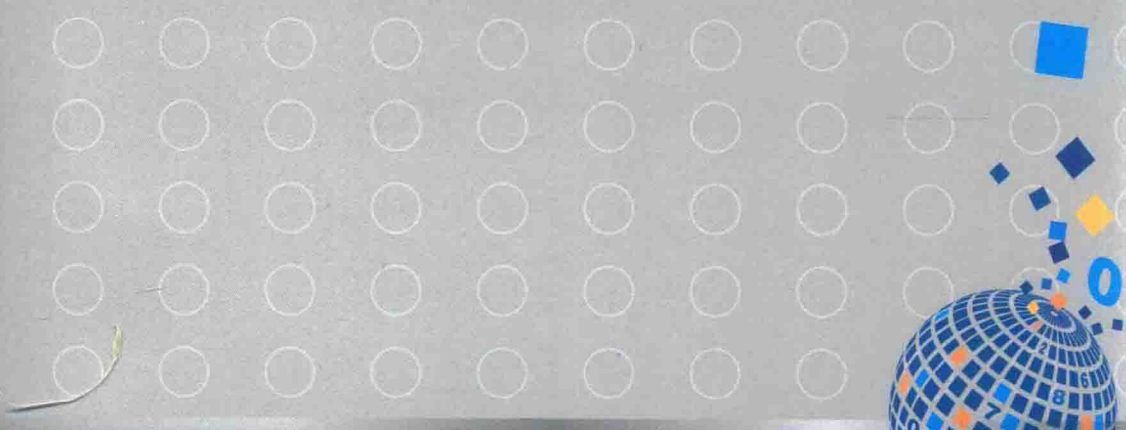




在解题探究中 发展数学能力

◆达延俊 著



學苑出版社

在解题探究中发展 数学能力

达延俊 著

學苑出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

在解题探究中发展数学能力 / 达延俊著. ——北京:
学苑出版社, 2013. 9

ISBN 978-7-5077-4373-9

I. ①在… II. ①达… III. ①中学数学课—教学研究
IV. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 220664 号

责任编辑: 郑泽英

设计制作: 北京天利文苑图文制作中心

出版发行: 学苑出版社

地 址: 北京市丰台区南方庄 2 号院 1 号楼

邮 编: 100079

网 址: www.book001.com

电子邮箱: xueyuan@public.bta.net.cn

电 话: 010-67675512、67678944、67601101 (邮购)

经 销: 全国新华书店

印 刷: 北京长阳汇文印刷厂

开 本: 710mm×1000mm 1/16

印 张: 29.25 印张

字 数: 450 千字

版 次: 2013 年 9 月北京第 1 版

印 次: 2013 年 9 月北京第 1 次印刷

定 价: 81.00 元

在数学教研中实现数学教师的专业发展

在 2010 年《中学数学教学参考》杂志社主办的高中数学“高效课堂”研讨会上（河北保定），我有幸与本书作者相识，虽然会议相处只有两三天，但对达延俊老师的事业心已留下了深刻的印象。这两年，又先后两次受邀到中央民族大学附中作专题讲座：《专家型教师的成长之路》（面向教师）、《高考压轴题的突破策略》（面向学生），与达老师的相处就更多了，对达老师的了解也更多了。尤其是对他 20 多年来坚持自我研修、不断超越的事业追求深感敬佩、由衷赞赏！

达老师从丝绸古道、陇上兰州一路走来，曾先后执教于甘肃省农业机械化学校、兰州第十八中学、兰州第一中学和中央民族大学附属中学。无论在哪里，他都是学生欢迎的老师和朋友，他都是教学科研的参与者或有心人。自 1999 年 1 月以来，达老师已先后在《数学教学研究》（兰州）、《中学数学》（武汉）、《数学通讯》（武汉）、《数学通报》（北京）等刊物上发表文章 60 余篇，指导学生发表习作 4 篇，策划编辑《高中新课程同步优控学案》系列丛书 50 册。日积月累，已在教学研究和解题活动中升华起了真切的数学感悟，本书所汇集的正是这些感悟的代表。

