桑彦彬 ◎ 著

非线性算子方程与时间尺度上动力学方程中的拓扑和半序方法

俊雅集

Vernal Academic Elite Series

中国出版集团

世界图书出版公司

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

非线性算子方程与时间尺度上动力学方程中的拓扑和半序方法

桑彦彬◇著

世界图书出版公司
广州·上海·西安·北京

图书在版编目（CIP）数据

非线性算子方程与时间尺度上动力学方程中的拓扑和半序方法 / 桑彦彬著. -- 广州 : 世界图书出版广东有限公司, 2014.5

ISBN 978-7-5100-7757-9

Ⅰ. ①非… Ⅱ. ①桑… Ⅲ. ①非线性—算子方程—研究 Ⅳ. ① O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 098320 号

非线性算子方程与时间尺度上动力学方程中的拓扑和半序方法

责任编辑： 廖才高　王梦洁

封面设计： 谷风工作室

出版发行： 世界图书出版广东有限公司

地　　址： 广州市新港西路大江冲 25 号

电　　话： 020-84459702

印　　刷： 虎彩印艺股份有限公司

规　　格： 787mm × 1092mm 1/16

印　　张： 10.5

字　　数： 100 千字

版　　次： 2014 年 6 月第 1 版　2014 年 10 月第 2 次印刷

ISBN 978-7-5100-7757-9/O · 0043

定　　价： 32.00 元

前言

非线性算子理论是非线性泛函分析的重要组成部分之一, 这一理论不仅为非线性微分方程和积分方程的研究提供了有力的工具, 而且将其纳入到统一的框架之中. 从而在数学及应用科学诸如物理、工程、生物化学等领域都有着广泛的应用.

非线性算子方程的解的个数和类型问题一直为人们所关注, 本书首先研究了一类带次线性扰动的混合单调算子与一类较广泛的凹算子的不动点定理, 然后证明了两类非线性算子的多重不动点的存在性. 其次, 讨论了渐近线性算子方程的变号解与多重解. 最后, 集中展示了半序方法和拓扑度理论在时间尺度上二阶及高阶动力学方程中的应用.

第一章介绍了本书将用到的预备知识. 第一节, 给出了半序和锥的基本概念, 第二节介绍了有关时间尺度计算的基本结果, 第三节主要介绍了拓扑度和不动点指数的一些定义和相关引理.

在第二章中, 我们采用半序方法和单调迭代技巧研究以下算子方程的解的存在唯一性:

$$A(x,x)+Bx=x, \qquad x\in E,$$

其中 A 是混合单调算子, B 为次线性算子, 并且 E 是实的半序 Banach 空间. 应该指出, 我们不要求算子 A 具有耦合上下解条件与紧性以及连续性条件. 作为应用, 讨论了一类积分方程的正解的存在唯一性, 进而考察了一类时间尺度上的二阶边值问题, 不仅获得了其正解的存在唯一性, 而且也建立了逼近解的迭代格式.

在第三章中, 首先借助于不动点指数理论, 研究了在以下平行上下解条件

$$x_1<y_1,\ \ x_2<y_2,\ \ x_1\not\leq y_2,\ \ x_2\not\leq y_1,$$

$$x_1<Ax_1,\ \ Ay_1<y_1,\ \ x_2<Ax_2,\ \ Ay_2<y_2$$

下的非线性算子 A 的多重不动点. 进而将所获得的抽象结果应用于超线性 Hammerstein 型积分方程, 建立了其六个解的存在性结果.

其次, 将 τ-φ- 凹算子和 τ-φ- 凸算子结合起来, 考察了一类非线性算子的两个正不动点的存在性. 我们的工具基于正规锥的性质和序形式的锥拉伸与锥压缩不动点定理. 作为推论, 我们也获得了 φ_1- 凹算子与 φ_2- 凸算子之和的不动点定理. 最后, 将所得到的不动点定理应用于一类二阶微分方程的多点边值问题.

