

博采各地优秀的高考试题，启发学生的思维
试题蕴含深刻的思想，凝练解题的通性通法
问题经典，适合高考、自主招生的学生使用



高中数学 经典题选

三角函数与平面向量

甘志国 主编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中数学经典题选

三角函数与平面向量

甘志国 主编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学经典题选. 三角函数与平面向量/甘志国
主编. —杭州:浙江大学出版社,2014.3(2014.4重印)
ISBN 978-7-308-12912-1

I. ①高… II. ①甘… III. ①中学数学课—高中—习题集 IV. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 030100 号

高中数学经典题选. 三角函数与平面向量

甘志国 主编

责任编辑 杨晓鸣 冯慈璜(特邀)
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址:<http://www.zjupress.com>)
排 版 浙江时代出版服务有限公司
印 刷 浙江省良渚印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 15.25
字 数 274 千
版 次 2014 年 3 月第 1 版 2014 年 4 月第 2 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-12912-1
定 价 29.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部联系方式 (0571)88925591; <http://zjdxcs.tmall.com>

出版说明

恢复高考至今已有 30 多年,期间沉淀了一批优秀的试题.迈入 21 世纪以来,高考数学命题逐步放权,由全国统一卷演变一考多卷(近 20 个省市自主命题).所以,全国高考数学试题每年都有四五百道,新颖试题层出不穷.作为高中数学教师,研究试题、精选试题便是必做的功课;作为学生总是千方百计搜集各种典型试题训练.面对浩如烟海的题目,如何取舍便是一门学问.如果胡子眉毛一把抓,搞题海战术,必然事倍功半,甚至浪费学生的宝贵时间.但对数学而言,没有一定数量的训练很难深入理解数学的本质、核心,掌握数学的基本技能、技巧,可能出现眼高手低的现象.那么,怎么选择、如何取舍?数学家的体会是读经典,通过经典试题的训练达到举一反三、触类旁通的效果.

浙江大学出版社在全国范围内组织教学一线特级教师、高级教师,反复研究历年高考试题,耗时三年时间,从浩瀚的题海精选了一批经典的高考数学试题,分成八个分册出版(集合与函数、三角函数与向量、数列、不等式、解析几何、立体几何、导数、排列组合与概率).我们选题原则,一必须是考试过的试题,经得起检验,没有科学性、知识性差错;二具有深刻的数学背景、数学思想或蕴含解决问题的通性通法;三具有典型性,具备一定的评价、测量功能.

鉴于时间匆促,不妥之处在所难免,请各位读者提出宝贵意见!



目 录

| | |
|----------------------|--------|
| 第一章 三角函数 | (1) |
| 第一节 三角函数的概念 | (1) |
| 一、角的定义(2 题) | (1) |
| 二、平面直角坐标系中角的定义(11 题) | (1) |
| 三、弧度的定义、弧长公式(10 题) | (2) |
| 四、三角函数的定义(18 题) | (3) |
| 五、三角函数线与三角不等式(3 题) | (5) |
| 六、综合题(6 题) | (6) |
| 第二节 同角三角函数与诱导公式 | (8) |
| 一、同角三角函数的关系(15 题) | (8) |
| 二、诱导公式(20 题) | (10) |
| 三、综合题(25 题) | (14) |
| 第三节 三角函数的化简与求值 | (18) |
| 一、和差倍半公式(11 题) | (18) |
| 二、化简或变形(58 题) | (20) |
| 三、已知三角函数值求角(12 题) | (27) |

| | |
|--------------------------|------|
| 四、综合题(39题) | (28) |
| 第四节 三角函数的图象与性质 | (36) |
| 一、三角函数图象的画法(3题) | (36) |
| 二、三角函数的图象性质(7题) | (36) |
| 三、由三角函数的图象求解析式(5题) | (37) |
| 四、三角函数图象的变换(9题) | (39) |
| 五、三角函数式的化简(9题) | (41) |
| 六、三角函数的性质(42题) | (42) |
| 七、综合题(35题) | (49) |
| 第五节 解三角形 | (55) |
| 一、正弦定理(12题) | (56) |
| 二、余弦定理(8题) | (58) |
| 三、解决实际问题(5题) | (59) |
| 四、综合题(42题) | (60) |
| 第六节 三角函数的综合应用 | (68) |
| 一、三角函数综合题(76题) | (68) |
| 二、三角与函数性质(26题) | (80) |
| 三、三角函数与数列(4题) | (84) |
| 四、三角函数与向量(10题) | (85) |
| 五、三角函数与不等式(8题) | (87) |
| 六、三角函数与解析几何(4题) | (89) |

