生物医学信息基础课系列教材

线性代数

李林　李冬果　主编

科学出版社

生物医学信息基础课系列教材

线 性 代 数

李 林 李冬果 主编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本教材是面向生物医学工程类、医学及其相关专业的一本线性代数课程的教材. 全书内容包括行列式、矩阵及其基本计算、线性方程组，向量及其基本计算、线性空间、矩阵的特征值与特征向量和二次型. 本教材内容系统完整，符合教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会最新审定的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》. 通过在不同的章节引入与生物医学工程类专业、医学专业等有关的内容以突出专业应用特色.

本教材适合作为高等学校生物医学工程专业、医学及其相关专业线性代数课程的教材，也可作为其他工科专业线性代数课程教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/李林，李冬果主编. —北京：科学出版社，2015.1
生物医学信息基础课系列教材
ISBN 978-7-03-043016-8

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①李… ②李… Ⅲ. ①线性代数-医学院校-教材
Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 009048 号

责任编辑：昌 盛 周金权／责任校对：张凤琴
责任印制：徐晓晨／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 1 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2015 年 1 月第一次印刷 印张：15 5/8
字数：303 000

定价：35.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

《线性代数》编委会

主　　　编：李　林　李冬果

编　　　委：(以姓名拼音首字母为序)

高　磊　华　琳　刘　红　闫　岩

张金旺　郑卫英　郑文新

前　言

线性代数课程是高等院校工科类本科生必修的重要基础理论课. 近年来大学数学课程教学改革不断深入, 呈现了一批教学内容与体系改革优秀成果. 面向对象、强调学生专业背景的优秀教材也逐渐得到认可并在使用中发挥着应有的重要作用. 本书是面向生物医学工程类、医学及其相关专业编写的一本线性代数课程的教材.

生物医学工程学科是依据生物学原理将现代工程技术应用于医学领域所形成的新兴融合性学科. 它的理论和技术可直接用于医学各个学科, 为医学诊断、治疗和科研提供先进的技术和检测手段, 是加速医学现代化的前沿科学. 首都医科大学于 1978 年开办生物医学工程专业, 是全国最早开展生物医学工程专业教育与研究的学校之一. 目前首都医科大学开设生物医学工程专业和假肢矫形工程专业分别为国家级和北京市级特色专业.

作为医科高等学校数学课程的教学团队, 多年来编者一直致力于在确保给予学生必需大学数学基础知识、培养学生基本计算能力和解决医学相关的实际问题的能力的基础之上如何充分尊重学生的专业诉求, 教学生 "有用的" 数学. 本书就是在这一思想指导下, 集编者多年的教学实践经验, 在线性代数的思想、内容与方法框架内体现面向生物医学工程类专业、医学及其相关专业的一次有益的尝试. 从总体设计上, 在编写本书时, 编者做了以下三方面的努力.

1. 追求内容系统完整、主线突出: 本书内容涵盖行列式、矩阵及其基本计算、线性方程组、向量及其基本计算、线性空间、矩阵的特征值与特征向量和二次型, 内容符合教育部大学数学课程教学指导委员会最新审定的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》. 在编写时虽然没有将线性方程组作为一章来处理, 但这并没有削弱本书将线性方程组作为主线贯穿整书的意图.

2. 突出应用特色: 为了体现面向专业的特点, 本书在不同的章节结合生物医学工程类专业、医学及其相关专业基础或专业课的内容编写许多线性代数的应用实例. 例如, 第 2 章中介绍矩阵在医学图像处理、力学方面的应用实例. 第 4 章线性空间介绍内积时引入生物信息学中的一个简单实例, 用内积来判定不同人种之间的近缘程度. 第 5 章矩阵特征值部分专门介绍矩阵在生物力学中的应用. 此外, 专门编写 MATLAB 在线性代数计算中的应用部分置于本书的附录中, 同时也介绍如何运用线性代数方法借助于 MATLAB 解决综合性应用实例.

