想想和算算

——初中几何的概念与技巧

6

少年儿童出版社

想想和算算

——初中几何的概念与技巧

（六）

周玉刚　余致甫　陈肇曾　编著

少年儿童出版社

封面装帧：沈蓉男
责任编辑：戴　山

想想和算算

——初中几何的概念及技巧

（六）

周玉刚 等编著
少年儿童出版社出版
（上海延安西路1538号）
新华书店上海发行所发行
上海市印刷十二厂排版　　儿童印刷厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 9.25　字数 190,000
1986年9月第1版　1987年10月第2次印刷
印数 3,801-28,800
统一书号：R7024·226　　定价：1.45元

目　录

一、基本图形的性质

1. 三 线 八 角

基 本 要 点

1. 三线八角

两条直线 l_1、l_2 被第三条直线 l 所截，构成了八只角，如图 1·1 所示。图中，$\angle 1$ 和 $\angle 5$、$\angle 2$ 和 $\angle 6$、$\angle 3$ 和 $\angle 7$、$\angle 4$ 和 $\angle 8$ 被称为同位角；$\angle 3$ 和 $\angle 5$、$\angle 2$ 和 $\angle 8$ 被称为内错角；$\angle 2$ 和 $\angle 5$、$\angle 3$ 和 $\angle 8$ 被称为同旁内角。

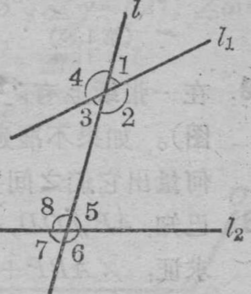


图 1·1

通常称上面三条线和八只角为"三线八角"。

2. 三线八角与平行性

两条直线被第三条直线所截，我们有下面结论：

(1) 同位角相等 ⇔ 这两直线平行；

(2) 内错角相等 ⇔ 这两直线平行；

(3) 同旁内角互补 ⇔ 这两直线平行。

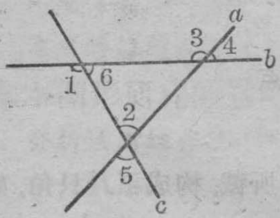
上面三个命题，由左推到右，就是平行线的判定定理，如果由右推到左，就是平行线的性质定理。

三线八角沟通了直线平行位置关系与角度相等、互补等方面的相互制约关系。 当然这些关系构成的前提是"两条直

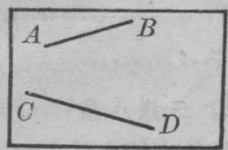
线”被第三条直线所截。

问　题

1. 如图，$\angle1$、$\angle2$、$\angle3$、$\angle4$、$\angle5$ 和 $\angle6$ 中哪些是同位角、内错角、同旁内角？



(第 1 题)



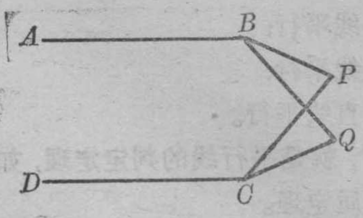
(第 2 题)

2. 在一张纸上有两条不相交、也不平行的直线 AB、CD(如图)。如果不准延长 AB 与 CD 使它们相交，想一想，如何量出它们之间夹角的大小，并说出道理。

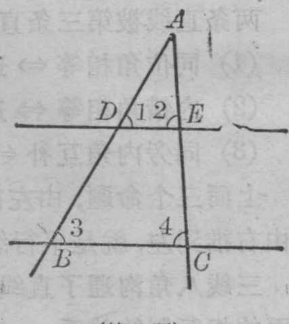
3. 已知：$AB\parallel CD$，任取两点 P、Q，

求证：$\angle ABP+\angle BPC+\angle PCD$

$=\angle ABQ+\angle BQC+\angle QCD$。



(第 3 题)



(第 4 题)

4. 有一道证明题，证法如下所示，判断一下这个证明是否有错误，如有错，指出错在哪里？

证明： 如图所示，

∵ $\angle 1+\angle 2+\angle A=180°$，

$\angle 3+\angle 4+\angle A=180°$，

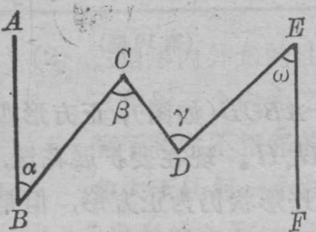
∴ $\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4$。