| | |
|------------------|-------|
| 第二章 平面向量 | (90) |
| 第七节 平面向量的概念及运算 | (90) |
| 一、向量的概念(7题) | (90) |
| 二、向量的线性运算(20题) | (92) |
| 三、综合题(13题) | (95) |
| 第八节 平面向量的坐标运算 | (97) |
| 一、向量的坐标表示(9题) | (97) |
| 二、向量的夹角(16题) | (98) |
| 三、向量的模(4题) | (101) |
| 四、综合题(11题) | (101) |
| 第九节 平面向量的数量积 | (103) |
| 一、数量积的定义(22题) | (103) |
| 二、数量积的坐标表示(13题) | (106) |
| 三、综合题(5题) | (108) |
| 第十节 平面向量的综合应用 | (109) |
| 一、向量的线性运算(10题) | (109) |
| 二、向量的数量积(19题) | (110) |
| 三、向量的模(6题) | (114) |
| 四、向量与三角形的四心(16题) | (115) |
| 五、综合题(47题) | (117) |
| 参考答案 | (129) |

第一章 三角函数

第一节 三角函数的概念



一、角的定义(2 题)

从旋转的角度来看,一条射线绕它的端点逆时针旋转得到的角叫做正角,顺时针旋转得到的角叫做负角,若没作旋转得到的角叫做零角.

1. 下列各命题中,真命题的是 ()

- A. 第一象限角是锐角 B. 直角不是任何象限角
C. 第二象限角比第一象限角大 D. 三角形的内角一定是第一或第二象限角

2. 在 7h 到 8h 之间钟表上的时针、分针重合的时刻是 7h _____ min(精确到 1min), 钟表上 7h38min 时, 时针与分针的夹角是 _____ 度(精确到 1 度).



二、平面直角坐标系中角的定义(11 题)

把角放置在平面直角坐标系中,角的顶点与坐标原点重合,角的始边与 x 轴的非负半轴重合,终边落在第几象限,这个角就叫做第几象限的角;当终边落在坐标轴上,这个角就叫做轴限角.

3. 如果角 2α 的终边在 x 轴上方,那么 α 的范围是 ()

- A. 第一象限角的集合 B. 第一象限或第二象限角的集合
C. 第一象限或第三象限角的集合 D. 第一象限或第四象限角的集合

4. 若角 α 和 β 的终边关于 y 轴对称,则 ()

- A. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ B. $\alpha + \beta = (2k + \frac{1}{2})\pi (k \in \mathbf{Z})$

C. $\alpha + \beta = 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$

D. $\alpha + \beta = (2k+1)\pi (k \in \mathbf{Z})$

5. 若 α 与 $x+45^\circ$ 终边相同, β 与 $x-45^\circ$ 终边也相同, 则 α 与 β 的关系是 ()

A. $\alpha + \beta = 0$

B. $\alpha - \beta = 0$

C. $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ (k \in \mathbf{Z})$

D. $\alpha - \beta = 90^\circ + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbf{Z})$

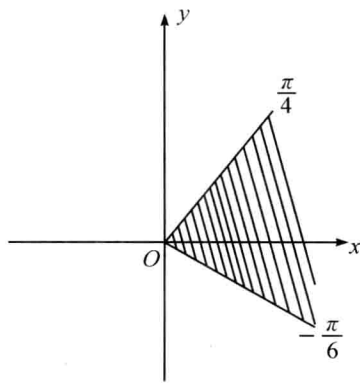
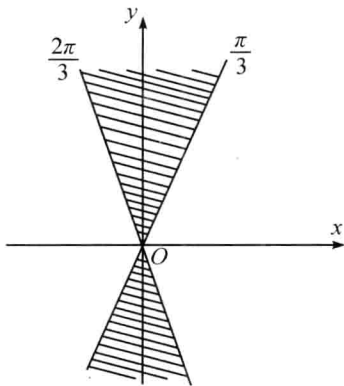
6. 若 α 是第二象限角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第 _____ 象限的角.

7. 与 -3020° 角的终边相同的最小正角是 _____.

