10

6=1+2+3

65

28=1+2+4+7+14

20737

496=...

73510...

8128=...

...

...

...

...08257

数之书

The Book of Numbers

蔡天新

高等教育出版社

10

6=1+2+3

65

28=1+2+4+7+14

20737

496=...

73510...

8128=...

...

...

...

...08257

数之书

The Book of Numbers

蔡天新

高等教育出版社

内容简介

350多年前，法国南方小城图卢兹的业余数学家费尔马在丢番图的《算术》一书空白处写下了一系列伟大的注记和发现，开创了近代数论。自从1995年费尔马大定理被攻克以来，数论领域捷报频传。先是卡塔兰猜想(2002)获得证明，接着 *abc* 猜想 (2012) 和奇数哥德巴赫问题 (2013) 被宣布解决（前者仍有漏洞），孪生素数猜想 (2013) 也取得重大突破。另一方面，这又是一把双刃剑，给我们敲响了警钟：会下金蛋的鸡越来越少了……

本书也可谓是一种注释读本。书中适时提出了许多引人入胜的新问题，它们来源于自然数，同时又与遐迩闻名的经典问题相联系。这些工作有的出自作者和同道，也有的由大学生、中学老师和不相识的网友参与完成。

书中首次把享誉世界的中国剩余定理命名为秦九韶定理，既还原了历史真相，也符合学界惯例。

图书在版编目（CIP）数据

数之书／蔡天新著．—北京：高等教育出版社，2014．9
ISBN 978-7-04-040932-1

Ⅰ．①数…　Ⅱ．①蔡…　Ⅲ．①整数　Ⅳ．① O121.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 189882 号
（国家自然科学基金资助项目）

策划编辑　赵天夫　　责任编辑　赵天夫　　封面设计　张申申　　责任印制　韩　刚

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	850mm × 1168mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	17.25		
字　　数	300 千字	版　　次	2014 年 9 月第 1 版
插　　页	2	印　　次	2014 年 9 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	49.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　40932-00

数之書

王元

提尔的鸟笼，作者摄于黎巴嫩。这里曾是发达的腓尼基商埠，毕达哥拉斯的故乡，被有的科学史家认定是数论的诞生地。

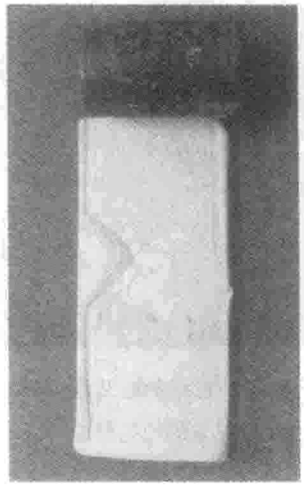
序: 数是我们心灵的产物

最古典的也是最现代的

—— 艾兹拉 · 庞德

真正的定律不可能是线性的

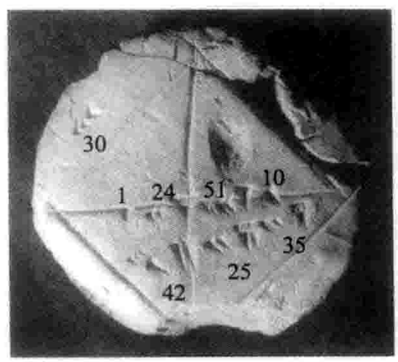
—— 阿尔伯特 · 爱因斯坦



4000 年前苏美尔人使用的圆柱形印章 (作者摄于巴格达)

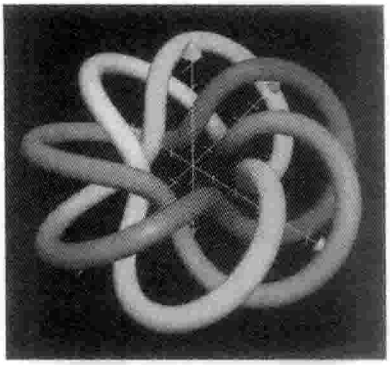
不言而喻, 这是一本有关整数 (有时也涉及有理数) 的书, 是每一位受过中等或高等教育的人都能看懂或部分看懂的书. 2013 年初春的一天, 我在准备一堂《初等数论》课时偶然发现, 我们人类的身体里也包含着神秘的素数 (质数). 事实上, 正常情况下, 我们每个人的双手里, 大拇指有 2 个关节, 其余的手指各有 3 个关节, 而每只手均有 5 个手指. 也就是说, 我们的每一只手都包含了最小的三个素数. 这个发现曾让我兴奋不已, 一段时间里, 我逢人便告知这一奥秘. 我还想起俄国画家康定斯基的话: 数是各类艺术最终的抽象表现.

