应用型本科院校数学教材

Mathematical Techniques for Economics and Management

经济管理数学技术

阳 军◎主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

应用型本科院校数学教材

经济管理数学技术

主　编　阳　军
副主编　陈　亮
参　编　周　念　郑　英
　　　　史纪磊

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

内容简介.

本套教材是针对“本科经济管理类专业应用型人才培养模式”而编写的数学类课程教学用书，分《经济管理数学基础》和《经济管理数学技术》上下两册。

本书是下册《经济管理数学技术》，内容以线性代数、概率统计数学理论为主线，辅以 Excel、MATLAB 计算软件的使用，融合了一些相关的经济管理学知识及数学模型。具有叙述平缓通俗、抽象推导简单、学科交叉性强、应用案例丰富等特点，有很强的专业融合性和教学适用性。本书分为线性代数、概率、统计、数学实验与建模四部分内容，共十二章。本书可以作为普通本科、民办本科、独立学院等本科院校经济管理类专业的数学基础课教材，也可作为高职高专院校学生及经济管理行业工作者的参考教程。

图书在版编目（CIP）数据

经济管理数学技术 / 阳军主编. —杭州：浙江大学出版社，2015.2

ISBN 978-7-308-14398-1

Ⅰ.①经… Ⅱ.①阳… Ⅲ.①经济数学—高等学校—教材 Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 028352 号

经济管理数学技术

阳 军 主编

责任编辑 徐 霞
封面设计 黄晓意
出版发行 浙江大学出版社
（杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
排 版 杭州中大图文设计有限公司
印 刷 临安市曙光印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 20
字 数 489 千
版 印 次 2015 年 2 月第 1 版 2015 年 2 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-14398-1
定 价 38.00 元

前　言

本套教材的编写，注重时代发展对人才素质的要求，遵循应用型本科人才培养目标和要求，树立“与专业相结合、为专业服务”的基本理念，争取在有限的课时里能做到数学知识“广、浅、新、用”。因此，在教材编写中对应用型本科的数学内容提出了数学技术化处理思想，把本科经济管理类各专业需要的数学理论——微积分、线性代数、概率论与数理统计、部分运筹学内容、部分数值计算内容与数学实验和数学模型等内容有机地融合在一起，适当弱化数学理论性和系统性，删减部分实用性不强且复杂的数学理论内容，充分融合一些经济与管理学知识，突出数学技术的应用，在整个课程难度有所下降的基础上增大课程信息量，而不是按照通常的做法去删减知识量。

教材内容总体安排是把应用型本科院校经济管理数学分为两大教学内容，分别编写教材《经济管理数学基础》和《经济管理数学技术》。

1.《经济管理数学基础》(建议课时 64)

主要包含微积分学的基础理论、常用的运算方法、相关交叉学科内容以及一些常用数学模型，为经管学生学习后继课程和解决实际问题提供必不可少的数学基础知识及常用的数学方法。考虑到微积分的内容较多、课时有限，针对应用型本科的培养特点与要求，对教材结构进行了一定的优化，强调与实际问题相结合，注重渗透核心数学思想。内容上删减了经济管理中基本用不到的一些反三角函数，降低了极限与连续的理论要求，降低不定积分的计算技巧与要求，弱化了二元函数微积分的理论，融合了一些经济与管理学知识及应用介绍。目的是做到既能培养学生的数学思想和逻辑思维能力，又让学生在较熟练地掌握微积分知识基本方法的基础上能运用所学知识去分析问题和解决问题，具备一定的抽象概括问题的能力以及一定的逻辑推理能力。

2.《经济管理数学技术》(建议课时80)

主要内容为矩阵与行列式、向量与线性方程组、特征值与特征向量、概率论、数理统计、MATLAB介绍、数学实验与数学建模、常用经济应用模型。

相对于传统的本科数学教材内容来说,删减了线性代数中应用性不是很强的一些知识及理论推导,例如线性空间的概念与二次型问题,同时把线性规划问题融入到教材中去。弱化了概率论中的多元随机变量部分内容,只介绍了二元离散型随机变量分布的理解和应用,同时把顾客迁移理论、决策论、保险精算等相关经济管理学知识作为应用性问题融入到教材中去。考虑到学生后续课程会开设应用统计学,所以对数理统计部分也进行了适当的弱化,主要介绍了统计思想、统计基本概念以及基本的参数估计、假设检验及回归分析方法。教材最后适当地纳入了一些数学实验内容,主要包含了一些利用MATLAB和Excel软件去解决一些应用当中的数学计算问题。