8. 把 $1230^\circ, -3290^\circ$ 分别写成 $k \cdot 360^\circ + \alpha (0^\circ \leq \alpha < 360^\circ, k \in \mathbf{Z})$ 的形式 _____.

9. 若 α 是第二象限角, 则 $\frac{\alpha}{3}$ 不是第 _____ 象限的角.

10. 写出终边在下列阴影部分内的角的集合(含边界).



11. 若 α 是第二象限的角, 则 $\pi - \frac{\alpha}{2}$ 是第 _____ 象限的角.

12. 集合 $M = \left\{ x \mid x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z} \right\}$, 与集合 $P = \left\{ x \mid x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z} \right\}$ 之间的关系是 ()

A. $M \subsetneq P$

B. $M \supsetneq P$

C. $M = P$

D. $M \cap P = \emptyset$

13. 与 120° 的角终边相同的角是 ()

A. $-600^\circ + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbf{Z})$

B. $-120^\circ + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbf{Z})$

C. $120^\circ + (2k+1) \cdot 180^\circ (k \in \mathbf{Z})$

D. $660^\circ + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbf{Z})$



三、弧度的定义、弧长公式(10题)

在圆中, 等于半径长的弧所对的圆心角的大小是 1 弧度, 记作 1rad, 也可记作 1.

弧长公式: $l = |\alpha|r$ (其中 l, α, r 分别是扇形的弧长、圆心角的弧度数、半径, 请注意: 圆心角 α 的单位一定是弧度).

扇形面积公式: $S = \frac{1}{2}lr$ (其中 S, l, r 分别表示扇形的面积、弧长、半径).

14. 如果一扇形的圆心角为 72° , 半径等于 20cm, 则此扇形的面积为 ()

- A. $40\pi\text{cm}^2$ B. $80\pi\text{cm}^2$ C. 40cm^2 D. 80cm^2

15. 已知集合 $M = \{\alpha | 2k\pi \leq \alpha \leq (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, 集合 $N = \{\alpha | -6 \leq \alpha \leq 6\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. \emptyset B. $\{\alpha | 0 \leq \alpha \leq \pi \text{ 或 } 6 \leq \alpha \leq 2\pi\}$
C. $\{\alpha | 0 \leq \alpha \leq \pi\}$ D. $\{\alpha | 0 \leq \alpha \leq \pi \text{ 或 } -6 \leq \alpha \leq -\pi\}$

16. 若集合 $A = \left\{x \mid k\pi + \frac{\pi}{3} \leq x < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, $B = \{x \mid 16 - x^2 \geq 0\}$,

则 $A \cap B =$ _____.

17. 2 弧度的圆心角所对的弦长为 2, 则这个圆心角所对的弧长为 _____, 这个圆心角所夹的扇形面积为 _____.

18. 周长为 6 的扇形的面积的最大值为 _____.

19. 一个扇形的面积为 1cm^2 , 周长为 4cm, 则该扇形的圆心角的弧度数是 _____.

20. 高为 8 底面半径为 6 的圆锥侧面展开图(扇形)的圆心角的弧度数是 _____.

21. 已知一扇形的周长为 $C(C > 0)$, 当扇形的中心角为多少弧度时, 它有最大的面积?

22. 如图 1-1, 在扇形 AOB 中, $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$, 弧长为 l , 求此扇形内切圆的面积.

23. 分别以边长为 3 的正方形 $ABCD$ 的顶点 B, C 为圆心, 3 为半径作圆弧 $\widehat{AC}, \widehat{BD}$ 交于点 E , 求曲边三角形 ADE 的周长和面积.

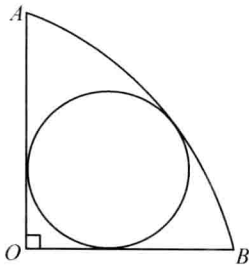


图 1-1



四、三角函数的定义(18 题)

三角函数的定义: 把角 α 放置在平面直角坐标系中, 在该角的终边上任取一点 (但不是顶点) $P(x, y)$, 设 $OP = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 定义角 α 的六种三角函数分别是:

角 α 的正弦: $\sin\alpha = \frac{y}{r}$; 角 α 的余弦: $\cos\alpha = \frac{x}{r}$; 角 α 的正切: $\tan\alpha = \frac{y}{x}$;

角 α 的余切: $\cot\alpha = \frac{x}{y}$; 角 α 的正割: $\sec\alpha = \frac{r}{x}$; 角 α 的余割: $\csc\alpha = \frac{r}{y}$.

