数值，故还需受到可行性限制条件的约束：$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$.

这样在满足上述要求条件下，使二化工厂治理工业污水所花费总费用：$1000x_1 + 800x_2$ 达到最小.

上述问题，若用线性规划数学模型表示，则为

$$LP \quad \min W = 1000x_1 + 800x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 \geqslant 1 \\ 4x_1 + 5x_2 \geqslant 8 \\ x_1 \leqslant 2 \\ x_2 \leqslant 1.4 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

例题 1－3 最优策略问题

二人决斗，都拿着已经装上子弹的手枪，站在相距 7 米处，然后面对面走近，决定是否打出唯一的子弹，假若有谁打了，可是没有打中对手为了保全名誉（和决斗规划）他须仍然接着向前走. 在二人距离 7 米远时，Ⅰ 击中 Ⅱ 的机会是 0.2，Ⅱ 击中 Ⅰ 的机会是 0.5；在二人距离 5 米远时，Ⅰ 击中 Ⅱ 的机会是 0.8，而 Ⅱ 击中 Ⅰ 的机会是 0.75；在二人相距 3 米远时，Ⅰ 击中 Ⅱ 的机会是 1、Ⅱ 击中 Ⅰ 的机会是 1. 如果 Ⅰ 活着，而 Ⅱ 被击中，Ⅰ 的赢得是 +1，如果 Ⅱ 活着而 Ⅰ 被击中，则 Ⅰ 的赢得为 −1，其他结局 Ⅰ 的赢得为 0. 如果决斗时，双方使用无声手枪（即决斗者不知道对方是否已射击）问二人在什么位置开枪才会对自己最有利？

构造矩阵对策模型　$G = \{S_{\mathrm{I}}^*, S_{\mathrm{II}}^*; A\}$

其中：$S_{\mathrm{I}}^* = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$；$S_{\mathrm{II}}^* = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$

α_1, β_1 表示局中人 Ⅰ、Ⅱ，在相距 7 米远时射击；

α_2, β_2 表示局中人 Ⅰ、Ⅱ 在相距 5 米远时，若对方已射击则便走到相距 3 米远时射击、若对方未射击，则在 5 米远时射击.

α_3, β_3 表示局中人 Ⅰ、Ⅱ 在相距 3 米远时才射击.

故局中人 Ⅰ 的赢得矩阵 $A = \begin{pmatrix} -0.3 & -0.4 & -0.6 \\ -0.1 & 0.05 & 0.6 \\ 0 & -0.5 & 0 \end{pmatrix}$

若 α_1、β_1，即局中人 Ⅰ、Ⅱ 均在 7 米处，如果二人均开枪，Ⅰ 被击中概率 0.5，Ⅱ 被击中概率 0.2，则 $a_{11}=0.2+(-0.5)=-0.3$；

若 α_1、β_2，即局人 Ⅰ 在 7 米处开枪而局中人 Ⅱ 走到 5 米处，能走到 5 米处，意味着局中人 Ⅰ 开枪并未击中局中人 Ⅱ，即局中人 Ⅱ 能走到 5 米处概率为 0.8，则 $a_{12}=0.2+(-0.75)\times 0.8=-0.4$；

若 α_1、β_3，即局中人 Ⅰ 在 7 米处开枪，局中人 Ⅱ 能走到 3 米处，表示未被局中人 Ⅰ 击中，局中人 Ⅱ 能走到 5 米处概率 0.8，再走到 3 米处概率为 1(局中人 Ⅰ 仅一发子弹)，则 $a_{13}=0.2+(-0.8\times 1)\times 1=-0.6$；

若 α_2、β_1，即局中人 Ⅰ 在 5 米处开枪，若 Ⅰ 能走到 5 米处，必然未被局中人 Ⅱ 在 7 米处开枪击中，故局中人 Ⅰ 能走到 5 米处概率为 0.5，则 $a_{21}=0.5\times 0.8+(-0.5)=-0.1$；

若 α_2、β_2，即局中人 Ⅰ，Ⅱ 均能走到 5 米处开枪则说明局中人 Ⅰ，Ⅱ 在 7 米处均未开枪(肯定)则 $a_{22}=0.8+(-0.75)=0.05$；