自然数是人类必不可少的创造发明中最古老的, 而有关自然数或整数性质的数论也是迄今仍然活跃着的科学分支中最古老的. 在农业社会以前, 人们尚且穴居在山洞里, 他们所有的财产是家畜, 每天放牧出去的牛羊必须如数归来. 因此, 计数可谓人类生存的需要, 它首先是一种谋生的工具. 后来, 随着经济社会的发展, 才渐渐地上升为一门科学, 或一门艺术 —— 数论. 本书保留了初等数论的基本内容, 这既可以让我们窥见其成长过程, 又有助于容纳一些新思想, 还方便让初学者和爱好者入门; 与此同时, 我们不断提炼、揭示自然数的奥秘.



耶鲁大学藏泥板书 7289 号 (约公元前 18— 前 16 世纪). 巴比伦人用 60 进制表示 $\sqrt{2}$, 精确到小数点后 5 位

将近一个世纪以前, 美国出生的英国数学家莫德尔在一篇随笔中写道, "数论是无与伦比的, 因为整数和各式各样的结论, 因为美丽和论证的丰富性. 高等算术 (数论) 看起来包含了数学的大部分罗曼史. 如同 (数学王子) 高斯给索菲 · 热尔曼 (一位热爱素数的法国商人之妻) 的信中所写的, '这类纯粹的研究只对那些有勇气探究她的人才会展现最魅人的魔力'." 或许有一天, 全世界的黄金和钻石会被挖掘殆尽, 可是数论, 却是用之不竭的珍宝.



当公元前 3 世纪的欧几里得算法应用于 20 世纪末的纽结理论

从某种意义上讲, 数论是年轻人的事业. 1801 年, 24 岁的德国青年高斯出版了处女作《算术研究》, 从而开创了数论研究的新纪元. 这部伟大的著作曾经投寄到法国科学院而被忽视, 但高斯在友人的资助下将它自费出版了. 在那个世纪的末端, 数学史家康托尔这样评价: "《算术研究》是数论的宪章 …… 高斯的出版物就是法典, 比人类其他法典更高明, 因为无论何时何地从未发觉出其中有任何一处错误." 高斯自己更是赞叹, "数学是科学的皇后, 数论是数学的皇后".

在这部少作的开篇, 高斯即定义了同余, 它是那样浅显易懂, 与我们的日常生活也休戚相关: 任意两个整数 a 和 b 被认为是模 n 同余的, 假如它们的差 $a-b$ 被 n 整除. 高斯首次引进了同余记号, 他用符号 "≡" 表示同余. 于是, 上述定义可表示为

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

有了这个方便的同余记号以后, 数论的教科书显得更加简洁美观. 今天, 基础数论教程的开篇大多介绍整除或可除性. 整除和同余式也构成了本书的两大内容, 实际上, 整除或带余数除法 (由此衍生出来的欧几里得算法在中国、印度和希腊等不同的文明中有着各自的渊源故事和名称)

$$a = bq + r, \quad 0 \leqslant r < b$$

等价于同余式 $a \equiv r \pmod{b}, 0 \leqslant r < b$.

接下来, 线性丢番图方程, 指数、原根或指标, 均与同余有关, 更不用说一次、二次和 n 次剩余了. 不仅如此, 初等数论中最有名的定理, 除了算术基本定理以外, 也均与同余有关. 例如, 欧拉–费尔马定理、威尔逊–高斯定理、拉格朗日定理、荷斯泰荷姆定理、卢卡斯定理、库默尔定理、冯 · 斯陶特–克劳森定理和中国剩余定理, 后者的准确名字应叫孙子–秦九韶定理或秦九韶定理 (第 11 节). 本书首次采用了 "秦九韶定理" 的称谓, 这既还原了事实真相, 也符合学术界的惯例. 同时, 我们还认为并期望, 秦九韶的科学成就、传奇经历和有争议的人生值得李安那样的导演来执拍他的传记电影.