24. 若三角形的两内角 α, β 满足 $\sin\alpha\cos\beta < 0$, 则此三角形必为 ()

A. 锐角三角形 B. 钝角三角形 C. 直角三角形 D. 等边三角形

25. 设角 α 的终边过点 $(-3a, -4a) (a \neq 0)$, 则 $\sin\alpha - \cos\alpha =$ ()

A. $\frac{1}{5}$ B. $-\frac{1}{5}$ C. $-\frac{1}{5}$ 或 $-\frac{7}{5}$ D. $-\frac{1}{5}$ 或 $\frac{1}{5}$

26. 若 α 是第三象限角, 则下列各式中不成立的是 ()

A. $\sin\alpha + \cos\alpha < 0$ B. $\tan\alpha - \sin\alpha < 0$ C. $\sin\alpha\cos\alpha > 0$ D. $\frac{\tan\alpha}{\sin\alpha} < 0$

27. 下列命题正确的是 ()

A. 若 $\cos\theta \leq 0$, 则 θ 是第二或第三象限角

B. 若 $\alpha > \beta$, 则 $\cos\alpha < \cos\beta$

C. 若 $\sin\alpha = \sin\beta$, 则 α 与 β 是终边相同的角

D. α 是第三象限角的充要条件是 $\sin\alpha\cos\alpha > 0$ 且 $\cos\alpha\tan\alpha < 0$

28. 若 A, B 是锐角 $\triangle ABC$ 的两个内角, 则点 $P(\sin A - \cos B, \sin B - \cos A)$ 在 ()

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

29. 若 $x \in (0, 2\pi)$, 则使 $\sin x > \cos x$ 成立的 x 的取值范围是 ()

A. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ B. $(\frac{\pi}{4}, \pi)$

C. $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ D. $(\frac{\pi}{4}, \pi) \cup (\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$

30. 若 $\cos\theta \cdot \tan\theta < 0$, 则 θ 是第_____象限的角.

31. 若 α 的终边过点 $(3, -4)$, 则 $\sin\alpha + \cos\alpha + \tan\alpha =$ _____.

32. 函数 $y = \frac{\sin x}{|\sin x|} + \frac{|\cos x|}{\cos x} + \frac{\tan x}{|\tan x|}$ 的值域是_____.

33. 若函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1)$, 则 $f(\cos x)$ 的定义域是_____.

34. 若集合 $A = \{x \mid 3\cos 2\pi x = 3^x, x \in \mathbf{R}\}$, 集合 $B = \{y \mid y^2 = 1, y \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

35. 若角 A 的终边落在直线 $y = 3x$ 上, 且 $\sin A > 0$, 点 $P(m, n)$ 是角 A 终边上一点, P 到原点 O 的距离为 $\sqrt{10}$, 则 $m - n =$ _____.

36. 若集合 $A = \left\{ x \mid k\pi + \frac{\pi}{3} \leq x < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$, 集合 $B = \{x \mid 16 - x^2 \geq 0\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

37. 已知 α 的终边在直线 $y = \sqrt{3}x$ 上, 求 $\sin\alpha$ 和 $\tan\alpha$.

38. 判断下列三角函数式的符号:

(1) $\frac{\sin 330^\circ \cdot \tan 53^\circ}{\cos 235^\circ \cdot \tan 145^\circ}$; (2) $\sin 3 \cdot \cos 4 \cdot \tan 5$.

39. 求下列三角函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{\sin x}$; (2) $y = \sin x + \sqrt{-\tan x}$; (3) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{-\tan x}$.

40. 已知角 θ 的终边经过点 $P(-\sqrt{3}, m)$ ($m > 0$) 且 $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}m$, 求 $\cos\theta$ 和 $\tan\theta$ 的值.

41. 若 θ 为第四象限角, 试判断 $\sin(\cos\theta) \cdot \cos(\sin\theta)$ 的符号.