这本散发着讲台回响和笔墨留香的文集，是达延俊老师 20 多年教学实践的辛勤总结，是达延俊老师潜心课题研究的心血结晶。那些教学随笔、课堂反思、读刊心得、解题探索虽然算不上鸿篇巨著，但确实凝聚了达老师对教育的点点滴滴求索、对解题的丝丝缕缕求真。

笔者认为，根据教师对教学的认识和把握，可将教师的教学从低到高分三种境界，每一境界又可以分出两个层次，形成从低到高的三种境界、六个层次：

第一境界是经验型教师：熟悉教学规范，掌握共性化的教学。

——第一层次，从不会教到能教；（初师）

——第二层次，从能教到会教。（知师）

第二境界是技术型教师：驾驭教学规范，产生个性化的教学。

——第三层次，从教知识到教方法；（明师）

——第四层次，从胜任教学到高效教学。（能师）

第三境界是研究型教师：超越教学规范，创造智慧性的教学。

——第五层次，既教书又育人；（良师）

——第六层次，从教的智慧到爱的艺术。（大师）

本书的出版，是迈向第三境界研究型教师的一个标志。其实，教学是一个发现学生、发展学生，发现自我、发展自我的过程，是师生共度的生命历程。教师最基本的工作是教书育人，既教书又育人，并且，教学是一种学术活动，自动包含研究性、创造性。但真正认识到、并在行动中自觉实践的不是很普遍，现实中存在“重教书，轻育人”、“重教学，轻教研”、“重传承，轻创新”的现象。达老师是认识到、并在行动中自觉实践“教学是一种学术活动”的数学教学热心人。

笔者见过很多像达延俊一样的一线教师，他们在平凡的岗位上孜孜以求，把教书与育人结合在一起、把教学与教研结合在一起、把传承与创新结合在一起，他们的教学研究是朴素的、真切的、现实的，且具有成长为专家型教师的广阔前景。笔者想通过为本书作序的方式，向所有这些一线教师表示敬意与支持。

相信这本文集的出版，对促进一线同行的数学交流会起到积极的推动作用，对促进中青年教师的教学成长会起到积极的推动作用，对促进广大学生的数学成熟会起到积极的推动作用。

罗增儒

2013年4月于西安

在教师专业成长的道路上不断超越

看到眼前这本厚厚的关于高中数学教学研究文集的样稿时,我心中有些许感慨,也倍感欣喜!回想2005年11月我调入中央民族大学附中之初,面对的问题很多,但师资薄弱尤为突出,偌大的一个学校,只有一个在编的数学教师,其余都是代课教师,不可思议。2006年元月,高三期末海淀区统考后,文科学生袁境在数学只得100分(满分150)的情况下,能排上区200名。如果数学能加上30分,就能排上区50名而能考上北大。这对近十年没出一个拔尖学生的学校来说,是很大机遇。于是,向中央民族大学鄂书记报告后,挤出大学进京指标,附带解决住房,面向全国选拔学科带头人。全国许多优秀者参与了选拔,但因当时附中的条件、现状、质量及未卜前途和4月要来上班等因素,最终大多数参与者离我而去。兰州老师达延俊,虽没有国家级奖励,省里奖励也不高,但通过课堂试教、专业测试及专家答辩等环节脱颖而出,并始终来意明确,态度坚决,克服困难(我还亲自跑到兰州一中给校长做工作),调入附中工作。

2006年3月底,达延俊老师加盟附中高三数学教学工作。他勤奋而忘我地工作,面对全体学生因材施教、个别辅导、逐个提高,很好地完成了高三数学教学任务,达到了学校的预期目的。继达老师调入附中之后,一大批京内外优秀教师先后加盟附中,使得我校的师资队伍整体实力得到了极大的提升。附中教师队伍建设卓有成效,这无疑增添了我办好中央民族大学附中的信心。

2006年8月起,根据学校的发展和实际需求,成立了中央民族大学附中教科室,学校聘任达延俊老师为教科室主任,全面主抓学校的教科研工作,同时任教两个班的数学教学工作(其中一个班为实验班),达老师在这两个岗位上的任职时间已七年有余,其工作业绩得到了大家的认可。