在第四章中, 首先, 在假定渐近线性算子 A 存在如下两对上下解

(i) 存在 $u_1 \in (-P)\backslash\{\theta\}$ 和 $v_1 \in P\backslash\{\theta\}$ 使得 $u_1 \leq Au_1$ 和 $Av_1 \leq v_1$;

(ii) 存在 $u_2 \in (-P)\backslash\{\theta\}$, $v_2 \in P\backslash\{\theta\}$, 与 $\delta > 0$ 使得 $u_1 < u_2 < \theta < v_2 < v_1$, $Au_2 \leq u_2 - \delta e$, $v_2 + \delta e \leq Av_2$

的前提下, 研究其多重不动点和变号不动点的存在性. 获得了两个正不动点与两个负不动点以及一个变号不动点的存在性结果. 进而, 若算子 A 为复合算子, 即算子 A 可以表示成 $A = KF$ 的形式, 这里 $F: E \longrightarrow E$ 为连续且有界的增算子, $K: E \longrightarrow E$ 为正线性全连续算子. 若 F 在 θ 点处 Fréchet 可微, 根据 A'_θ 的性质, 上述条件 (ii) 可通过以下条件来实现:

$(ii)'$ $F(\theta) = \theta$, 并且 KF'_θ 有一个特征值 $\lambda_0 < 1$, 对应的特征函数 ψ 满足 $\mu_1 e \leq \psi \leq \mu_2 e$, 其中 $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$.

对于一些具体问题, 条件 $(ii)'$ 是易于检验的.

其次, 借助于一个已知的拓扑度为 1 的结论, 利用可微映射与渐近线性算子的指数计算定理, 获得了非线性算子方程至少存在两个正解与两个负解以及两个变号解的抽象结果. 然后, 研究了格结构下单边渐近线性算子的变号解和多重解. 最后, 将所获得的结论应用于非线性 Hammerstein 型积分方程与一类偏微分方程的边值问题. 本章的工作不仅对相关的具体微分方程的条件进行了抽象, 获得了一般性的结果. 而且也对其进行了一定的改进, 使其具有了较广泛的意义.

本书前四章, 系作者博士论文的主要内容. 后四章的大部分结果已散见于作者近年来发表于国内外期刊的论文. 半序方法与拓扑度理论已在偏微分方程方面得到了广泛的应用, 限于作者的认识水平, 目前尚无法对这一领域展开研究. 但这是作者进一步努力的方向.

本书的出版得到了国家自然科学基金天元基金 (11226119) 与山西省教育厅高等学校科技创新项目的资助.

桑彦彬

山西太原中北大学

2014.1

目　录

第一章　预备知识

本章的目的是介绍与本书有直接关联的预备知识, 包括一些算子的基本概念与定义, 以及与之相应的一些定理. 第一节, 介绍了半序和锥的基本概念, 包括了向量格的概念及性质. 第二节, 主要讨论有关时间尺度的定义和一些计算公式. 第三节, 引入了拓扑度理论和不动点指数理论的一些概念与性质, 包括了正线性算子的 Krein-Rutman 理论.

§1.1　半序和锥

本节的内容选自文献 [1-4].

定义 1.1.1([1]) 设 X 是一个集合. 如果对 X 的某些元素对 x, y 之间, 可以定义一种二元关系, 记为 $x \le y$, 具有下列性质:

(i) 对任给 $x \in X$, 都有 $x \le x$;

(ii) 若 $x \le y$, $y \le x$, 则 $x = y$;

(iii) 若 $x \le y$, $y \le z$, 则 $x \le z$.

则称 $\le$ 是一种半序关系, X 在该半序下是一个半序集.

定义 1.1.2([1-3]) 设 E 是实 Banach 空间, P 是 E 中的非空凸闭集, 若 P 满足

(i) $x \in P$, $\lambda \ge 0 \Longrightarrow \lambda x \in P$;

(ii) $x \in P$, $-x \in P \Longrightarrow x = \theta$.

