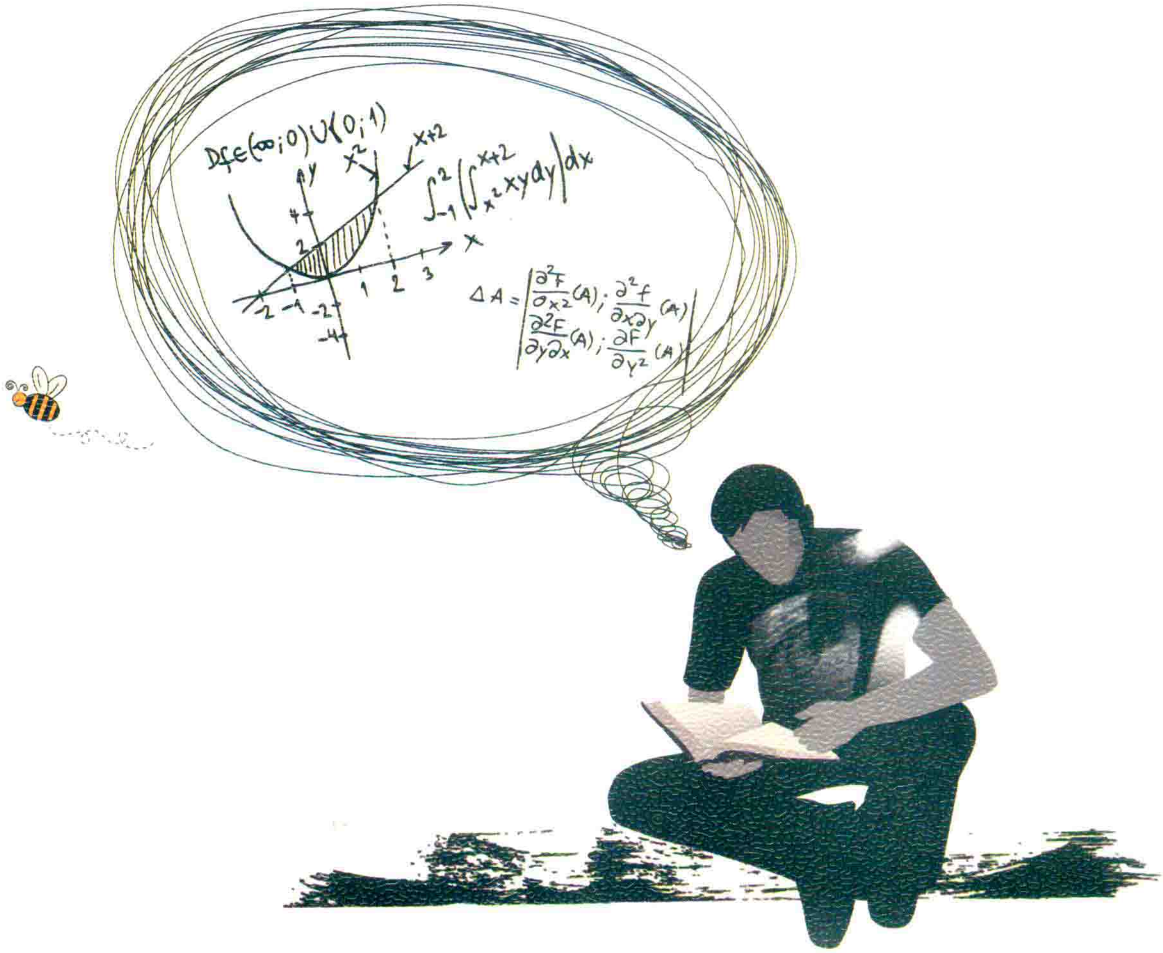

线性代数及其应用

Linear Algebra and Its Applications

王坤龙 编著

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

线性代数及其应用

王坤龙　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书共分为五章：行列式、矩阵、线性方程组、特征值和二次型等，并介绍了在相关学科的具体应用案例。书中内容注重培养学生的抽象思维能力以及分析问题和解决问题能力，力求通俗易懂，深入浅出；利用矩阵的初等变换给出了线性代数中的相关知识，突出了行列式、向量、矩阵及其运算、线性方程组、矩阵特征值等内容，在经济预测与决策、投入产出分析、层次分析法，以及在物理学、化学计量学、量子力学、电磁场理论等学科的具体应用案例，展现了线性代数 “应用广泛性”的这一学科特性。每章节配置了适量的自测题和习题，便于测试学生的综合运用和掌握线性代数知识的能力。