3. 便于自学与习作: 例题紧扣内容, 着重概念的理解和基本计算的训练. 习题丰富且有层次, 每章都配置两个层次的练习题, 第一层次为最基本要求, 设置选择

题和填空题, 意在强化基本知识的理解、基本计算的温习；同时也配置与内容匹配的计算题和证明题. 第二层次为稍有难度或具有综合性的习题, 供教师或学生在教学或学习过程中选用. 此外书后附有习题答案, 供学生解答后参考对照.

在本书的编写过程中, 编者吸纳了多年从事线性代数教学的教师的经验与体会, 同时也参考了大量的资料和同类教材. 虽然书后附有参考资料列表, 但也未能将参考的全部资料一一列出, 在此一并对引用的资料的作者表示致谢.

本书的编写得到了首都医科大学和生物医学工程学院领导的大力支持, 是在数学与生物信息学教研室的教师积极参与和支持下完成的. 本书由李林、李冬果负责策划, 具体编写工作如下：第 1 章由李冬果、张金旺编写，第 2 章由李冬果、刘红、郑卫英、闫岩编写, 第 3 章由李冬果编写, 第 4 章由李林编写, 第 5 章由李林、郑文新、华琳编写, 附录由高磊编写. 李林对整本书进行了统稿, 李冬果负责全书习题的配置. 感谢科学出版社的编辑, 他们的认真工作和热情帮助不仅使本书得以尽早出版而且提升了本书的编排质量和视觉效果.

由于编者水平所限, 加上任务本身难度大、时间紧, 书中有很多不足和考虑不周之处, 希望得到专家、同行和读者的批评指正, 使本书在教学实践中不断完善.

编　者

2014 年 10 月

于首都医科大学

目　　录

第1章　行　列　式

在许多实际问题中, 常会遇到求解线性方程组的问题. 行列式的概念最初是伴随着线性方程组的求解而发展起来的. 它是研究线性代数的基础工具, 也是线性代数中的一个重要概念. 本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及计算方法, 进而介绍以数学家克拉默 (G. Cramer, 1704—1752) 名字命名的用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克拉默法则.

1.1　二阶与三阶行列式

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

利用消元法可得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}. \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 方程组 (1.1) 有唯一解:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\[2ex] x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.2}$$

在式 (1.2) 中, 解 x_1, x_2 的分子、分母都是两项的代数和, 其中分母 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 是由方程组的四个未知数系数确定的, 为了便于记忆, 引入**二阶行列式**(determinant of second order).

定义 1.1　由四个数排成二行二列 (横排称行、竖排称列) 的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1.3}$$

表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为数表 (1.3) 所确定的二阶行列式, 并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.4}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式的**元素**(elements of a determinant), 下标(subscript)i 称为行标, 表示该元素位于行列式中第 i 行, 下标 j 称为列标, 表示该元素位于行列式中第 j 列. ■

式 (1.4) 也称为**对角线法则**(diagonal rule)(图 1.1) 所示, 实线部分称为主对角线, 虚线部分称为副对角线.

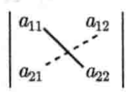

图 1.1 二阶行列式展开法示意图

利用二阶行列式, 式 (1.2) 中记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, 称为方程组 (1.1) 的系数行列式. 把系数行列式的第一列和第二列分别换成方程组右端的常数列所得到的行列式记为

$$D_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D\neq 0$ 时, 方程组 (1.1) 有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}. \tag{1.5}$$

类似地, 对三元线性方程组,

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1.6}$$

也可以用相应的三阶行列式来简化表示它的解.

定义 1.2 设有 9 个数排成三行三列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1.7}$$

记

$$
\begin{aligned}
D=&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
=&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\
&-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

式 (1.8) 称为由数表 (1.7) 所确定的**三阶行列式**(determinant of third order). ■

定义 1.2 表明三阶行列式含有六项, 每项均为不同行不同列的三个元素乘积再冠以正负号, 其规律遵循如图 1.2 所示的对角线法则, 其中每一条实线上的三个元素的乘积带正号, 对应着式 (1.8) 中的三项正项, 每一条虚线上的三个元素的乘积带负号, 对应着式 (1.8) 中的三项负项, 六项的代数和就是三阶行列式的展开式.