∵ $\angle 1$、$\angle 3$ 为同位角，$\angle 2$、$\angle 4$ 为同位角，

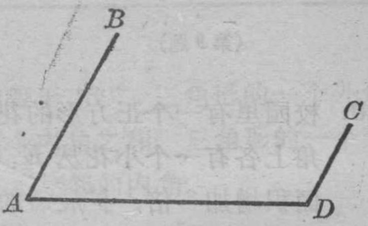
∴ $\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$，

∴ $DE \parallel BC$。

5. 如图所示，测得 $\angle\alpha=40°$，$\angle\beta=75°$，$\angle\gamma=82°$，$\angle\omega=47°$，能否由此判定 AB 与 EF 平行。为什么？



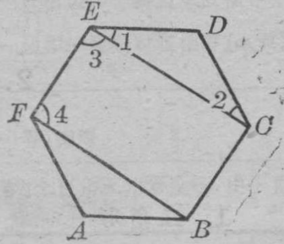
（第5题）



（第6题）

6. 已知：$AB \parallel CD$，且 $AB+CD=AD$。要在 AD 上求一点 P，使 $BP \perp PC$。（先用三角板试一下，然后对 P 所在的位置提出自己的假设，再加以证明）

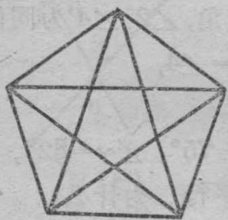
7. 如图，正六边形 $ABCDEF$ 中，BF、CE 是对角线，它们是平行的，你能证明吗？



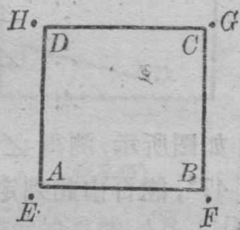
（第7题）

8. "$\angle A$ 的两边与 $\angle B$ 两边分别平行，则这两角相等，即 $\angle A=\angle B$"。这个命题对吗？为什么？

9. 我国的国旗是五星红旗，如果把国旗中的一个大的五角星的几个顶点连结起来，那末就得到一个五边形(如图)。想一想，在这个图形中，有几对平行线？有几个梯形？有几个菱形？



(第 9 题)



(第 10 题)

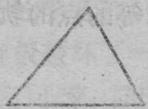
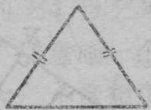
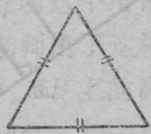
10. 校园里有一个正方形的花坛 $ABCD$(如图)，正方形四个角上各有一个小花丛 E、F、G、H。现在要扩展花坛，使面积增加一倍，扩展后的花坛形状仍为正方形，但是原来四个小花丛的位置不准移动，而且使它仍在新花坛底脚线的外面。请你想一想，新花坛的底脚线应如何确定？

2. 全等三角形

基本要点

1. 三角形

(1) 三角形的分类

按边＼按角	锐角	直角	钝角
不等边			
等腰			
等边			

(2) 三角形内外角的性质

三角形三个内角之和等于180°；三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角之和；三角形的一个外角大于任何一个和它不相邻的内角。

2．三角形的全等

	任意三角形	直角三角形
判定	(1) 三边对应相等(s、s、s) (2) 两边和夹角对应相等(s、a、s) (3) 两角和一边对应相等(a、s、a)(a、a、s)	(1) 两直角边对应相等(L、L) (2) 一直角边和一斜边对应相等(L、H) (3) 一边和一锐角对应相等(a、H)
性质	(1) 对应角相等 (2) 对应线段(边、高、中线、角平分线……等)相等	
说明	判定一般三角形全等需要三个条件，判定两个直角三角形全等，由于直角条件的存在，因而只需两个条件就行了。	