若 α_2、β_3，即局中人 Ⅰ 在 7 米处未被击中，且自己在 7 米处未开枪，局中人 Ⅱ 能走到 3 米处开枪说明在 7 米处未被击中(Ⅰ 在 7 米处未开枪)故顺利走到 5 米处，局中人 Ⅱ 能走到 5 米处的概率为 1. 但在向 3 米处走时，说明未被 击中(但 Ⅰ 在 5 米有开枪可能(未定)则局中人 Ⅱ 能走到 3 米处概率为 $0.2\times 1=0.2$，则 $a_{23}=0.8+(-0.2)\times 1=0.6$；

若 α_3、β_1，即表示局中人 Ⅱ 在 7 米处开枪未击中局中人 Ⅰ(概率为 0.5)，所以局中人 Ⅰ 才有可能走到 5 米、3 米处开枪. 则 $a_{31}=1\times 0.5+(-0.5)=0$；

若 α_3、β_2，即表示局中人 Ⅰ，Ⅱ 在 7 米处均未开枪，走到 5 米处，局中人 Ⅱ 在 5 米处开枪未击中局中人 Ⅰ(概率为 0.25)，所以局中人 Ⅰ 才有可能走到 3 米处开枪，则 $\alpha_{32}=1\times 0.25+(-0.75)=-0.5$；

若 α_3、β_3，即表示局中人 Ⅰ，Ⅱ 在 7 米，5 米处均未开枪，走到 3 米处才同时开枪，则 $a_{33}=1+(-1)=0$；

这样一个矩阵对策问题的求解，要用到二个线性规划模型：

局中人 Ⅰ　　　　　　　　局中人 Ⅱ

LP $\max Z = V$　　　　DP $\min W = V$

$$s.t.\begin{cases}0.9x_2 + x_3 \geqslant V \\ 1.05x_2 + 0.5x_3 \geqslant V \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_2, x_3 \geqslant 0\end{cases}\qquad s.t.\begin{cases}0.9y_1 + 1.05y_2 \leqslant V \\ y_1 + 0.5y_2 \leqslant V \\ y_1 + y_2 = 1 \\ y_1, y_2 \geqslant 0\end{cases}$$

其中:V 为矩阵对策 $G = < S_1^*, S_2^*; A >$ 的值.

三、线性规划模型的性质及其形式

线性规划的应用范围非常广泛,但由上面简单实例可知线性规划的数学模型具有下列性质.

1. 目标确定,例如上面例子目标欲求最大效益,或求最小成本.并且目标可用一函数 $f(X)$ 表示,在线性规划中称为目标函数(objective function),而且此函数必为线性.目标函数的通式可表示为

$$\max\ (\text{or})\ \min f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

其中:x_j 为变数,称为决策变量(decision variable),决策变量 $\{x_j\}$ 是一组在问题中要确定其值的未知量.c_j 为常数,且已知,称为价值系数(cost coefficients)、其取值可正可负.

可以证明目标函数 $f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ 必为线性.令 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$,因为 $f(kX) = \sum_{j=1}^{n} c_j(kx_j) = c_1(kx_1) + c_2(kx_2) + \cdots + c_n(kx_n) = k(cx_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n) = k f(X)$.

又令 $X_1 = (x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n})$;$X_2 = (x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n})$

$$f(X_1) = c_1x_{11} + c_2x_{12} + \cdots + c_nx_{1n}$$
$$f(X_2) = c_1x_{21} + c_2x_{22} + \cdots + c_nx_{2n}$$

则 $f(X_1 + X_2) = \sum_{j=1}^{n} c_j(x_{1j} + x_{2j}) = c_1(x_{11} + x_{21}) + c_2(x_{12} + x_{22}) + \cdots + c_n(x_{1n} + x_{2n}) = (c_1x_{11} + c_2x_{12} + \cdots + c_nx_{1n}) + (c_1x_{21} + c_2x_{22} + \cdots + c_nx_{2n}) = f(X_1) + f(X_2)$.