本书可作为高职高专、专升本等层次的“线性代数”课程的教材或参考教材。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数及其应用 / 王坤龙编著. —北京：电子工业出版社，2014.10

ISBN 978-7-121- 23308-1

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 107431 号

策划编辑：施玉新
责任编辑：施玉新　　文字编辑：刘　佳
印　　刷：三河市双峰印刷装订有限公司
装　　订：三河市双峰印刷装订有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：11.75　字数：300.8 千字
版　　次：2014 年 10 月第 1 版
印　　次：2014 年 10 月第 1 次印刷
定　　价：29.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

序　言

线性代数是大学数学的重要组成部分，但是，目前大多数线性代数课程的教材所关注的还是对其理论知识本身的介绍和讲解，内容和形式单一，对于学习者特别是职业教育形势下的学生来讲，缺乏与实际应用的联系。因此，在线性代数教材中增加实际应用教学内容的必要性愈来愈突显。

本书在秉承传统介绍和讲解线性代数理论知识的基础上，从不同学科、不同视角，引入了一定量的实际应用案例，更有利于学生对知识的理解和掌握。编者结合《高职高专教育线性代数课程教学基本要求》以及多年来的数学教学及教改经验，为适应高职高专等职业教育学生的教学需要，经过潜心努力，编写了本教材。希望能使学生在掌握线性代数最基本的概念、理论和方法的基础上，帮助他们解决日常生活、生产技术及经济管理中的一些实际问题。

2014 年 3 月

目　录

第一章 行列式

行列式的理论是对求解n元线性方程组的需要而建立起来的，它是研究线性代数的一个重要工具，在其他学科方面也有着广泛的应用.

第一节 n阶行列式

一、全排列及其逆序数

定义 1.1 n个不同元素按一定的次序排成一个有序数组，称为n级全排列，简称排列.

n个不同元素的全排列的种数共有$n!$个.

一般地，我们只讨论从 1 到n这n个数的全排列，将 1，2，…，n这n个自然数的任意一个排列记成$a_1a_2\cdots a_n$. 对于n个不同元素的任一排列，我们要考虑各元素之间的次序，通常规定从小到大的次序为标准排列（或称自然排列）即 $12\cdots n$.

定义 1.2 在n个不同元素的任一排列中，如果两个元素的先后次序和标准次序不同，那就称这两个元素构成一个逆序. 一个排列中所有元素的逆序之和，称为这个排列的逆序数.

显然，标准排列的逆序数是 0.

例如，在排列 2413 中，21、41、43 都构成逆序，而且只有这三个逆序，所以说 2413 的逆序数等于 3.

下面讨论排列逆序数的一般求法：设$a_1a_2\cdots a_n$是自然数 1，2，…，n的一个排列，先看元素a_1前面有多少个数和a_1构成逆序，即有多少个数比a_1大，设为t_1个；再看a_2的前面有多少个数比a_2大，即有多少个数和a_2构成逆序，设为t_2个；如此继续下去最后设a_n前面有t_n个数比a_n大. 那么这个排列的逆序数等于$t=t_1+t_2+\cdots+t_n$.

例 1 求排列 632514 的逆序数.

解 在排列 632514 中，6 排在首位，逆序数是 0;

3 前面有一个比它大的数，逆序数是 1;

2 前面有两个比它大的数，逆序数是 2;

5 前面有一个比它大的数，逆序数是 1;

1 前面有四个比它大的数，逆序数是 4;

4 前面有两个比它大的数，逆序数是 2;

排列 632514 的逆序数若记为t，则

$$t=0+1+2+1+4+2=10.$$

例 2 求排列 $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots2$ 的逆序数t.