3．两个轨迹

(1) 到两定点等距离的点的轨迹是连结这两定点所得线段的垂直平分线(图 1·2)；

(2) 到一个角的两边距离相等的点的轨迹是这个角的平分线(图 1·3)。

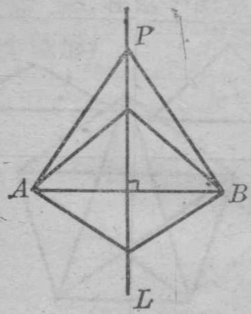


图 1·2

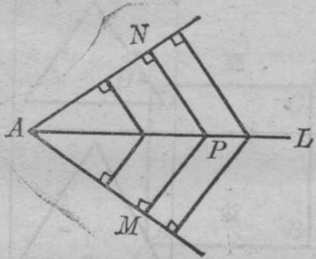
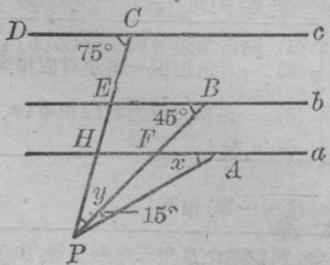


图 1·3

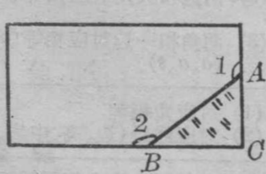
上面两个轨迹都可以应用全等三角形概念进行证明。

问　　题

1．已知：$a \parallel b \parallel c$(如图)，$\angle DCP = 75^\circ$，$\angle EBP = 45^\circ$，$\angle FPA = 15^\circ$，求 x、y 的值。



(第 1 题)



(第 3 题)

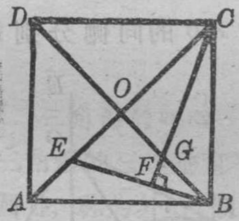
2. 在三角形中，有一个角等于其它两角的差，想一想，这个三角形是什么样的三角形？

3. 小苹的爸爸是数学老师。一天他不小心，把家里一块长方形的玻璃台板敲坏了一个角(图中的 $\triangle ABC$)。爸爸回家后，批评了小苹，同时要他想一想，这块玻璃台板的剩余部分里的 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 之和为多大？

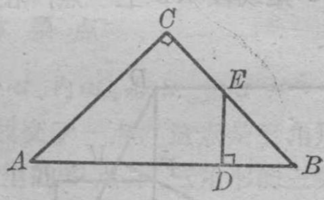
4. 小明问小彦，随意画一个五角星，这个五角星的五个顶角之和有多大？小彦想了一想说，这五个顶角之和等于 $180°$。你能证明这个结论吗？

5. 游园会上，老师出了这样一道思考题：在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，AB 上的高大于或等于 AB，AC 上的高也大于或等于 AC。想一想，这个三角形是什么样的三角形？你能很快得出这个问题的结论吗？

6. 如图，正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 交于点 O，E 是 OA 上的任意一点，$CF\perp BE$，交 OB 于 G。
求证：$OE=OG$。



(第 6 题)

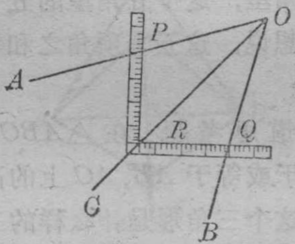


(第 7 题)

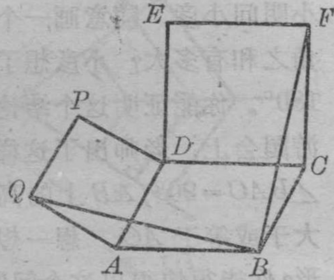
7. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=BC$(如图)，D 是 AB 上一点，且 $AD=AC$，$DE\perp AB$。求证：$CE=ED=DB$。

8. 小英的哥哥是个木工，一天她问哥哥，如果在干木工活

时，需要平分一个角，你是怎样做的？她哥哥笑着拿了一把曲尺（两条带有刻度的直尺，依直角接在一起）。说：我先在角的两边上量出相等的线段 OP、OQ（如图），再把曲尺放上去，使尺的两边上相同的刻度与 P、Q 重合，于是在曲尺的直角顶点 R 处作一记号，连接 OR 得射线 OC，则 OC 就是 $\angle AOB$ 的平分线。想一想，这是什么道理？