由于编者水平有限,时间也有点仓促,其中一定存在不妥之处,希望同行及读者批评指正,使本书在教学实践当中不断完善。

编 者

2014年7月

目　　录

第一部分　线性代数

第一章　矩阵与行列式 …… 3
§1.1　矩阵的概念 …… 3
§1.2　矩阵的运算 …… 6
§1.3　行列式 …… 13
§1.4　矩阵的初等变换与矩阵的秩 …… 23
§1.5　逆矩阵及应用 …… 27
第二章　向量与线性方程组 …… 39
§2.1　线性方程组的消元法及有解判别 …… 39
§2.2　向量的线性关系 …… 46
§2.3　线性方程组解的结构 …… 52
第三章　矩阵的特征值与特征向量 …… 62
§3.1　矩阵的特征值与特征向量 …… 62
§3.2　相似矩阵及应用 …… 68
第四章　线性规划 …… 76
§4.1　线性规划问题及其数学模型 …… 76
§4.2　求解线性规划问题 …… 80
§4.3　线性规划问题解的结果 …… 86
§4.4　线性规划模型的应用 …… 90

第二部分　概　　率

第五章　随机事件与概率 …… 101
§5.1　随机事件 …… 101
§5.2　事件的概率 …… 105
§5.3　概率论的基本公式 …… 109
§5.4　事件的独立性 …… 117
第六章　随机变量及其分布 …… 124
§6.1　离散型随机变量及其分布列 …… 124

§6.2 连续型随机变量 …………………………………… 131
§6.3 分布函数 …………………………………… 134
§6.4 常用连续分布 …………………………………… 138
§6.5 二维随机变量及其概率分布 …………………………………… 145
第七章 随机变量的数字特征 …………………………………… 156
§7.1 数学期望 …………………………………… 156
§7.2 方 差 …………………………………… 162
§7.3 协方差与相关系数 …………………………………… 167
§7.4 大数定理与中心极限定理 …………………………………… 170

第三部分 统 计

第八章 数理统计基础 …………………………………… 179
§8.1 总体与样本 …………………………………… 179
§8.2 常用统计量 …………………………………… 181
§8.3 常用统计分布 …………………………………… 183
第九章 统计推断 …………………………………… 194
§9.1 参数的点估计 …………………………………… 194
§9.2 参数的区间估计 …………………………………… 202
§9.3 假设检验 …………………………………… 207
第十章 回归分析 …………………………………… 219
§10.1 一元线性回归 …………………………………… 219
§10.2 非一元线性回归简介 …………………………………… 227

第四部分 数学实验与建模

第十一章 数学实验 …………………………………… 237
§11.1 MATLAB 与微积分 …………………………………… 237
§11.2 MATLAB 与线性代数 …………………………………… 246
§11.3 Excel 与概率统计 …………………………………… 252
第十二章 数学建模 …………………………………… 265
§12.1 数学建模介绍 …………………………………… 265
§12.2 常用经济模型 …………………………………… 275

附 录

附录 1 习题参考答案 …………………………………… 288
附录 2 常用统计表 …………………………………… 301

主要参考文献 …………………………………… 311

第一部分

线性代数

第一章　矩阵与行列式

矩阵是从许多实际问题的计算中抽象出来的一个极其重要的数学概念，它被广泛地应用到现代管理科学、自然科学、工程技术等各个领域. 矩阵是线性代数的一个主要研究对象. 本章将介绍矩阵的概念及运算、矩阵行列式的概念及计算方法、矩阵的初等变换及逆矩阵等.

§1.1　矩阵的概念

假设有某公司生产的三种商品：G1，G2 和 G3，销售给两个消费者：C1 和 C2. 表 1-1 显示了月销售量.

表 1-1

消费者 \ 月销量	G1	G2	G3
C1	7	2	3
C2	2	5	8

从上下文的关系来看，各个数据的含义是非常明确的. 在这种情况下，我们就可以把表头省略掉，以更为简洁的数表形式来表述表 1-1 中的信息，如：

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

另外，在许多实际问题中常常需要解线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \tag{1-1}$$

方程组的系数和常数项可以排成如下形式：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}. \tag{1-2}$$

显然,有了(1-2)之后,线性方程组(1-1)也就随之确定了.

一般来说,对于不同的实际问题,就有不同的数表与之对应.每个位置上的数都具有其固定的含义,不能随意调换,这种**数表**在数学上被称为**矩阵**.

一、矩阵的概念

矩阵定义:由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 组成一个 m 行 n 列的矩形数表,称为一个 $m \times n$ 的**矩阵**,记作

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

其中,a_{ij} 叫矩阵的第 i 行第 j 列元素.