五、三角函数线与三角不等式(3题)

三角函数线的定义: 在平面直角坐标系中, 设角 α 的终边、 x 轴的非负半轴分别与单位圆交于点 P 和 A , 作 $PM \perp x$ 轴于 M , $AT \perp x$ 轴交角 α 的终边所在直线于 T , 则有向线段 \overline{MP} , \overline{OM} , \overline{AT} 分别叫做角 α 的正弦线、余弦线、正切线(当

有向线段的方向与坐标轴的正向相同时,有向线段表示正数;当有向线段的方向与坐标轴的正向相反时,有向线段表示负数).

42. 已知单位圆 O 与 y 轴的正向、负向分别交于点 A 和 B , 角 θ 的顶点为坐标原点, 始边在 x 轴的正半轴上, 终边在射线 OC 上. 过点 A 作直线 AC 垂直于 y 轴且与角 θ 的终边交于点 C , 则有向线段 AC 表示的函数值是 ()

- A. $\sin\theta$ B. $\cos\theta$ C. $\tan\theta$ D. $\cot\theta$

43. 利用三角函数线解下列不等式:

(1) $\sin x < \frac{1}{2}$; (2) $|\cos x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; (3) $-\frac{1}{2} \leq \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

(4) $\begin{cases} \sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$; (5) $-1 \leq \tan x \leq \sqrt{3}$; (6) $\begin{cases} \sin x > -\frac{1}{2} \\ \tan x < \sqrt{3} \end{cases}$.

44. 已知 $0 < x \leq 1$, $a = \frac{\sin^2 x}{x^2}$, $b = \frac{\sin x}{x}$, 请比较 a, b 的大小.



六、综合题(6题)

45. 已知 $(\frac{1}{2})^{\sin 2\theta} < 1$, 则 θ 为第几象限角?

46. 若 α, β 是关于 x 的二次方程 $x^2 + 2(\cos\theta + 1)x + \cos^2\theta = 0$ 的两个实数根, 且 $|\alpha - \beta| \leq 2\sqrt{2}$, 求 θ 的取值范围.

47. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数, 请比较 $f(\sin 52^\circ)$, $f(\cos 128^\circ)$, $f(\tan 128^\circ)$ 的大小.



48. 已知 $n \in \mathbf{N}^+$, $x \in \mathbf{R}$, 求满足条件 $(\cos x)^n - (\sin x)^n = 1$ 的 x 值.

49. 已知角 β 的终边经过点 $M(-2, m)$, 且 $\sin \beta = \frac{m}{3} < 0$, 求 $\cos \beta, \tan \beta$ 的值.

50. (1) 证明: 当 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 时, $0 < \sin \alpha < \alpha < \tan \alpha$;

(2) 已知锐角 A, B 互余, $m = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin A}$, $n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos B}$, $p = \left(\frac{1}{2}\right)^{\tan A}$, 请比较 m, n, p 的大小.

第二节 同角三角函数与诱导公式



一、同角三角函数的关系(15题)

同角三角函数的关系有三类:

(1) 倒数关系: $\sin\alpha \cdot \csc\alpha = 1, \cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1, \tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1;$

(2) 商的关系: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$

(3) 平方关系: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha, \cot^2\alpha + 1 = \csc^2\alpha.$

注意, 这些恒等式都是在左、右两边都有意义时才成立.

1. 已知 $\sin\alpha = -\frac{24}{25}$, α 是第四象限角, 则 $\tan\alpha$ 的值是 ()

A. $\pm \frac{24}{7}$ B. $\pm \frac{7}{24}$ C. $-\frac{24}{7}$ D. $-\frac{7}{24}$

2. 若 $f(\cos x) = \cos 2x$, 则 $f(\sin 75^\circ) =$ ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

3. 已知 $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}, x \in [0, \pi]$, 则 $\tan x =$ ()

A. $-\frac{3}{4}$ B. $-\frac{4}{3}$ C. $\pm \frac{4}{3}$ D. $-\frac{3}{4}$ 或 $-\frac{4}{3}$

4. 已知 $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = 2$, 则 $\sin\theta\cos\theta =$ ()

A. $\frac{3}{4}$ B. $\pm \frac{3}{10}$ C. $\frac{3}{10}$ D. $-\frac{3}{10}$

5. 若 $-\frac{\pi}{2} < x < 0, \sin x + \cos x = \frac{1}{5}$, 则 $\sin x - \cos x =$ ()

A. $\frac{7}{5}$ B. $-\frac{7}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $-\frac{4}{5}$

6. 若 $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, 则 $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha =$ ()

A. $-\frac{1}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{3}{5}$



7. 若 $\sin\theta = \frac{m-3}{m+5}$, $\cos\theta = \frac{4-2m}{m+5}$, 其中 θ 为第二象限的角, 则 m 的取值范围是 ()

A. $m=8$ B. $3 < m < 9$ C. $m=0$ 或 $m=8$ D. $-5 < m < 9$

8. 若 $\sin\alpha = a$, $\cos\alpha = 1-a$, 则 $a =$ _____.