由此可知，目标函数的通式必为线性的.

2. 一组线性的约束条件，决策变量$\{x_j\}$，$j=1,2,\cdots,n$取值时必须满足的那些限制条件，称为约束条件，在线性规划模型中一组约束条件的一般通式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m \end{cases}$$

其中：a_{ij} 称为技术系数，是常数系数(constant coefficient).

b_i 称为资源数量，是常数(constant).

a_{ij} 与 b_i $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 均可正可负.

而 m 个线性的限制条件称为结构限制条件(structure constraints)，当所有 a_{ij} 和$b_i(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$均为已知数时，容易证明其 m 个约束条件都是线性的.

但应注意 m 个约束条件中每一个线性式都必须具有独立的性质；例如 $2x_1+3x_2\leqslant 6$ 和 $4x_1+6x_2\leqslant 12$，二个约束条件可以归并成一个线性式，即仅表示一个约束条件.

3. 变数为非负，例如上面实例中所有的决策变量$\{x_j\}$或$\{x_{ij}\}$均必须取值为正数或零，称之为非负性限制条件(non-negative constraints)其通式为：

$x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0$　或　$x_{ij}\geqslant 0$　$i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$

但须注意，在有的具体问题中，对这个条件没有要求，或部分决策变量对其没有要求.

综上所述，线性规划(LP)模型其通式如下

$$LP\quad \max(\text{or},\min)\ Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\text{subject. to.}\ \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+c_{1n}x_n\leqslant b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m \\ x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0 \end{cases}$$

对线性规划模型之通式,做如下说明:

① 对上述通式,若在结构限制条件中线性式之二边同时乘以(－1)则"$\leqslant$"可变为"$\geqslant$"号.又如在不等式中加上(或减去)一正值变数 x_j 则可将不等式改为等式,因此上述形式,仅表示线性规划模型的一般通式.

② 目标函数或结构限制条件,不论其中变数 x_j 如何变大或变小,仍属线性,这即是说,在通式的目标函数或结构限制条件的各式之间,仅可以允许数乘 $kf(x)$ 和加法 $f(x_1)+f(x_2)$ 二种线性运算.

③ 在结构限制条件的 m 个方程式中,可能相互矛盾,故可知线性规划模型可因此无解.也可能符合结构限制条件的某个变数 x_j 或多个变数$\{x_j\}$之值趋于无穷大,则目标函数值亦随之无穷大或无穷小.特别,当通式中 a_{ij} 和 b_j 均为正数、且目标函数为求极小值时,显而可见,所有决策变量$\{x_j\}$均取零值,此时虽然线性规划模型有解,但却失去实际意义.

④ 实际问题中列出线性规划模型通式前必须首先确定目标函数,结构限制条件中的价值系数 c_j 技术系数 a_{ij} 和资源数量 b_j 的值,有时取得这些数值容易,但在有些场合欲取得这些数值却颇费时力.

四、线性规划的简史

有趣的是线性规划问题最早为经济学者所引起,傅里叶(Fourier)在1823年曾研究过一些与线性规划有关的问题.1939年苏联学者康托洛维奇(kantorovich)发表了重要著作《生产组织计划中的数学方法》针对生产的组织、分配、下料等问题提出一类特殊的线性规划问题,但是他未能对提出的线性规划问题给出求解方法.

至到1947年,美国学者坦茨基(G. B. Dantzig)为美国空军解决分配问题时给出了线性规划的数学模型和求解线性规划的单纯形方法,才真正为线性规划奠定了基础,使之具有完整的概念、成熟的理论、通用的算法.1953年,Danzig又提出了改进单纯形法,大大减少了计算工作量.1954年,Beale提出了对偶单纯形法.1956年,Banting又提出原始一对偶单纯形法,使单 纯形方法更为完善,1963年Danting出版了专著《线性规划及其扩充》.