解 显然 $1, 3, \cdots, 2n-1$，的逆序数均为 0，$2n$ 的逆序数为 0，$2n-2$ 的逆序数为 2，$2n-4$ 的逆序数为 4，…，2 的逆序数为 $2n-2$．因此，所求排列的逆序数为

$$t=0+2+4+\cdots+(2n-2)=n(n-1).$$

定义 1.3 逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列.

例如，632514 为偶排列，2413 为奇排列.

定义 1.4 将一个全排列中任意两个元素对调位置，其他元素不动，这种形成新排列的方法称为对换，把相邻两个元素对换称为相邻对换.

例如，排列 3124 经元素 3 和 4 的对换，变成新排列 4123. 在对换下，排列的奇偶性会有变化. 如 3124 是偶排列，4123 是奇排列。可见，对换将改变排列的奇偶性.

定理 1.1 一个排列中的任意两个元素对换后，得到的新排列与原排列有不同的奇偶性.

证 先证相邻对换的情形.

设有全排列 $a_1a_2\cdots a_l abb_1\cdots b_k$，对换 a 与 b，其余元素不动，得到新排 $a_1a_2\cdots a_l bab_1\cdots b_k$.

当 $a<b$ 时，对换后使 a 增加一个逆序，而 b 和其他元素的逆序都没有变，因此，新排列比原排列的逆序数增加 1；

当 $a>b$ 时，对换后得到的新排列比原排列的逆序数减少 1，所以，相邻对换改变了排列的奇偶性.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_k bc_1\cdots c_n$，$a$ 和 b 之间有 k 个元素，先把 b 和它左边的 $k+1$ 个元素依次作 $k+1$ 次相邻对换，得到 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_k c_1\cdots c_n$，再把 a 和它右边的 k 个元素依次作 k 次相邻对换，得到的新排列为 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_k ac_1\cdots c_n$，经过这样 $2k+1$ 次相邻对换就达到 a 和 b 对换的目的，而每次相邻对换都改变排列的奇偶性，所以，新排列与原排列的奇偶性不同.

前面我们提到，标准排列的逆序数是 0，是偶排列，因此不难得到下面推论.

推论 奇排列调成标准排列需作奇数次对换；偶排列调成标准排列需作偶数次对换.

定理 1.2 $n\geqslant 2$ 时，n 个元素的所有排列中，奇偶排列的个数相等，各为 $\dfrac{n!}{2}$ 个.

证 假设 $n!$ 个排列中有 s 个奇排列，t 个偶排列，此时 $s+t=n!$．欲证 $s=t$，先将所有奇排列的头两个数都作一次对换，这样就得到了 s 个不同的偶排列. 已知偶排列共有 t 个，所以 $s\leqslant t$。同理，将所有偶排列的头两个数都作一次对换，这样就得到了 t 个不同的奇排列. 已知奇排列共有 t 个，所以 $t\leqslant s$．故 $s=t$. 这就证明了全部 $n!$ 个排列中，奇偶排列的个数各有 $\dfrac{n!}{2}$ 个.

二、二、三阶行列式

求解方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & (1.1)\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & (1.2)\end{cases}$$

用消元法解方程组，$a_{22}\times(1.1)-a_{12}\times(1.2)$ 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

又 $a_{21}\times(1.1)-a_{11}\times(1.2)$ 得

$$(a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22})x_2=b_1a_{21}-b_2a_{11}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组的解为

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.3}$$

为了记忆方便，引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

等式左端称为二阶行列式，可用字母 $\boldsymbol{D}$ 表示，其中横向称为行，竖向称为列，二阶行列式有两行两列，每个数 $a_{ij}(i,\ j=1,\ 2)$ 称为行列式的元素. a_{ij} 的第 1 个下标 i 表示它在第 i 行，称为行标；第 2 个下标 j 表示它在第 j 列，称为列标. 行列式从左上角到右下角的对角线称为主对角线，而行列式从右上角到左下角的对角线称为次对角线. 从等式右端可以看出，二阶行列式是两项的代数和，每一项是取自不同行和不同列的两个元素之乘积. 一项是主对角线上两个元素的乘积，带正号；另一项是次对角线上两个元素的乘积，带负号（图 1-1），这称为二阶行列式的对角线法则.