矩阵通常加上一个括弧,用大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 等表示,也可以记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}$,以标明行数 m 与列数 n.

只有一行的矩阵称为**行矩阵**,记作:

$$\boldsymbol{A}_{1\times n} = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}];$$

只有一列的矩阵称为**列矩阵**,记作:

$$\boldsymbol{A}_{m\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}.$$

当矩阵的行数和列数相等时,即 $m=n$ 时,称该矩阵为 **n 阶矩阵**或 **n 阶方阵**,记作 $\boldsymbol{A}_n$ 或 $\boldsymbol{A}$,即

$$\boldsymbol{A}_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

n 阶方阵从左上角到右下角的对角线上的元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为**主对角线**元素.在方阵中,若主对角线以外的元素都为零,则这个方阵被称为**对角方阵**,即

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

特别地,在对角方阵中,当 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=1$ 时,这个方阵被称为**单位矩阵**,记作

$\boldsymbol{E}$ 或者 $\boldsymbol{E}_n$，即

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 1 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}.$$

所有元素都为零的矩阵，称为**零矩阵**，记为 $\boldsymbol{O}$，即

$$\boldsymbol{O}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}.$$

矩阵元素仅为 0 或 1 的矩阵，称为**0—1 矩阵**，如下：$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 0—1 矩阵.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix};\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

下面再通过两个例题，初步介绍矩阵的表示.

【例 1.1】　北京市某户居民第三季度每个月的水（单位：t）、电（单位：kW・h）、天然气（单位：m^3）的使用情况，可以用一个 3 行 3 列的数表来表示，如表 1-2 所示.

表 1-2

	水	电	气
7 月	10	190	15
8 月	10	195	16
9 月	9	165	14

则该数表可表示为如下矩阵：

$$\begin{bmatrix}10 & 190 & 15\\10 & 195 & 16\\9 & 165 & 14\end{bmatrix}.$$

【例 1.2】　某厂向三个商店发送的四种产品的数量可列成矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{bmatrix},$$

其中，a_{ij} 为工厂向第 i 店发送第 j 种产品的数量.

这四种产品的单价及单件重量也可以写成矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\b_{21} & b_{22}\\b_{31} & b_{32}\\b_{41} & b_{42}\end{bmatrix},$$

其中，b_{i1} 为第 i 种产品的单价，b_{i2} 为第 i 种产品的单件重量.

矩阵相等定义：两个 m 行 n 列的矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}_{m\times n}$，如果它们的对应元素分别相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

则称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

根据定义，以下两个矩阵

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 4\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix},$$

无论 a,b,c,d 取什么值，它们都不可能相等，因为它们的列数不同.

【例 1.3】 设有矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}x & 5\\ 0 & -5\\ y & -2\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4 & b\\ 0 & c\\ a & -2\end{bmatrix}.$$

若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，求 x,y,a,b,c.

【解】 由矩阵定义可以得出

$$x=4,b=5,c=-5,y=a(a\text{ 可以取任意值}).$$

因此，只有是**同型矩阵**（两个矩阵的行数和列数都相等）才讨论两个矩阵是否相等；若矩阵相等，则对应位置的元素都必须相等.

§1.2 矩阵的运算

假设某厂第一个月向三个商店发送四种产品的数量可列成矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}16 & 10 & 5 & 0\\ 5 & 0 & 8 & 10\\ 9 & 9 & 9 & 9\end{bmatrix},$$

其中，a_{ij} 为工厂向第 i 店发送第 j 种产品的数量.

若该厂第二个月向三个商店发送四种产品的数量矩阵为：

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}5 & 0 & 18 & 0\\ 8 & 10 & 6 & 10\\ 7 & 7 & 8 & 8\end{bmatrix},$$

那么，该厂这两个月总共向这三个商店发送四种产品的数量为：

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}21 & 10 & 23 & 0\\ 13 & 10 & 14 & 20\\ 16 & 16 & 17 & 17\end{bmatrix}.$$

若第二个月该厂向三个商店发送四种产品的数量矩阵与第一个月一样，则该厂这两个月总共向这三个商店发送四种产品的数量为：

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}2\times16 & 2\times10 & 2\times5 & 2\times0\\ 2\times5 & 2\times0 & 2\times8 & 2\times10\\ 2\times9 & 2\times9 & 2\times9 & 2\times9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}32 & 20 & 10 & 0\\ 10 & 0 & 16 & 20\\ 18 & 18 & 18 & 18\end{bmatrix}.$$

其实，矩阵 C 就是矩阵 A 与 B 的对应位置的数字相加而得到的矩阵，矩阵 D 就是矩阵 A 的每个位置的数字与 2 相乘而得到的矩阵，由此可以定义两个矩阵的加法以及矩阵与数的乘法.