但是单纯形法在解某些线性规划问题时还会遇到困难，发现使用单纯形方法的迭代次数是指数形式的、而不是好的算法 — 多项式算法. 1979 年苏联数学家哈奇安(khachian)找到了解线性规划的一种新算法 —— 椭球法. 椭球法是一种多项式算法，但根据计算机上实际计算结果，却比单纯形法差的多. 1984 年，在美国工作的印度数学家卡玛卡(N. karmarkar)提出了又一个多项式算法 —— 求解线性规划的投影尺度法，但目前对此法尚无完全定论，不少人正对这一算法进行研究.

1980 年前后，还形成了求解线性规划的有效集法，尽管在本质上有效集法和单纯形法一样，但二者可以互相补充，有效集法在实际应用中有着重要的地位.

§2　线性规划的图解法

为了对线性规划问题有一个直观的理解，为了体会在解线性规划问题过程中可能出现的复杂情况的本质. 首先给出线性规划的图解法(graphical solution)，图解法只能针对含有二个或三个变量的简单线性规划问题.

预备知识

① 半平面

方程 $ax_1 + bx_2 = c$ 在平面直角坐标系上的几何形象是一条直线，而不等式 $ax_1 + b_2x_2 \leqslant c$ 是平面直角坐标系上一个半平面(half plane)，如图 1－2 所示.

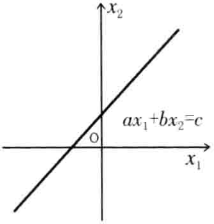

图 1－2

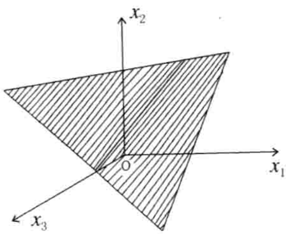

图 1－3

同样 $ax_1+bx_2+cx_3=d$,在空间直角坐标系上的几何形象是一个平面,而 $ax_1+bx_2+cx_3\leqslant d$ 决定空间直角坐标系上的一个半空间,如图 1－3 所示.

如何确定由 $ax_1+bx_2\leqslant c$ 决定的半平面,在平面直角坐标系上作出直线 $ax_1+bx_2=c$ 则在坐标平面上任意选定一点$(s.t)$代入 $ax_1+bx_2\leqslant c$ 中,若满足 $as+bt\leqslant c$ 则 $ax_1+bx_2\leqslant c$ 所确定的半平面在点$(s.t)$所在一侧,否则在另一侧. 为了方便一般选择(0,0)点判断(当然要求点(0,0)不在直线 $ax_1+bx_2=c$ 上).

② 梯度

设线性规划问题的目标函数,$Z=f(x_1,x_2)=c_1x_1+c_2x_2$,则满足 $c_1x_1+c_2x_2=Z$ 的所有点(x_i,x_j),其函数值 Z 均相等,因此称 $c_1x_1+c_2x_2=Z$ 为等值线. 当 Z 取不同值时,可得一族平行移动的等值线,如何确定等值线 $Z=f(x_1,x_2)=c_1x_1+c_2x_2$ 函数值的增加方向,即目标函数值的增大方向.

求目标函数,$Z=f(x_1,x_2)$ 的梯度(gradient):$\nabla f(x_1,x_2)=\left(\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1},\ \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right)$,由坐标原点(0,0)为起点,以 $C\left(\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1},\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right)$ 为终点作一矢量 $\overrightarrow{oc}$,则 $\overrightarrow{oc}$ 即为等值线 $Z=c_1x_1+c_2x_3$ 的法矢量. 当等值线 Z 沿着 $\overrightarrow{oc}$ 的方向平行移动时,目标函数值 $Z=f(x_1,x_2)$ 就相应的递增,当等值线 Z 沿着 $\overrightarrow{oc}$ 的反方向平行移动时,目标函数值 $Z=f(x_1,x_2)$ 就相应地递减.

例如　目标函数 $Z=f(x_1,x_2)=2x_1+3x_2$

则　$\nabla f(x_1,x_2)=\left(\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1},\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right)=(2,3)$

目标函数值 Z 的增加(减小)方向如图 1－4 所示表示.

例题 1－4　LP　$\max Z=2x_1+3x_2$

$$s.t.\begin{cases}x_1+2x_2\leqslant 8\\ 4x_1\leqslant 16\\ 4x_2\leqslant 12\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$