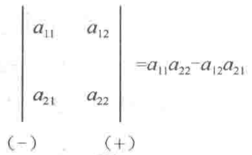

图 1-1

例如 $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 4 - (-3)\times 2 = 10$,

$\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 5\times 3 - (-3)\times 0 = 20$,

$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1\times 0 - 5\times 2 = -10$.

利用二阶行列式的概念，(1.3) 中的分子可分别记为

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{D}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则方程组的解可写为

$$x_1 = \frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}}, \quad x_2 = \frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}}, (\boldsymbol{D} \neq 0).$$

用消元法解三元线性方程组时，为了便于记忆，用同样的方法可以定义三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

等式左端称为三阶行列式，可用字母 $\boldsymbol{D}$ 表示，它具有三行三列，元素 $a_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$ 的下标 i 和 j 表示这个元素位于第 i 行第 j 列. 注意到三阶行列式为 3!=6 项的代数和，每一项都是取自不同行不同列的三个元素的乘积. 主对角线方向的三项前面带正号；次对角线方向的三项前面带负号（如图 1-2），这称为三阶行列式的对角线法则.

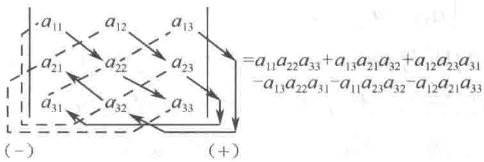

图 1-2

例 3 解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0. \end{cases}$$

解 方程组的系数行列式 $\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$，所以方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}}{10} = 2, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{10} = -1.$$

例 4 计算下面三阶行列式

（1）$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$；（2）$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 1 & -a & -b \\ a & 1 & -c \\ b & c & 1 \end{vmatrix}$.

解（1）$\boldsymbol{D} = 3\times1\times(-2)+(-2)\times3\times2+1\times0\times(-2)-1\times1\times2-3\times0\times3-(-2)\times(-2)\times(-2)=-12.$

（2）$\boldsymbol{D} = 1\times1\times1+(-a)(-c)b+(-b)ca-(-b)\times1\times b-(-a)a\times1-1\times(-c)c = a^2+b^2+c^2+1.$

三、n 阶行列式

1. 项的组成

从（1.4）可以看出，三阶行列式是 3!=6 项的代数和. 其中，每一项都是取自不同行、不同列的三个元素的乘积；而且，所有取自不同行、不同列的三个元素的乘积也是三阶行列式的一项. 因此，如果把行标的排列一律都写成标准顺序（即从小到大的顺序），三阶行列式的任意项在不计符号时，就可以写成

$$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}, \tag{1.5}$$

其中 $p_1p_2p_3$ 是“1，2，3”的一个排列. 当 p_1，p_2，p_3 取尽“1，2，3”的所有排列时，（1.5）恰好取尽（1.4）中的所有项（不记符号）.

2. 项的符号

把（1.4）中的各项按（1.5）写出时，带正号的有三项，它们的列标的排列分别是 123，231，312，均构成偶排列. 带负号的也有三项，它们列标的排列分别是 321，213，132，均构成奇排列. 因此项 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 的列标排列 $p_1p_2p_3$ 是偶排列时，取正号；是奇排列时，取负号. 于是（1.4）的任意项可写成 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 其中 $p_1p_2p_3$ 是“1，2，3”的一个排列，t 为该排列的逆序数.

综上分析，三阶行列式可表示成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 $\sum$ 是对“1，2，3”构成的所有排列 $p_1p_2p_3$ 取和. 显然，这些规律对于二阶行列式也成立.

把三阶行列式推广到一般情形，就得到 n 阶行列式的定义.

定义 1.5 设有 n^2 个数（元素），排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

从表中取位于不同行不同列的n个数作乘积，所取到的n个元素按行标由小到大排成标准排列，列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数"1，2，⋯，n"的一个排列，其逆序数为t，得到项为

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

由于列标的排列为$n!$种，这样取得的项共有$n!$个，这些项的代数和

$$\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

称为n阶行列式，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中$\sum$是对"1, 2, ⋯, n"构成的所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 对应的全部项取和，数 a_{ij}(i, $j=1$, 2, ⋯, n) 称为行列式的元素. 行列式也可用符号 $\Delta(a_{ij})$ 或字母 $\boldsymbol{D}$ 简记.