其一,作为一名高中数学教师,达老师非常热爱自己的教学工作。多年来潜心

钻研高中数学教学,积累了丰富的教学经验。形成了情境引入、问题主导、启发探究、变式拓展及检测辅导的数学“五步教学”模式,并在实践中取得了优异成绩,如中央民族大学附中2012届高三一班高考文科数学平均分为134分,140分以上15人,占北京市海淀区该段总人数的20%,且杨春雪同学高考数学为满分150分(北京市仅两人)。

其二,达老师是一个执著于高中数学教学的研究者,并为之投入了大量的时间和心血。他对于教研的执著与勤奋是值得敬佩的!正如罗增儒教授《序言》中所言:“自1999年1月以来,达老师已先后在《数学教学研究》(兰州)、《中学数学》(武汉)、《数学通讯》(武汉)、《数学月刊》(江苏)及《数学通报》(北京)等刊物上发表文章60余篇。日积月累,已在教学研究和解题活动中升华起了真切的数学感悟,本书所汇集的正是这些感悟的代表。”

其三,达延俊老师是一个优秀的教研引领者和管理者。从引领者的角度来说,他开设有《围棋入门》校本选修课,主编了《高中新课程同步优控学案数学选修1—1》等校本教材;在《数学通报》等国内中等数学类核心刊物上发表论文,在国际数学教育年会上进行了交流发言。2002年12月破格晋升中学高级教师以来,他累计发表论文数十篇,在中学数学同行中有较大影响,尤其对身边青年教师的影响和激励更大。

中央民族大学附中教科室工作从零开始。逐步培养教师们的教研意识,健全教科研制度,开展系列教研活动和课题研究,完成了中央民族大学附中《高中新课程同步优控学案》系列丛书的策划、编辑和出版,编印高考记实文集《在路上》,组织、筹备每年《教育教学工作会》的相关工作,为教师的专业成长搭建了宽广的平台。近年来,教师的论文发表、获奖、校本教材编写、课题申报和立项等成果数量逐年增加,质量也显著提升;学校的教科研氛围也日益浓厚,各年龄段的业务骨干和教科研能手不断涌现,教师队伍建设工作颇有成效。这些工作的开展和成绩的取得,离不开学校教职工的支持与参与,也离不开达老师的精心谋划与组织。

时至今日,达老师在《数学通报》2013年第2期上发表了《一个优美的结论》一文,实现了个人数学教学科研的新的突破,出版个人专著的愿望也成为了现实,作

为中央民族大学附中的校长,我为此感到由衷的高兴!从这些生动的课例及教学感悟中,我能感受到他对教研的执著追求和勤思笃行,也能感受到他愿将自己的教学研究所获与同行分享的诚挚心情。

从达老师的成长经历中我们会得到些许启示:智者创造机会、勇者把握机会、弱者丧失机会;情感、态度和水平的正相关才有价值的体现;教学相长,一花独放不是春,百花齐放春满园。一个有目标、有追求的人会不断超越自我,实现新的更大的提升和突破;一个热爱教学、勤于钻研的教师一定能成为学生爱戴的教师!一个人在平凡的岗位上也能作出不平凡的业绩。

愿达老师再接再厉,百尺竿头更进一步,成为一名专家型教师,更好地发挥引领作用。也真诚地希望全体教师在专业成长的道路上不断超越自我,完善自我,在民族基础教育这个宽广的平台上展示风采,实现价值!让我们共同开拓民族基础教育的非凡事业!