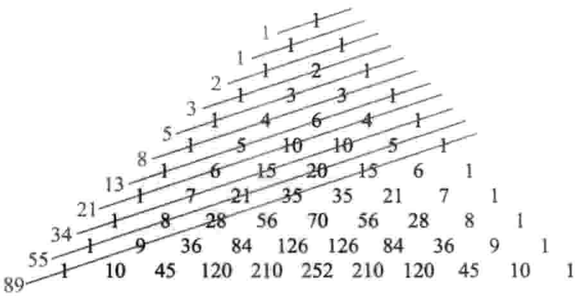
再后来, 我们讲述了高斯最得意的、花费许多心血反复论证 (共 8 次) 的二次互反律, 高斯称其为 "算术中的宝石". 设 p 和 q 是不同的奇素数, 则

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}},$$

这里 $\left(\frac{a}{p}\right)$ 为勒让德符号, 当它取 1 或 -1 分别表示二次同余式 $x^2 \equiv a \pmod p$ 有解或无解. 这个结果是完美无缺的, 我们分别用几何和代数方法予以证明. 在第 14 节, 我们介绍了一个新发现的同余式, 它有着同样美丽的对称性. 设 p, q 为不同的奇素数, 则

$$\binom{pq-1}{(pq-1)/2} \equiv \binom{p-1}{(p-1)/2}\binom{q-1}{(q-1)/2} \pmod{pq},$$

此处 $\binom{m}{n}$ 为二项式系数. 它可以排列成帕斯卡三角, 而在东方, 比如中国, 无论贾宪三角还是杨辉三角均更早出现. 二项式系数的命名无疑与二项式 $(x+y)^m$ 展开后的系数有关, 后一项工作是由牛顿完成的, 这也是他对数论做出的重要贡献.



当 11 世纪的贾宪三角遇上 13 世纪的斐波那契数 (各条斜线上的数之和等于其左边的斐波那契数)

之后, 高斯讨论并给出了原根存在性的两个证明, 其中之一是构造性的. 这个理论虽较完整, 但仍可以增补 (如原根的乘积、求和同余), 这方面本书也均有创新. 说到原根的存在性, 少不了素幂模同余式, 本书给出了不少素幂模甚或整数幂模同余式的新结果, 包括拉赫曼同余式、莫利定理和雅可布斯坦定理的推广, 前者在怀尔斯的证明之前一直是研究费尔马大定理的主要工具. 诚如加拿大和爱尔兰两位同行所指出的, 这一推广 (指从素幂模到整数幂模) 是 1906 年以来的第一次. 又如, 设 n 是任意奇数, 我们发现并证明了

$$(-1)^{\frac{\phi(n)}{2}} \prod_{d|n} \binom{d-1}{(d-1)/2}^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)} \equiv 4^{\phi(n)} \begin{cases} \pmod{n^3}, & 若\ 3 \nmid n, \\ \pmod{n^3/3}, & 若\ 3 \mid n, \end{cases}$$

其中 $\phi(n), \mu(n)$ 分别为欧拉函数和默比乌斯函数. 当 n 为素数 p 时, 此即著名的莫利定理:

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \binom{p-1}{(p-1)/2} \equiv 4^{p-1} \pmod{p^3}, \quad p \geqslant 5.$$

二次型是高斯著作的重头戏, 尤其是表整数问题. 1770 年, 法国数学家拉格朗日证明了, 每一个自然数均可表为 4 个整数的平方和. 同年, 英国数学家华林将此问题推广为任意次幂之和表整数, 此乃著名的华林问题, 这方面本书也有独到的描述和发现. 设 k 和 s 为正整数, 考虑丢番图方程

$$n = x_1 + x_2 + \cdots + x_s,$$

其中

$$x_1 x_2 \cdots x_s = x^k.$$

由希尔伯特 1909 年的论证可知, 必定存在 $s = s'(k)$, 使对任意的正整数 n, 均可表成不超过 s 个正整数之和, 且其乘积是 k 次方. 用 $g'(k)$, $G'(k)$ 分别表示最小的正整数 s, 使对任意 (充分大的) 正整数 n, 上述方程成立. 我们给出了 $g'(k)$ 的准确值和 $G'(k)$ 的估值, 同时猜测 $G'(3) = 3, G'(4) = 4$. 一个更为精巧的推测是, 除了 2, 5 和 11, 每个素数均可表成 3 个正整数之和, 它们的乘积为立方数. 这些结果和猜想比起华林问题来更简洁美丽, 难度却是同样的.