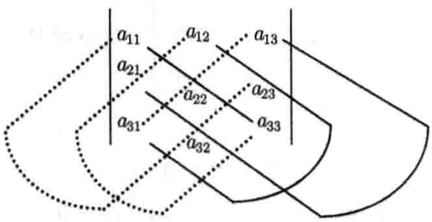

图 1.2　三阶行列式展开法示意图

利用三阶行列式, 记行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, 则当 $D\neq 0$ 时线性方程组 (1.6) 的解可唯一的表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

例 1　求三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 的值.

解

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1\times 1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)+1\times 2\times 1 \\ &\quad -1\times 1\times(-1)-(-2)\times 2\times(-1)-1\times(-3)\times 1 \\ &= -5. \end{aligned}$$

■

例 2　解线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+x_2-3x_3=1, \\ -x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$

解　由于方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5\neq 0,$$

同理可得

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-5,$$

故方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=1.$$

■

二、三阶行列式除了用来解方程组外, 还可以用于解决平面几何中的一些问题.

例 3　设三角形的三点坐标为 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, 它们构成逆时针回路, 则该三角形的面积为

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\times\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 在空间直角坐标系中考虑这个问题, 不妨假设这三个点的坐标为 $A(x_1, y_1, 0), B(x_2, y_2, 0)$, $C(x_3, y_3, 0)$. 利用向量的运算得

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta = 2S_{\triangle},$$

而

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]\boldsymbol{k},$$

因此

$$\begin{aligned} S_{\Delta} &= \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)] \\ &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$ ■

1.2 n 阶行列式

前面讨论表明行列式是解线性方程组的有力工具, 那么自然要考虑能否把以上结果推广到 n 元一次方程组, 即线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

中去? 为此, 需要先定义 n 阶行列式, 并讨论其性质和计算.

1.2.1 全排列及逆序数

为了定义 n 阶行列式, 本节首先引入全排列、逆序数和对换的概念.

定义 1.3 把 n 个不同的数排成一列, 称为这 n 个数的**全排列**(full permutation). n 个不同的数的所有排列种数, 通常用 P_n 表示. 显然对 n 个自然数 $1, 2, \cdots, n$, $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$. ■

各元素之间有一个标准次序, n 个不同的自然数, 规定由小到大为标准次序.

定义 1.4 在一个排列 $i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$ 中, 若数 $i_t > i_s$, 则称 i_t 与 i_s 构成一个**逆序** (inversion). 一个排列中所有逆序的总数, 称为这个排列的逆序数, 记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$. ■

例如, $\tau(25413) = 1 + 3 + 2 = 6$,

$$\tau(n(n-1)\cdots 321) = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

逆序数是奇数的排列称为奇排列, 逆序数是偶数的排列称为偶排列. 例如, 排列 25431 是偶排列, 排列 23415 是奇排列. 因 $\tau(1, 2, \cdots, n) = 0$, 故自然数序列是偶排列.

定义 1.5 在排列中, 将任意两个元素对调, 其余元素不动, 这种作出新排列的手续称为对换. 将相邻两个元素对调, 称为**相邻对换**(adjacent transposition).

例如, 排列 $a_1 \cdots a_l\ a\ b\ b_1 \cdots b_m$ 调换 $a\ b$ 得到排列 $a_1 \cdots a_l\ b\ a\ b_1 \cdots b_m$, 称为相邻对换.

定理 1.1 一个排列中的任意两个元素对换, 排列改变奇偶性.