田 琳

2013年6月于北京

目 录

第一部分 教学感悟	(1)
期望之中,意料之外的一个惊喜!	(2)
角色转变让课堂充满生机	(9)
我较为满意的一节课	(16)
最近发展区理论指导下的解题教学	(22)
目前高中数学教学中普遍存在的两个“欠缺”	(24)
记一次难忘的辅导课	(26)
一类不等式证明题的高等背景	(30)
没有“定值”条件就不能用均值不等式求最值吗?	(33)
获取必要条件 避开分类讨论	(37)
一题多证培养发散思维能力	(42)
从一道题谈学生发散思维能力的培养	(45)
实用数学口诀解读	(51)
以问题反思为主线的试卷讲评案例分析	(58)
数学解题教学的有效模式	(70)
跳出解题模式谈解题	(74)
立足课本例题 感受配角变换之重要	(77)
一道经典试题的赏析和变式拓展	(79)
认识圆的直径式方程	(83)
第二部分 解题策略	(85)
利用函数思想判断三角形形状	(86)



例说直线方程“ $x=my+n$ ”在解题中的应用	(87)
直线的斜截式方程“ $y=kx+b$ ”在定点问题中的应用	(93)
多变量消元的对策分析	(100)
不等式证明难点突破策略——等价转化	(104)
跨越超越函数这道“门槛”的有效策略	(109)
谈二次函数区间根问题之解答策略	(118)
关于“ $x_1x_2, x_1+x_2, y_1y_2, y_1+y_2$ ”运算的简化策略	(122)
最值问题的突破策略之寻求转化峰回路转	(127)
第三部分 解题方法	(131)
解析椭圆中一类三角形面积的最值问题	(132)
通解 简解 妙解	(139)
重视椭圆定义的学习和灵活应用	(143)
例说椭圆中一类直线斜率定值问题的解法	(148)
一道不等式证明题的证法探讨	(152)
关于一类无理函数值域问题的探讨	(154)
从一道代数推理题的证明谈起	(157)
等差数列的证明	(160)
运用均值不等式求最值十法	(164)
构造函数证明不等式例说	(169)
巧补形 寻突破	(175)
等价结论作用大	(176)
一题五证显神通	(178)
依据零点分区间求解	(180)
不等式“ $ a - b \leq a+b \leq a + b $ ”应用例析	(181)
第四部分 答疑解惑	(187)
“ ω ”究竟应该和谁相乘?	(188)
一道三角题的错解分析	(190)
利用参数“ t ”的几何意义求弦长	(192)
数学地理综合题例析	(195)
有限集合的所有子集个数的计算	(197)

判断函数奇偶性的一个前提和四条途径	(199)
三项展开式中指定项系数的求法	(202)
数学问题解答	(204)
数形结合 关注细节有效地完成分类与整合	(206)
用“ t ”求弦长错解分析	(208)
平分台体侧面的截面	(210)
浅析“辅助平面法”的应用	(212)
关键在于对定义域和值域的理解	(215)
一道绝对值不等式的六种解法	(217)
参数分离后的困惑	(219)

第五部分 浅议高考

(222)

高考解析几何最值问题的对策分析	(223)
一类高考导数压轴题的突破策略	(229)
关于高考数学总复习的几点浅见	(236)
如何充分发挥高考试题的“营养”价值	(243)
高考命题背景探源	(250)
2008 年高考数学模拟全国卷	(258)
2008 年北京高考数学文 20 题(Ⅱ)别解分析	(273)
一道高考压轴题解法的简化	(274)
2008 年全国高考数学卷(Ⅱ)理科第 21 题巧思妙解	(276)
2012 年海淀期末理科数学 19 题(ii)的另解	(277)
2009 年全国统一考试理科数学试题别解	(280)
高考压轴题突破策略——归纳猜想	(283)
关于一道选择题解法的思考	(287)
巧解高考题一例	(290)
运用特殊化思想解答高考数学选择题	(291)
数形结合解答高考复数选择题	(295)
剪拼方法又三种	(300)
2003 年高考数学(理)第十七题的四种新解法	(303)
应用正弦定理、余弦定理解题例说	(305)

第六部分 读刊有感 (308)

一个优美的结论 (309)

再谈《一个错误的结论》 (318)

关于“问题 62”不同结果的原因探究 (320)

对一类三角不等式通用证法的再探讨 (322)

避开判别式减少致误因素 (329)

避开重心更简捷 (332)

一种更有普遍意义的解法 (333)

分歧在何处? (335)