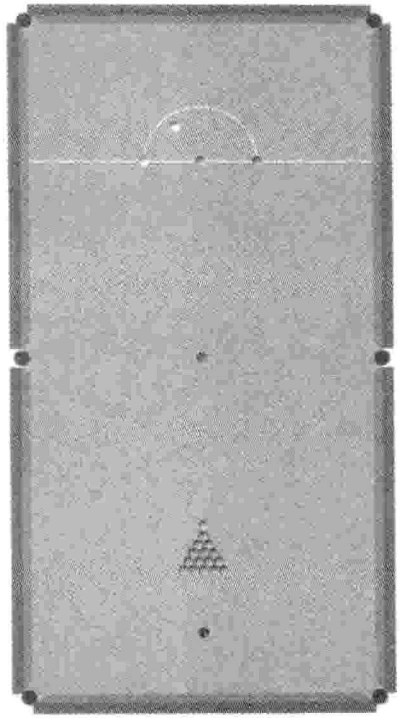
之所以能提出这类问题, 是因为我们把整数的加法和乘法结合起来考虑, 这一点受到了 abc 猜想的形式启发, 后者可以轻松导出费尔马大定理等一系列著名猜想和定理, 其在数论领域的影响力迅速替代了已被证明的费尔马大定理. 事实上, 毕达哥拉斯的完美数和友好数问题也是这两种基本运算的结合, 它们具有恒久的魅力. 正是从这里开始, 我们的想象力获得提升, 渐渐脱离开了同余的观念.

除了华林问题, 我们也把赫赫有名的费尔马大定理做了推广 (第 32 节), 即考虑丢番图方程

$$\begin{cases} a + b = c, \\ abc = x^n \end{cases}$$

的正整数解. 当 $n = 2$ 时, 由毕达哥拉斯数组理论知其有无穷多个解. 下设 $n \geqslant 3, d = \gcd(a, b, c)$. 显而易见, 当 $d = 1$ 时, 上述方程等价于费尔马方程 $x^n + y^n = z^n$. 也就是说, 无正整数解. 而当 $d > 1$ 时, 方程的可解性存在各种可能性, 比如 $d = 2, n = 4$ 时, 有解 $(a, b, c; x) = (2, 2, 4; 2)$.

经过一番探究之后, 我们得到了一些结果, 同时也提出了一类新问题, 其中的一个猜测是, 当 d 和 n 均为奇素数时, 上述方程仍无解. 这是费尔马大定理的完全推广, 且无法由 abc 猜想导出. 借此机会, 我们也说明了已有的两个著名推广 —— 费尔马–卡塔兰猜想和比利亚猜想 (悬赏一百万美元) 与 abc 猜想之间的关系. 此外, 我们还研究了新费尔马方程在二次域 $\mathbb{Q}(\sqrt{t})$ 中的可解性. 例如, 对于 $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, 原先的费尔马方程是无解的.



19 世纪英国士兵在印度发明的斯诺克, 由半圆和三角形数构成

1796 年, 19 岁的高斯发现了正十七边形的欧几里得作图理论 (只用圆规和没有刻度的直尺), 这是一项有着两千多年历史的数学悬案. 同年高斯还证明了: 每个自然数均可表示为 3 个三角形数之和. 这是对费尔马另一个问题第一个肯定的回答, 后者在丢番图的拉丁文版《算术》空白处写下了第 18 条注释:

每个自然数均可表示成 n 个 n 角形数之和.

所谓 n 角形数是毕达哥拉斯学派定义的, 即正 n 角形中的角点个数. 特别地, 三角形数为 $0, 1, 3, 6, 10, \cdots$, 即所有形如 $\binom{x}{2}$ 的二项式系数, 其中 10 和 21 分别为保龄球 (bowling) 的木瓶和斯诺克 (snooker) 的目标球的排列方式和数目.