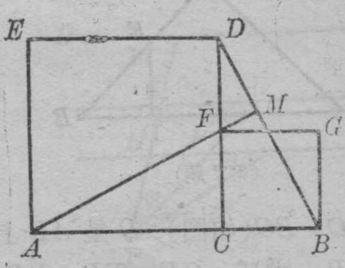
（第 8 题）



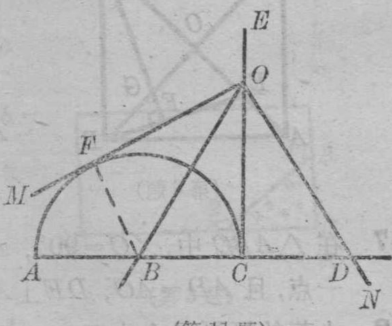
（第 9 题）

9. 如图，$ABCD$ 是平行四边形，$DCFE$、$ADPQ$ 是以 $\square ABCD$ 的边 DC、AD 为边长向外作的两个正方形，连结 BF、BQ。求证：$BF=BQ$。

10. C 是线段 AB 上一点，在线段 AB 的同侧分别以 AC、



（第 10 题）

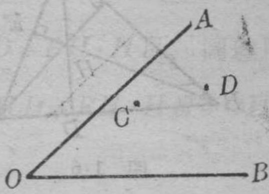


（第 11 题）

CB 为边作两个正方形 $ACDE$、$CBGF$，连结 BD、AF，并延长 AF 交 BD 于 M，求证：$BD \perp AM$。

11. 小李想把一个任意角三等分。他想了这样一个办法：以 B 为圆心、以 r 为半径画一个半圆(如图)，AC 是直径，延长 AC 到 D 使 $CD=r$。过 C 作半圆的切线 CE，他就利用这个图形把任意一个 $\angle MON$ 分成三等分。具体的做法是这样的：将 $\angle MON$ 的顶点 O 放在直线 CE 上，沿直线 CE 调整 O 点的位置，使角的一边 OM 与半圆相切于 F，角的另一边 ON 过 D 点，连结 OB，则直线 OB、OC 把 $\angle MON$ 三等分。想一想，小李的做法对吗？为什么？

12. 在 $\angle AOB$ 内有两定点 C、D，请你找一定点 P，使得 $PD=PC$，且 P 到角的两边 OA、OB 的距离相等。



(第 12 题)

3. 有趣的四心

基本要点

1. 三角形的四心——外心、内心、垂心、重心

三角形的三边垂直平分线交于一点，这点是三角形外接圆的圆心，称为外心(图 1·4 里的 O 点)；三角形的三条内角平分线交于一点，这点是三角形内切圆的圆心，称为内心(图 1·5 里的 I 点)；三角形三边上的高交于一点，这点称为三角形的垂心(图 1·6 中 H 点)；三角形三边上的中线交于一点，这点称为三角形的重心(图 1·7 中 G 点)。