利用函数 $y = x + \frac{a}{x}$ ($a > 0$) 的单调性解三角题 (337)

转化思想 帮你解题 (339)

例说直线方程“ $x = my + n$ ”在定点问题中的应用 (344)

利用“几率均等”解排列组合应用题 (350)

一道抛物线竞赛题的简解 (351)

朴素自然 通俗易懂 (357)

第七部分 教学相长 (359)

一道选择题的解法 (360)

利用“ $S_n = An^2 + Bn$ ”解等差数列前 n 项和问题 (362)

关于一个不等式的证明 (363)

驻足观察 柳暗花明 (367)

利用“ A 与 $\bar{A}$ ”的关系巧解一道选择题 (369)

一个“非等比”到“等比”的转化 (371)

“裂项”巧证数列型不等式 (373)

差之毫厘,失之千里 (376)

抛物线弦中点轨迹的一个重要结论 (379)

等一等,别急着讲 (381)

一道值得研究的高考数学选择题 (382)

1990 问题的几何意义及简解 (385)

对角线互垂的圆内接四边形面积的最大值求解 (388)

关于高考数学专题复习教学设计的思考与实践	(390)
关于一个椭圆定值问题的延伸	(413)
如此美妙的辩证统一	(416)
如此数形结合更直观	(420)
注重整体性思想简化运算过程	(421)
探究一类椭圆内接四边形面积的取值范围	(423)
一个学习疑难问题的解决对策	(437)
源于课本 体现能力立意的一道数学选择题	(442)
再谈“纠错两例”	(445)
再议一道椭圆中的三角形面积的最值问题	(448)
“ $f'(x) > 0$ ”是“可导函数在对应区间内单调递增”的什么条件?	(450)
后 记	(451)



第一部分 教学感悟

期望之中,意料之外的一个惊喜!

——杨春雪同学文科高考数学满分的教学感悟

在高考资源网首页网站公告栏中,一条醒目的喜讯如下:祝贺 KS5U 校园通中央民族大学附中 2012 年高考再上台阶。

据 2012 年 6 月 23 日统计,中央民族大学附中 2012 年高考时共有 565 人参考,共有 559 人上了本科线,比例为 99%。其中理科最高分:何芃 690 分(海淀第 22 名),文科最高分:肖冰洁 662 分、王振行 655 分、杨春雪 653 分(海淀第 3、4、5 名);理科 650 分以上 23 人(海淀 374 人),文科 620 分以上 28 人(海淀 67 人);文科杨春雪数学 150 分满分。

2012 年北京高考文科数学满分仅有 2 人,理科没有。很荣幸的是杨春雪同学为本人任教的中央民族大学附属中学高三一班学生,现已经被北京大学录取。

杨春雪同学的满分成绩,不仅是她个人的骄傲!也是我个人 21 年高中数学教学生涯的新起点和骄傲!也是中央民族大学附中的骄傲!

高兴之余,静心思考满分的得来不易之过程显得尤为重要。以下结合这一年高考数学文科复习的教学实践,谈一些粗浅的认识,供同行参考。不妥之处,请商榷指正!

一、确定目标

从高二任教我校文科重点班以来至 2012 年高考结束,历时两年。在 2012 年高考中,我所任教的高三一班平均成绩为 134 分,且杨春雪同学获得了满分 150 分的骄人成绩。回想高三复习起始的第一节课,我跟同学们简述了我校 2011 年高考文科数学的优异成绩,并结合班级现状和未来高考试题难易程度提出了如下奋斗目标:确定 2012 年高考文科数学的班级均分目标为 135 分(难易程度与 2011 年相当),单科高分目标 150 分。虽然没有实现班级平均分目标,但在试题较去年难度

提高的前提下,获得这样的成绩,的确是令人倍感欣慰的!我的学生们在高考中的出色发挥令我非常满意。

客观地讲,高考满分是可遇不可求的。但作为数学教师,至少我们的心中要敢想,要善于引导学生向高远的目标努力。俗话说,目标越大,实现的可能性就越大。让高远的愿景目标始终成为激励学生勇攀高峰的不竭动力!