我们注意到了, 二项式系数有着特殊而奇妙的性质, 它是除了数幂以外最简洁的整数, 因此值得数论学家特别重视. 二项式系数以及多项式系数在本书中多次出现, 每次都获得惊艳的亮相. 例如, 设 p 是素数, 我们发现, 卢卡斯型同余式

$$\binom{p-s}{s} \equiv (-1)^s \pmod{p^2}$$

有解 $1 < s < p-1$ 当且仅当

$$p \mid s!\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{s}\right).$$

不难求出, 不超过 100 的满足上述条件的素数 p 的集合为 $\{11, 29, 37, 43, 53, 61, 97\}$. 根据我们的估算, 预测这样的素数集合占全体素数比例趋向于某个常数 (约为 $0.38\cdots$). 这个常数或许会是有关素数的一个无穷乘积, 但我们却无法断定 p 的个数是否有无穷多个.

又如, 考虑丢番图方程

$$\begin{cases} n = a + tb, \\ ab = \binom{c}{2} \end{cases}$$

的正整数解. 这是二次型问题的一个变种, 我们的结论是: 当 $t=1$ 时, 方程有解当且仅当 $2n^2+1$ 是合数; 当 $t=2$ 时, 方程有解当且仅当 n^2+1 是合数; 而当 t 是奇素数 p 时, 情形会更加微妙. 这既触及二次型表整数问题, 也为我们判断素数的真伪提供了新的线索. 综上所述, 在引入二项式系数和加乘方程以后, 二次型理论问题便有了新的研究内容.

如同高斯指出的, "数只是我们心灵的产物". 我们也赋予了自然数新的概念. 例如, 我们定义了形素数 $\binom{p^i}{j}$, 其中 p 是素数, i 和 j 是正整数. 这是一类特殊的二项式系数, 兼具素数和形数的特性, 其个数与素数个数在无穷意义上是等阶的. 经过一番探究, 我们猜测 (已验证至 10^7, 若限定形素数为正数, 则猜测对于大于 1 的整数成立):

每个自然数均可表示成 2 个形素数之和.

这一猜想的提出无疑受到哥德巴赫猜想的启发, 后者说的是, 每个大于等于 9 (6) 的奇数 (偶数) 均可表示成 3 (2) 个奇素数之和. 我们认为, 这一点不够一致, 且素数本身是构成整数乘法意义的基本单位, 用在加法上未必是最佳选择. 另一方面, 随着数的增大, 哥德巴赫问题的表法数也越来越大, 颇有些浪费了. 更进一步, 如果定义非素数的形素数为真形素数, 则我们有下列更强的猜测 (若限定形素数为正数, 则猜想对于大于 5 的整数成立):

任意大于 1 的整数均可表示成一个素数和一个真形素数之和.

与此同时, 我们也有了下列弱孪生素数猜想: 对于任意正整数 k, 存在无穷多对相邻为 $2k$ 的形素数. 不仅如此, 我们还有下列 k 次幂孪生素数猜想:

任给正整数 k, 存在无穷多个素数 p, 使得 p^k-2 为素数.

特别地, 当 $k=1$ 时, 此即为孪生素数猜想; 而当 $k=2$ 时, 这样的素数对竟然比孪生素数对还要多. 值得一提的是, 无论哥德巴赫猜想还是孪生素数猜想, 目前最好的结果均为中国人 (陈景润和张益唐) 所

取得.

借此机会, 我们回味一下希尔伯特第 8 问题尾末的一段话. 他说, "对于黎曼素数公式进行彻底讨论之后, 我们或许就能够严格地解决哥德巴赫问题, 即是否每个偶数都能表为两个素数之和, 并且能够进一步着手解决是否存在无穷多对差为 2 的素数问题, 甚至能够解决更一般的问题, 即线性丢番图方程 $ax+by+c=0$, $(a,b)=1$ 是否总有素数解 x 和 y".