一、矩阵的加法

矩阵加法定义：设有两个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，那么矩阵 A 与 B 的和记作 $A+B$，规定：

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

可以简写成 $C=A+B$，其中 $C=(c_{ij})_{m\times n}$ 中的元素为：

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}.$$

应该注意，只有当两个矩阵为同型矩阵时，才能相加.

可以验证，矩阵加法满足下列运算规律(设 A,B,C,O 都是 $m\times n$ 矩阵)：

(1)$A+B=B+A$；　(交换律)

(2)$(A+B)+C=A+(B+C)$；　(结合律)

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，记 $-A=(-a_{ij})_{m\times n}$，则 $-A$ 称为矩阵 A 的**负矩阵**，显然有：

(3)$A+(-A)=O$；　(负矩阵的特性)

由此规定矩阵的**减法**为：$A-B=A+(-B)$.

(4)$A+O=O+A=A$.　(零矩阵的特性)

二、数与矩阵相乘

矩阵数乘定义：常数 λ 与矩阵 A 的乘积，记作 λA，规定为：

$$\lambda A=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}.$$

数乘矩阵满足下列运算规律(设 A,B 为 $m\times n$ 矩阵，λ,m 为数)：

(1)$(\lambda m)A=\lambda(mA)$；

(2)$(\lambda+m)A=\lambda A+mA$；

(3)$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$；

(4)$1A=A$，　$0A=O$.

【例 1.4】　已知 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 6 \end{bmatrix}$，$\lambda=3$，求 $A+B$，λA.

【解】　$A+B=\begin{bmatrix} 2+1 & 1+3 & 0+2 \\ -3+5 & 4-1 & 7+6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 13 \end{bmatrix}.$

$$\lambda \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3\times 2 & 3\times 1 & 3\times 0 \\ 3\times(-3) & 3\times 4 & 3\times 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -9 & 12 & 21 \end{bmatrix}.$$

【例 1.5】 已知 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，求 $2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{B}$.

【解】 $2\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}$， $3\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

$$2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2-(-9) & -4-0 \\ 4-(-3) & 2-6 \\ 6-0 & -6-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -4 \\ 7 & -4 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}.$$

三、矩阵的乘法

矩阵的乘法公式有点复杂，先通过两个实际例题来直观了解矩阵的乘法运算，然后再介绍矩阵乘法规则的一些细节问题.

【引例 1.1】 某地区甲、乙、丙三家商场同时销售两种品牌的家用电器，如果用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示各商场销售这两种家用电器的日平均销售量（单位：台），用 $\boldsymbol{B}$ 表示两种家用电器的单位售价（单位：千元）和单位利润（单位：千元）：

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Ⅰ} & \text{Ⅱ} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 25 & 11 \\ 18 & 9 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 甲 \\ 乙 \\ 丙 \end{array} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 价格 & 利润 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3.5 & 0.8 \\ 5 & 1.2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{Ⅰ} \\ \text{Ⅱ} \end{array}$$

若用矩阵 $\boldsymbol{C}$ 表示这三家商场销售两种家用电器的每日总收入和总利润.

$$\boldsymbol{C} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 收入 & 利润 \end{array} \\ \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 甲 \\ 乙 \\ 丙 \end{array}$$

则 $\boldsymbol{C}$ 可以通过如下的运算得出，其中 $\boldsymbol{C}$ 的第一列为三家商场各自的总收入，第二列为三家商场各自的总利润.

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 25 & 11 \\ 18 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.5 & 0.8 \\ 5 & 1.2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20\times 3.5 + 10\times 5 & 20\times 0.8 + 10\times 1.2 \\ 25\times 3.5 + 11\times 5 & 25\times 0.8 + 11\times 1.2 \\ 18\times 3.5 + 9\times 5 & 18\times 0.8 + 9\times 1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 & 28 \\ 142.5 & 33.2 \\ 108 & 25.2 \end{bmatrix}.$$

上述运算实际上是 $\boldsymbol{A}$ 矩阵的每一行与 $\boldsymbol{B}$ 矩阵的每一列相乘后再相加，把得到的结果作为 $\boldsymbol{C}$ 矩阵对应的行列元素值.