这个定义和前面的二阶、三阶行列式的定义是一致的，只要取n等于 2 或 3 即可，当 $n=1$ 时，一阶行列式就是元素本身，即 $|a|=a$. 注意把一阶行列式和a的绝对值区分开，必要时需加以说明.

但应注意，二阶和三阶行列式的对角线计算法对四阶以上行列式的计算是不适宜的.

因此，对于n阶行列式的定义我们采取下面的这种形式来进行叙述.

从定义 1.5 看出，项 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中元素的行标构成的排列 $12\cdots n$ 是标准排列，逆序数是 0，因此该项可记成 $(-1)^{0+t} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$. 若交换这项中的两个因子的位置，它们的行标排列和列标排列都随之做相应对换，排列的奇偶性同时改变，但它们的逆序数之和的奇偶性不变，项前的正负号不变. 因此，该项的因子经若干次交换，可使列标排列变成标准排列，而项前的正负号不会改变，因此可写成形式

$$(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n},$$

其中 $q_1q_2\cdots q_n$ 是元素行标的一个排列，s是它的逆序数. 所以

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} = (-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$$

显然，排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 由排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 唯一确定. 且不同的排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 对应不同的排列 $q_1q_2\cdots q_n$. 这样，由 $n!$ 项 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 得到 $n!$ 项不同的 $(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$，即为 $q_1q_2\cdots q_n$ 所有可能排列对应的项，于是得到

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=\sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^s a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

定义 1.6

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^s a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn},$$

其中 $q_1q_2\cdots q_n$ 是元素行标的一个排列，s 是它的逆序数，$\sum$ 是对“1，2，…，n”构成的所有新排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 取和.

下面仅以特例进行说明，如何利用定义来计算 n 阶行列式.

例 5 计算下面对角行列式（对角线以外的元素全是 0）

（1）$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}$；　（2）$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}$.

解 （1）依据行列式定义，令 $a_{11}=\lambda_1$，$a_{22}=\lambda_2$，…，$a_{nn}=\lambda_n$，在和式 $\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中，只有当 $p_1=1$，$p_2=2$，…，$p_n=n$ 时这一项不等于零，其他项全是零，而排列 $p_1p_2\cdots p_n=12\cdots n$ 的逆序数是 0，所以

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

（2）令 $a_{1n}=\lambda_1$，$a_{2,n-1}=\lambda_2$，…，$a_{n1}=\lambda_n$，在和式 $\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中，只有当 $p_1=n$，$p_2=n-1$，…，$p_n=1$ 时的一项不等于零，其他项全是零，而排列 $p_1p_2\cdots p_n=(n-1)\cdots321$ 的逆序数 $t=1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$，所以

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

例 6 当行列式对角线以下的元素全为零时，称其为上三角行列式，证明上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 依照行列式定义的等价形式

$$D=\sum(-1)^t a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn},$$

当 $q_j>j$ 时，$a_{q_jj}=0\ (j=2,3,\cdots,n)$，只有当 $a_j\leqslant j$ 时，有可能 $a_{q_jj}\neq 0\ (j=1,2,\cdots,n)$.

因为 $a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$ 是取自不同行不同列的 n 个元素乘积，所以，其乘积可能不为零的项的第一个元素只能取第一列的 a_{11}，其第二个元素只能取第二列的 a_{22}，…，其第 n 个元素只能取 a_{nn}，该项即为

$$a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

其行标排列 $q_1q_2\cdots q_n=12\cdots n$ 的逆序数是 0，而其他各项均为 0，则 $\boldsymbol{D}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

类似地，当行列式对角线以上的元素全为零时，称其为下三角行列式，和上三角行列式相仿，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

上三角行列式和下三角行列式统称为三角行列式. 在计算行列式时，常常把行列式化为三角行列式，以简化计算. 例 6 的结果可作为公式应用.