9. 已知 α 是第二象限角, 则 $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} + \frac{2\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\cos\alpha} =$ _____.

10. 化简 $\frac{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}$ 的结果为 _____.

11. 若 $A \in (0, \pi)$, 且 $\sin A + \cos A = \frac{7}{13}$, 求 $\frac{5\sin A + 4\cos A}{15\sin A - 7\cos A}$ 的值.

12. 已知 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{5}$, 求 $\sin^3\theta + \cos^3\theta$ 的值.

13. 已知 $\sin\theta + \sin^2\theta = 1$, 求 $3\cos^2\theta + \cos^4\theta - 2\sin\theta + 1$ 的值.

14. 已知 $\tan\alpha = 2$, 求下列各式的值:

(1) $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$; (2) $3\sin^2\alpha - \cos\alpha\sin\alpha + 1$.

15. 已知 $\sin^2\theta \left(1 + \frac{1}{\tan\theta}\right) + \cos^2\theta(1 + \tan^2\theta) = 2$, 求 $\tan\theta$ 的值.



二、诱导公式(20题)

诱导公式一:终边相同的角的三角函数值相等,即

$$\begin{aligned}\sin(2k\pi+\alpha) &= \sin\alpha, \cos(2k\pi+\alpha) = \cos\alpha, \tan(2k\pi+\alpha) = \tan\alpha, \\ \cot(2k\pi+\alpha) &= \cot\alpha, \sec(2k\pi+\alpha) = \sec\alpha, \csc(2k\pi+\alpha) = \csc\alpha.\end{aligned}$$

其中 $k \in \mathbf{Z}$.

由诱导公式一可以把任意角的三角函数转化成 $[0, 2\pi)$ 上的角的三角函数. 而 $[0, 2\pi)$ 上的象限角, 即 $(0, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, $(\pi, \frac{3\pi}{2})$, $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ 上的角的三角函数均可化成锐角三角函数: 前者已经是锐角, 后三者中的角可分别表示为 $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$, $2\pi - \alpha$ (其中 α 是锐角), 所以分别需要学习关于 $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$, $2\pi - \alpha$ 的诱导公式.

诱导公式二:

$$\begin{aligned}\sin(\pi - \alpha) &= \sin\alpha, \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha, \tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha, \\ \cot(\pi - \alpha) &= -\cot\alpha, \sec(\pi - \alpha) = -\sec\alpha, \csc(\pi - \alpha) = \csc\alpha.\end{aligned}$$

诱导公式三:

$$\begin{aligned}\sin(\pi + \alpha) &= -\sin\alpha, \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha, \tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha, \\ \cot(\pi + \alpha) &= \cot\alpha, \sec(\pi + \alpha) = -\sec\alpha, \csc(\pi + \alpha) = -\csc\alpha.\end{aligned}$$

诱导公式四:

$$\begin{aligned}\sin(2\pi - \alpha) &= -\sin\alpha, \cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha, \tan(2\pi - \alpha) = -\tan\alpha, \\ \cot(2\pi - \alpha) &= -\cot\alpha, \sec(2\pi - \alpha) = \sec\alpha, \csc(2\pi - \alpha) = -\csc\alpha.\end{aligned}$$

我们还要学习下面的五组诱导公式:

诱导公式五:

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin\alpha, \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \tan(-\alpha) = -\tan\alpha, \\ \cot(-\alpha) &= -\cot\alpha, \sec(-\alpha) = \sec\alpha, \csc(-\alpha) = -\csc\alpha.\end{aligned}$$

诱导公式六:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos\alpha, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha, \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \tan\alpha, \sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \csc\alpha, \csc\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sec\alpha.\end{aligned}$$

诱导公式七:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \cos\alpha, \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha, \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha, \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\tan\alpha, \sec\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\csc\alpha, \csc\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sec\alpha.\end{aligned}$$