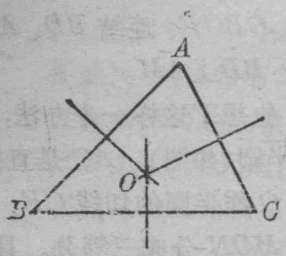


图 1·4

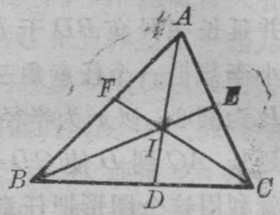


图 1·5

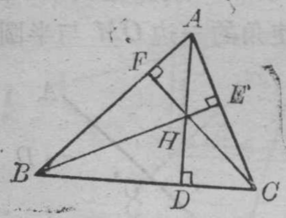


图 1·6

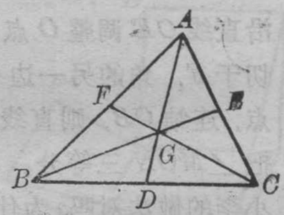


图 1·7

锐角(钝角) $\triangle ABC$ 的外心和垂心在形内(在形外)，Rt $\triangle ABC$ 的外心在斜边的中点处，垂心在直角顶点处。

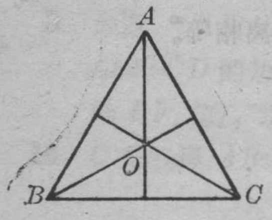


图 1·8

等边三角形的外心、内心、垂心、重心重合于一点，这点称为(正)三角形的中心(图 1·8)。

2. 四心的一些性质

(1) 重心分中线长的比为 2:1，如图 1·7 中，

$$\frac{AG}{GD}=\frac{BG}{GE}=\frac{CG}{GF}=\frac{2}{1}。$$

(2) 内心到三角形的三边的距离相等，这个距离等于内切圆的半径 r，如图 1.5 中，

$$r=ID=IE=IF=\frac{2S_{\triangle}}{a+b+c}。$$

这里$S_{\triangle}$为$\triangle ABC$的面积，a、b、c为三角形三边的长。

(3) 外心到三角形的三顶点的距离相等，这个距离等于外接圆的半径R，如图1·4中，

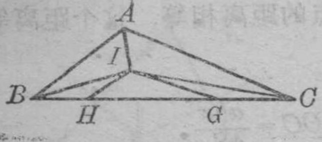
$$R=OA=OB=OC=\frac{abc}{4S_{\triangle}}.$$

这里$S_{\triangle}$为$\triangle ABC$的面积，a、b、c为三角形三边的长。

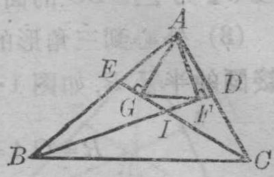
(4) 垂心分高成两线段，其乘积相等，如图1·6中，$AH\cdot HD=BH\cdot HE=CH\cdot HF$。实际上，$\because H$为垂心，$\angle BDH=\angle AEH=90^\circ$，$\angle BHD=\angle AHE$，$\therefore \triangle BED\backsim\triangle AHE$，$\dfrac{BH}{AH}=\dfrac{HD}{HE}$，即$AH\cdot HD=BH\cdot HE$。同理可证$AH\cdot HD=CH\cdot HF$，所以$AH\cdot HD=BH\cdot HE=CH\cdot HF$。

问　　题

1. 有三个工厂，它们的位置不在同一直线上，现在要设立一个公共汽车站，应该选在什么位置，才能离每个工厂的距离都一样近？
2. 想一想，如果三角形的外心在它的外面，这个三角形是什么样的三角形？如果外心在三角形的一边上，这个三角形又是属于什么样的三角形？
3. 作一个不等边锐角三角形的三条高，然后请你回答：图中有几个直角三角形？有几组相等的角？
4. 已知I为$\triangle ABC$的内心(如图)，$\angle A=120^\circ$，$AB=3$，$AC=5$，$IH\parallel AB$，$IG\parallel AC$，求$\triangle IHG$的周长。
5. 已知I为$\triangle ABC$的内心(如图)，$AF\perp BD$，$AG\perp CE$，



（第 4 题）



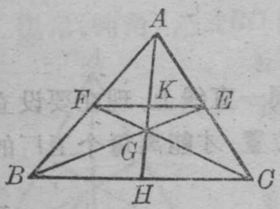
（第 5 题）

F、G 是垂足，求证：$GF \parallel BC$。

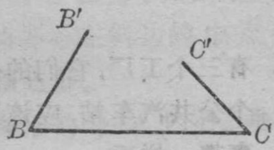
6. 如图，已知 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，$AH = a$，求 KG 的长。

7. 想一想，您能否证明："锐角三角形的垂心是它的垂足所组成的三角形的内心"这个结论。

8. 在 $\triangle ABC$ 中，AD、BE 是 BC、AC 上的高，H 为垂心，AF 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径，FH 交 BC 于 G，求证：$HG = FG$。



（第 6 题）



（第 9 题）

9. 小刚到他叔叔家里去玩，不小心把他叔叔画在纸上的一个三角形撕去了一角，成了一个没有顶点的图形 $B'BCC'$（如图，顶点 A 已被撕去），叔叔看见了，对小刚说："我原来准备要画这个三角形的 BC 边上高、BC 边所对角 $\angle A$ 的平分线，现在你把顶点撕去了，那就要你用一把无刻度的三角板把它们画出来。但是，画图时不准把 $B'B$ 与 CC' 延长来定出点 A 的位置"（画角 A 平分线时，允许使