例 7 求下列行列式的值

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ f & 0 & 0 & g \end{vmatrix}.$$

解 在四阶行列式 $\boldsymbol{D}$ 的所有项中，除 $aceg,bcef$ 两项外，其余项都为 0.$aceg$ 的列标排列为 1234，是偶排列；$bcef$ 的列标排列为 4231，是奇排列. 所以

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ f & 0 & 0 & g \end{vmatrix}=aceg-bcef\ .$$

习题 1.1

1．求出下列各排列的逆序数，并指出排列的奇偶性

（1）32415；（2）$n(n-1)(n-2)\cdots 321$；

（3）$135\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$；

（4）$147\cdots(3n-2)258\cdots(3n-1)369\cdots(3n)$.

2．求 $i,\ j$ 使

（1）$29\,i\,146\,j\,73$ 为偶排列；

（2）$3\,i\,4625\,j\,7$ 为奇排列.

3．用行列式定义证明

（1）$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；

（2）$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

4．指出下列各乘积是属于几阶行列式中的项，并确定其前面的符号

（1）$a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$；（2）$a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$.

5．求行列式$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$中含 x^4 和 x^3 的项.

6．利用行列式的定义计算五阶行列式

$$\boldsymbol{D}_5 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

第二节　行列式的性质

由行列式定义可知，n阶行列式的值是 $n\,!$项的代数和，且每项是 n 个数的乘积，当 n 较大时，计算量就相当大，而利用行列式的性质可简化行列式的计算.

设 $\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

行列式 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$ 称为行列式 $\boldsymbol{D}$ 的转置行列式. 在下面各性质中都设 $\boldsymbol{D} = \Delta(a_{ij})$ 是上面的行列式.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

证　将 $\boldsymbol{D} = \Delta(a_{ij})$ 的转置行列式写成如下形式

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $b_{ij} = a_{ji}(i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，由行列式的定义 1.5 和定义 1.6 可知

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} &= \sum (-1)^t b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} \\ &= \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} = \boldsymbol{D} \end{aligned}$$

其中 t 是排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数.

上述情况表明行列式的行和列的地位是相同的，也就是说，对“行”有关的性质成立，

对“列”也同样成立，反之亦然. 因此，下面的性质只对行（或列）证明即可.

性质 2 互换行列式的两行（列），行列式变号.

证 把行列式 $\boldsymbol{D}$ 的第 i 行和第 j 行互换而其他行保持不变，得到行列式 $\boldsymbol{D}_1$，即

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \cdots\cdots 第i行 \\ \\ \cdots\cdots 第j行 \\ \\ \\ \end{array}$$

可以看出，当 $k\neq i, j$ 时，$b_{kp}=a_{kp}$，而当 $k=i, j$ 时，$b_{ip}=a_{jp}$，$b_{jp}=a_{ip}(p=1, 2, \cdots, n)$ 根据 n 阶行列式的定义 1.5 和定义 1.6，可知

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_1 &= \sum(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &= \sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \end{aligned}$$

其中当行标排列为自然排列时，t 为列标排列 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数，设 t_1 为列标排列 $p_1p_2\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数，则 $(-1)^t=-(-1)^{t_1}$，于是

$$\boldsymbol{D}_1=-\sum(-1)^{t_1}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-\boldsymbol{D}.$$

推论 若行列式中有两行（列）完全相同，则该行列式为零.

证 把完全相同的两行互换，则有 $\boldsymbol{D}=-\boldsymbol{D}$，故 $\boldsymbol{D}=0$.

性质 3 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘以行列式.

证

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots(ka_{ip_i})\cdots a_{np_n}$$

$$=k\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}=k\boldsymbol{D}.$$

推论 1 行列式中某一行（或列）所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 2 若行列式中有一行（列）所有元素全是零，则该行列式等于零.

推论 3 行列式中若有两行（列）元素对应成比例，则该行列式等于零.

性质 4 若行列式的某列（行）的所有元素都是两数之和，那么这个行列式等于两个行列式之和，即

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1j}+a'_{1j}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2j}+a'_{2j}) & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nj}+a'_{nj}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$