在引入形素数的概念以后, 我们试图让希尔伯特牵挂的上述丢番图方程有意义, 同时把哥德巴赫猜想和孪生素数猜想相互联系在一起. 我们猜测 (后一部分可利用丢番图方程的性质, 由辛策尔假设推得): 假如 a 和 b 为任意给定的互素的正整数, 则对每个整数 $n \geqslant (a-1)(b-1)$, 方程

$$ax+by=n$$

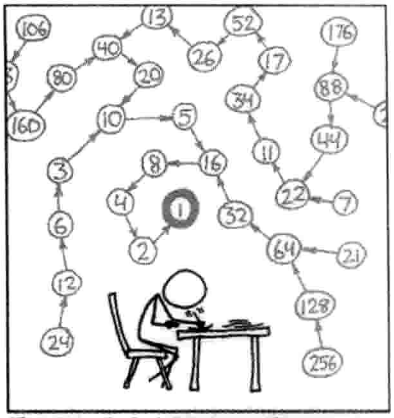
恒有形素数解 (x,y); 而只要 $n \equiv a+b \pmod 2$, 方程

$$ax-by=n$$

恒有无穷多组素数解 (x,y).

本书是在《数论——从同余的观点出发》基础上修润而成, 可以说是注释本, 这方面作者受到了费尔马注释丢番图《算术》的激励. 几乎每一部分都较以往有了新的发现, 每一小节都较以往有了新的内容. 前 5 部分构成基础数论的主要内容, 而第 7 部分几乎是焕然一新. 本书的一大特色是每小节后面的补充读物, 这种形式是一种尝试, 希望借此拓广读者的知识面和想象力, 递增他们对数论的兴趣和热爱. 这些补充读物至少有两种功能:

其一, 介绍了其他数论问题和研究的初步知识, 例如欧拉数和欧拉素数、阿达马矩阵和埃及分数、佩尔方程和丢番图数组、阿廷猜想和特殊指数和、椭圆曲线和同余数问题、哥德巴赫猜想和孪生素数问题、abc 猜想和 BSD 猜想, 自守形式和模形式, 等等. 其中, 椭圆曲线理论是我们的重要工具 (尤其是第 7 部分). 其二, 介绍了与初等数论相关的新问题和新猜想, 除前面提到的以外, 还有格雷厄姆猜想, $3x+1$ 问题、广义欧拉函数、覆盖同余系、素数链和合数链、卡塔兰猜想、多项式系数非幂, 等等.



21 世纪的数学难题——$3x+1$ 问题

所谓欧拉 (素) 数是费尔马 (素) 数的一种推广, 里面有许多奥妙, 也许可以为寻找第 6 个费尔马素数提供线索. 另一个有意思的推广是 GM 数, 以不久前去世的哥伦比亚作家加西亚 · 马尔克斯命名 (他的代表作《百年孤独》容易让人想起那些数个世纪无人解答的数论难题). 我们定义满足 $s=2^{\alpha}+t$ 的正整数 s 为 GM 数, 其中 t 是 s 的真因子之和, α 是非负整数. 显而易见, GM 数中的奇素数等同于费尔马素数. 除此以外, 网友 Alpha 还为我们找到两个非素数的奇 GM 数, 它们分别是 19649 和 22073325.

再来看 $3x+1$ 问题, 它的定义如下: 把偶数减半, 而让奇数乘 3 加 1. 如此不断, 每个正整数最后都会归于 1. 这个问题是每个会四则运算的少年儿童都能验证的, 同时也是众所周知的世界难题. 爱多士甚至认为, 用现有的数学方法对它无能为力. 不仅如此, 有人还断定这个问题无法推广, 相应的 $3x-1$ 问题也不存在. 我们却发现, 后者等价于

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & \text{若 } x \text{ 是偶数},\\ \left[\dfrac{a+1}{a}x\right], & \text{若 } x \text{ 是奇数}.\end{cases}$$

取 $a=2$ 时, 这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 我们发现, 若 a 取其他数, 比如 $a=3$ 时, $h(x)$ 的迭代可以让任何整数 x 归于 1.