二、教学实践

1. 教辅资料的征订和使用

这一轮高考文科数学复习,虽然也定了一轮和二轮复习的相关数学资料,但在教学过程中基本脱离了这些现成的教辅资料,其功能为学生的自学和参考资料。究其原因,主要还是用起来不顺手,总感不如我意的地方较多,所以干脆自己花时间重新设计高三复习教学案,虽然辛苦,但能将自己的教学理念充分体现,且能结合教情、学情灵活掌握教学进度,适度把握重点、难点,做到张弛有度。

2. 五阶段教学实践

这一轮高考文科数学复习的教学实践,紧扣海淀期中、期末、一模、二模及临考冲刺五个环节依次展开,淡化了一轮、二轮复习的界限。针对五个阶段性目标制定教学计划和内容,在夯实基础的同时,适度超前综合,着眼于学生应试技能的早期培养,着眼于学生综合能力的早期培养。紧扣五阶段目标的教学实践,让每个阶段的短期目标尽可能最大化,即力争海淀期中、期末、一模、二模考出好成绩,使学生占据有利位置和心理优势,不断为下一个目标的实现提供正面激励因素。上述四个阶段的目标完成之后,要着重抓好考前冲刺复习,这一阶段的教学重点是重点板块经典题型的回顾梳理和考前5天的“每日两题预测”引领,预测试题注意控制难度,力求把握北京高考命题风格。事实说明,这样的尝试在帮助学生度过考前焦虑情绪、消除心理障碍、营造临考氛围方面的作用是积极的。

主要的教学资源为:

(1)借助网络资源,自主命题50余套。

(2)加大原创题力度。

原创题两例:

题 1 【中央民族大学附中零模 20】

设 $\{a_n\}$ 为数列, $\{n_k\}$ 为正整数集 $\mathbf{N}_+$ 的无限子集, 且 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, 则数列 $a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$ 称为数列 $\{a_n\}$ 的一个子列, 简记为 $\{a_{n_k}\}$. 数列 $\{a_n\}$ 去掉无限项后得到的子列, 称为 $\{a_n\}$ 的非平凡子列.

(I) 数列 $\{a_n\}$ 本身是否是 $\{a_n\}$ 的一个子列, 并说明理由;

(II) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 2^n, n = 1, 2, \cdots$, 试判断数列 $\{a_{2k}\} (k \in \mathbf{N}_+)$ 是否为 $\{a_n\}$ 一个非平凡子列. 若是, 求其前 k 项和 T_k ; 若不是, 请说明理由;

(III) 在数列 $\{a_n\}$ 中去掉某项后是否可得一个新的等比数列 $\{b_n\}$, 若存在, 试写出 b_n 与 a_n 的关系式; 若不存在, 请说明理由.

题 2 【中央民族大学附中三模 20】

若数列 $A_n: a_1, a_2, \cdots, a_n (n \geq 3)$ 满足 $a_{n+1} + a_n = \frac{4}{3^{n+1}}$, 则称 A_n 为 D 数列. 记

$$S(A_n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

(I) 若 $a_1 = 1$, 写出一个 D 数列 A_5 ;

(II) 是否存在非零实数 a_1 , 使得 D 数列 A_n 为等比数列. 若存在, 求 D 数列 A_n 的通项公式; 若不存在, 请说明理由;

(III) (i) 对于给定的偶数 n_0 , 证明: $S(A_{n_0})$ 是与 a_1 无关的常数;

(ii) 当 $n \geq 3$ 时, $S(A_n) < \frac{1}{2}$ 恒成立, 求 a_1 的取值范围.

专家供题一例(罗增儒教授):

题目 已知函数 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 与 $g(x) = x^2$ 的图象在公共点处的切线重合.

(I) 求 a 的值;

(II) 求公共点处的切线方程;

(III) 对 (I) 中求出的 a 值作函数 $F(x) = f(x) - g(x) (x \in \mathbf{R})$, 试问 $F(x)$ 是否有极值(极小值或极大值). ($e \approx 2.7182, \ln 2 \approx 0.6931$)