【引例 1.2】 设有两个线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{cases}; \tag{1-3}$$

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2 \\ x_2 = b_{21}t_1 + b_{22}t_2 . \\ x_3 = b_{31}t_1 + b_{32}t_2 \end{cases} \tag{1-4}$$

若想求出从 t_1,t_2 到 y_1,y_2 的线性变换,可将(1-4) 代入(1-3),使得:

$$\begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})t_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})t_2 \\ y_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})t_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})t_2 \end{cases}. \tag{1-5}$$

线性变换(1-5) 可看成是先作线性变换(1-4),再作线性变换(1-3) 的结果.

若把方程组(1-3)、(1-4) 的系数组成的两个矩阵,按引例 1.1 的规则(左边矩阵的行与右边矩阵的列对应相乘再相加) 进行运算,可写成:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times3} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}_{3\times2} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}_{2\times2},$$

显然,得到的结果恰好是方程组(1-5) 的系数组成的矩阵.

因此,我们把线性变换(1-5) 叫作线性变换(1-3) 与(1-4) 的乘积,相应地把(1-5) 所对应的矩阵认为是(1-3) 与(1-4) 所对应的矩阵的乘积.

上述两个引例都可以归结为矩阵的乘法,于是给定如下矩阵乘法定义.

矩阵乘法定义:设有 m 行 s 列矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times s}$ 和 s 行 n 列矩阵 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{s\times n}$,则它们的乘积 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C} = (c_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{m\times n}$ 是一个 m 行 n 列矩阵,其中,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}. \quad (i = 1,2,\cdots,m;j = 1,2,\cdots,n)$$

通过定义可以得出,矩阵乘法要满足以下规则:

(1) 只有当左边矩阵的列数与右边矩阵的行数相等时,两个矩阵才能相乘.

(2) 乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行数等于左边矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数,列数等于右边矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数.

(3) 乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行的 s 个元素与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的 s 个对应元素乘积之和.

为了便于记忆矩阵乘法,可形象地看如下所示:

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{m\times s} \begin{bmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & b_{sj} & \cdots \end{bmatrix}_{s\times n} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}_{m\times n}.$$

【例 1.6】　求矩阵的乘积 $\boldsymbol{AB}$. 其中,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

【解】　因为 $\boldsymbol{A}$ 是 2×4 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 4×3 矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数,所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$

可以相乘，其乘积 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 是一个 2×3 矩阵，按矩阵乘法规则可得：

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1&0&3&-1\\2&1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&1&0\\-1&1&3\\2&0&1\\1&3&4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\times4+0\times(-1)+3\times2+(-1)\times1 & 1\times1+0\times1+3\times0+(-1)\times3 & 1\times0+0\times3+3\times1+(-1)\times4\\ 2\times4+1\times(-1)+0\times2+2\times1 & 2\times1+1\times1+0\times0+2\times3 & 2\times0+1\times3+0\times1+2\times4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9&-2&-1\\9&9&11\end{bmatrix}.$$

矩阵乘法满足以下运算律：（等式中的 k,λ 是数，并设矩阵 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{O}$ 符合加法、乘法规则）

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$； （结合律）

(2) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$， $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$； （分配律）

(3) $(k\boldsymbol{A})(\lambda\boldsymbol{B})=k\lambda(\boldsymbol{AB})$；

(4) $\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{A}$；

(5) $\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{AO}=\boldsymbol{O}$.

【注】 矩阵乘法不满足交换律即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，因为：

① 当 $m\neq n$ 时，$\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{B}_{s\times n}=\boldsymbol{C}_{m\times n}$ 有意义，而 $\boldsymbol{B}_{s\times n}\boldsymbol{A}_{m\times s}$ 无意义.

【例 1.7】 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0\\3&1\\1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&3\\1&5\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$.

【解】 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}2&0\\3&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\1&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times2+0\times1 & 2\times3+0\times5\\3\times2+1\times1 & 3\times3+1\times5\\1\times2+1\times1 & 1\times3+1\times5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&6\\7&14\\3&8\end{bmatrix}$.

因为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数为 2，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数为 3，两者不等，所以 $\boldsymbol{BA}$ 没有意义.

② 当 $m\neq n$ 时，$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times m}=\boldsymbol{C}_{m\times m}$，而 $\boldsymbol{B}_{n\times m}\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{C}_{n\times n}$，虽然 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 都存在，但不同型.

【例 1.8】 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

【解】 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\end{bmatrix}$.

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{bmatrix}.$$

③ 当 $m=n$ 时，$\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 都是 n 阶方阵，但未必相等.

【例 1.9】 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$，$\boldsymbol{CA}$.