本书也研究了最古老的数学问题——完美数问题, 这是由古希腊数学家毕达哥拉斯开创的. 2000 年, 完美数问题被意大利数学家奥迪弗雷迪列入未解决的四大数学难题之首. 毕氏 (对此问题欧几里得的《几何原本》有着较为详细的描述) 考虑了自然数的真因子之和等于其自身的那些数, 即满足

$$\sum_{d|n,d<n} d=n.$$

例如, $6=1+2+3$, $28=1+2+4+7+14$, 这样的数被称为完美数. 经过柏拉图的学生、风筝的发明人阿契塔和欧拉 (相隔 1200 年) 的共同努力, 得到偶数 n 是完美数的充要条件是

$$n=2^{p-1}(2^p-1),$$

其中 p 和 2^p-1 均为素数. 这样的素数 2^p-1 也叫梅森素数. 利用

最先进的计算机联网手段, 人们共得到了 48 个梅森素数. 也就是说, 我们已知 48 个偶完美数, 却无法知晓是否有无穷多个, 或是否有一个奇完美数的存在.

与此同时, 包括斐波那契、笛卡尔、费尔马和欧拉在内的数学家都考虑过诸如 $\sum_{d|n,d<n} d = kn\ (k>1)$ 之类的自然推广 (称为 k 阶完美数), 但都只得到零碎的结果. 本书考虑了平方和完美数的情形, 即

$$\sum_{d|n,d<n} d^2 = 3n. \tag{F}$$

我们求得 (F) 的所有解为 (无论奇偶)

$$n = F_{2k-1}F_{2k+1} \quad (k \geqslant 1),$$

其中 F_{2k-1} 和 F_{2k+1} 是斐波那契孪生素数 (其下标自然也是对孪生素数), 这个数列满足 $F_0=0$, $F_1=1$, $F_n=F_{n-2}+F_{n-1}\ (n>1)$, 从而再次产生了无穷性.

依照我们掌握的计算技术, 共找到 5 个这样的完美数, 其中前两个是 10 和 65, 后两个已是天文数字. 我们称经典的完美数是 M 完美数, 而称平方和完美数是 F 完美数. 必须指出的是, 10 是 F 完美数中唯一的偶数. 而如果我们能够提高计算机的性能和计算技巧, 应该可以算出更多更大的 F 完美数. 值得提醒的是, 序言里的 6 幅插图正是依照斐波那契数排列的, 即所在页码分别是 1, 1, 2, 3, 5 和 8.

平方和完美数是非线性形式, 如同爱因斯坦指出的, 真正的定律不可能是线性的. 最近, 我们又发现了更为深刻、奇妙的定律. 设 s 是任意正整数, 考虑方程

$$\sum_{d|n,d<n} d^2 = L_{2s}n - F_{2s}^2 + 1, \tag{LF}$$

我们找到了它的所有解, 除去有限个可计算的解以外, 均为 $F_{2k+1}F_{2k+2s+1}$ 或 $F_{2k+1}F_{2s-2k-1}$ $(k \geqslant 1)$. 此处 L_{2s} 是卢卡斯数, 即 $L_0=2$, $L_1=1$, $L_n=L_{n-2}+L_{n-1}\ (n>1)$, F_{2k+1} 和 $F_{2k+2s+1}$ (或 $F_{2s-2k-1}$) 为不同的斐波那契素数. 当 $s=1$ 时, (LF) 即 (F). 另外, 我们还发现了与孪生素数猜想等价的平方和完美数问题.

本书的第 7 部分无疑是最现代、最具创造性的, 我们把经典数论

中的 5 大问题 (除了完美数, 还有华林问题、费尔马大定理、欧拉猜想和同余数问题) 做了深入细致的观察和拓广, 得到了不少漂亮的结果和猜想. 以往我们总是追随外国同行的足迹或命题, 希望本书的出版有助于改变这一状况. 可是, 也正因为问题和猜想比较多 (有时较为大胆), 容纳了个人的研究经验, 尤其是近年来的思考 (有的尚未发表), 谬误之处在所难免 (并非客套), 期望读者予以发现和纠正.