证明 设排列 $a_1 \cdots a_l\ a\ b\ b_1 \cdots b_m$ 对换 a 与 b 得到排列 $a_1 \cdots a_l\ b\ a\ b_1 \cdots b_m$, 除 a 与 b 外, 其他元素的逆序数不改变. 当 $a < b$ 时, 经对换后 a 的逆序数增加 1, b 的逆序数不变; 当 $a > b$ 时, 经对换后 a 的逆序数不变, b 的逆序数减少 1. 因此对换相邻两个元素, 排列改变奇偶性.

设排列为 $a_1 \cdots a_l\, a\, b_1 \cdots b_m\, b$, 现来对换 a 与 b.

排列 $a_1 \cdots a_l\, a\, b_1 \cdots b_m\, b$ 先经过 m 次相邻对换得到排列 $a_1 \cdots\ a_l\, a\, b\, b_1 \cdots\ b_m$, 此排列再经过 $m+1$ 次相邻对换得到排列 $a_1 \cdots a_l\ b\ b_1 \cdots b_m\ a$, 因此总共经过 $2m+1$ 次相邻对换, 原排列 $a_1 \cdots a_l\ a\ b_1 \cdots b_m\ b$ 对换成新排列 $a_1 \cdots a_l\ b\ b_1 \cdots b_m\ a$, 所以一个排列中的任意两个元素对换, 排列改变奇偶性. ■

1.2.2 n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义, 先来研究三阶行列式定义的结构,

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \end{aligned}$$

不难看出三阶行列式定义具有以下特点: ①三阶行列式恰有 3! 项; ②每项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积; ③每项的正负号都取决于位于不同行不同列的三个元素的下标排列的奇偶性. 例如, 项 $a_{13}a_{21}a_{32}$ 列标排列的逆序数为 $\tau(312) = 1 + 1 = 2$, 为偶排列, 所以取正号, 项 $a_{11}a_{23}a_{32}$ 列标排列的逆序数为 $\tau(132) = 1 + 0 = 1$,

为奇排列, 所以取负号. 因此, 三阶行列式的定义可以表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 $\tau(p_1p_2p_3)$ 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数, $p_1p_2p_3$ 为 1, 2, 3 的一个排列.

同样二阶行列式也可以表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2)} a_{1p_1}a_{2p_2}.$$

仿此可以把行列式定义推广到 n 阶行列式.

定义 1.6 定义由 n^2 个数组成的 n 阶行列式等于所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和 $\sum (-1)^\tau a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$, 记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

简记为 $\det(a_{ij})$. 数 a_{ij} 称为 $\det(a_{ij})$ 的元素. $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 所在对角线称为行列式的**主对角线**(main diagonal), 相应地, $a_{1n}, a_{2,n-1}, \cdots, a_{n1}$ 所在对角线称为行列式的**副对角线**(antidiagonal, counterdiagonal, secondary diagonal). 当 $n = 1$ 时, 一阶行列式 $|a| = a$(注意不要与绝对值记号相混淆). ■

由对换及排列的奇偶性得到 n 阶行列式的等价定义.

定义 1.7 n 阶行列式也可定义为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

其中 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数. ■

由定义 1.6 和定义 1.7 得以下定理.

定理 1.2 n 阶行列式也可定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n},$$

其中 τ 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 和列标排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数之和. ■

例 1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 由行列式定义知, 行列式的值为 4! 项的代数和, 每项形为 $a_{1p_1}, a_{2p_2}, a_{3p_3}, a_{4p_4}$, 当且仅当 $p_1=3, p_2=4, p_3=2, p_4=1$, 时, 项 $a_{1p_1}, a_{2p_2}, a_{3p_3}, a_{4p_4}$ 不为零, 其余项都为零, 所以

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}\\ =&\sum(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}\\ =&(-1)^{\tau(3421)}a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}=(-1)^5 24=-24.\end{aligned}$$

■

例 2 计算行列式的值

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 由行列式定义知, 行列式展开式中不为零的项只有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$, 所以 $D_n=(-1)^{\tau}a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$, 因为行标列标均为标准次序, 因而逆序数和为零, 该项为正, 所以有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$