最后, 在全书的末节 (第 36 节), 我们提出了自己原创的问题——$abcd$ 方程. 设 n 为非负整数, 考虑方程

$$n = (a+b)(c+d),$$

其中

$$abcd = 1,$$

此处 a, b, c, d 为正有理数. 对哪些 n, 上述方程有解? 在有解时, 是否有无穷多个解? 这是一个既奇妙又复杂的问题, 堪比同余数. 我们找到了无穷多个 n 使方程有解, 同时也排除了更多的 n 的可解性. 这个问题的研究既需要初等数论的技巧, 又与椭圆曲线理论和 BSD 猜想有着密切的联系.

本书的写作也是对过去四分之一个世纪教授浙江大学《初等数论》课程和指导数论专业研究生的小结, 得到了近十位研究生、本科生和合作者的协助, 他们参与研究的某些工作和国内外某些同行的相关成果在书中有所展示. 遗憾的是, 由于我们的视野所限, 加上知识结构的单薄, 虽曾虚心讨教, 仍错失了国内外数论同行发现的许多珍宝. 值得一提的是, 不少工作的进展和预测得到了计算机的帮助, 这是我们比古代同行优越的地方. 就重要性来说我们认为, 计算机之于数论学家, 犹如望远镜之于天文学家.

坦率地承认, 本书的写作动力部分来自于书名《数之书》(英文名 *The Book of Numbers* 发音更为响亮). 她既受到中世纪意大利数学家斐波那契的著作《平方之书》(*Liber Quadratorum*) 的启发, 也被 20 世纪阿根廷诗人、作家博尔赫斯所激励. 博氏有篇小说《沙之数》, 写的是一部书的命运. 此书像沙子一样无头无尾, 书中出现了几个正整数, 也提到无穷大, 偶尔提及四、五个地名和六、七个人物, 多半是苏格兰人. 令人欣慰的是, 本书不仅版式设计上有所拓展, 插图数量也比原先翻了数番, 且尽量选取有特殊意义和不常见的图像.

值此出版之际, 我要特别感谢前辈数学家王元先生, 他不仅为本书题写了书名, 也在许多方面予以鼓励. 还有菲尔兹奖得主、剑桥大学教授阿兰 · 贝克和卡塔兰猜想的证明者、哥廷根大学教授普莱达 · 米哈伊内斯库的褒奖, 前者称赞新华林问题是 "真正原创性的贡献", 后者勉励作者 "在当今繁杂的数学世界找到了一片属于自己的领地", 并对加法数论和乘法数论相结合的思想表示肯定, 他认为这是一类崭新的丢番图方程, "像艺术家一样有着自己独特的品位". 在新近一篇有关 *abc* 猜想的综述文章中 (*Around ABC*, 载《欧洲数学会通讯》), 米哈伊内斯库以丢番图方程的变种 (Diophantine Variations) 为名专节谈论了作者发明的加乘方程, 他并称之为 "阴阳方程" (yin-yang equations).

数论是幸运的, 她吸引了历史上许多伟大的数学家, 毕达哥拉斯、欧几里得、秦九韶、斐波那契、笛卡尔、费尔马、莱布尼茨、欧拉、拉格朗日、高斯、希尔伯特, 其中三位还是隐士, 他们把自己精妙的发现悄悄记录在笔记本上; 还有一些孜孜不倦探索自然数奥秘的人, 丢番图、勒让德、华林、狄利克雷、库默尔、卢卡斯、哈代、莫德尔、拉马努金、爱多士、怀尔斯; 更有一些业余爱好者, 梅森、哥德巴赫、索菲 · 热尔曼、威尔逊、帕格尼尼、德波利尼亚克, 有几位只是蜻蜓点水, 便在数学史上留芳.

最后, 我想引用高斯的一段话作为结束语, 摘自他为英年早逝的弟子艾森斯坦的论文集所写的导言, "数论提供给我们一座用之不竭的宝库, 储满了有趣的真理, 这些真理不是孤立的, 而是最紧密地相互联系着. 伴随着这门科学的每一次成功发展, 我们不断发现全新的, 有时是完全意想不到的起点. 算术理论的特殊魅力大多来源于我们由归纳法轻易获得的重要命题. 这些命题拥有简洁的表达式, 其证明却深埋于斯, 在无数徒劳的努力之后才得以发掘; 即便通过冗长的、人为的手段取得成功以后, 更为清新自然的证明依然藏而不露".

2014 年初夏, 完稿于杭州西溪