则称 P 是 E 中的一个锥.

给定 Banach 空间 E 中的一个锥 P 后, 可以在 E 中引入半序关系如下: $x \le y$, 如果 $y - x \in P$. 易知 E 在该半序下成为一个半序集, 称 E 是半序 Banach 空间.

定义 1.1.3([1-3]) 设 P 是 Banach 空间 E 中的一个锥. 若 P 含有内点, 即 P 的内部 $P^\circ \ne \emptyset$, 则称 P 为一个体锥.

若 $x \le y$ 并且 $x \ne y$, 则记 $x < y$; 若 P 是一个体锥, 并且 $y - x \in P^\circ$, 则记 $x \ll y$.

定义 1.1.4([1-3]) 设 P 是 E 中一个锥. 若存在常数 $N > 0$ 使得 $\theta \le x \le$

$y \Longrightarrow \|x\| \le N\|y\|$, 则称 P 是正规的. 正数 N 中的最小者叫做 P 的正规常数.

定义 1.1.5([1, 4]) 设 X 是一个半序集, $D \subset X$. 若存在 $z \in X$, 满足

(i) 对任给 $x \in D$, 都有 $x \le z$;

(ii) 若 $y \in X$ 满足 $x \le y, \forall\, x \in D$, 就有 $z \le y$.

则称 z 是 D 的上确界, 记为 $z = \sup D$. 类似地, 可定义下确界 $\inf D$.

定义 1.1.6([1, 4]) 设 X 是一个半序集, 若对任给 $x, y \in X$, 都存在 $\sup\{x, y\}$ 和 $\inf\{x, y\}$, 则称 X 是一个格. 若对任给按序有上界和下界的集合 $D \subset X$, 都存在 $\sup D$ 和 $\inf D$, 则称 X 是一个完备格.

如果 X 是一个格. 对任给 $x, y \in X$, 定义 $x \vee y$ 和 $x \wedge y$ 为

$$x \vee y = \sup\{x, y\}, \quad x \wedge y = \inf\{x, y\}.$$

定义 1.1.7([1, 4]) 设 E 是线性空间, 又是半序集. 如果半序结构与线性结构相容, 即对任给 α, $\beta \in \mathbb{R}^1$, $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$, x_1, x_2, y_1, $y_2 \in E$, $x_1 \le x_2$, $y_1 \le y_2$ 都有 $\alpha x_1 + \beta y_1 \le \alpha x_2 + \beta y_2$, 则称 E 为一个半序线性空间. 若 E 是一个半序线性空间, 并且在半序结构下是一个格, 则称 E 是一个向量格.

定义 1.1.8([1, 4]) 设 E 是一个向量格. 对 $x \in E$, 令

$$x^+ = x \vee \theta, \quad x^- = (-x) \vee \theta, \quad |x| = x \vee (-x).$$

则称 x^+ 是 x 的正部, x^- 是 x 的负部, $|x|$ 是 x 的模.

为了下文叙述的方便, 使用下列符号:

$$x_+ = x^+, \qquad x_- = -x^-.$$

于是

$$x = x_+ + x_-, \qquad |x| = x_+ - x_-.$$

引理 1.1.1([1, 4]) 设 E 为一个向量格, x, $y \in E$, 则

(i) $x^+ \ge \theta,\ x^- \ge \theta,\ x^+ = (-x)^-,\ x^- = (-x)^+,\ |x| = |-x|$;

(ii) $x = x^+ - x^-, \quad x^+ \wedge x^- = \theta$;

(iii) $|x| = x^+ + x^- \ge \theta$;

(iv) $\theta \le x^+ \le |x|, \quad \theta \le x^- \le |x|$;

(v) $-x^- \le x \le x^+$.

定义 1.1.9([1, 3]) 设 P 是 Banach 空间 E 中的一个锥. 如果 $E = P - P$, 即 E 中任何元素 x 均可表示为 $x = y - z$ 的形式, 其中 $y, z \in P$, 则称 P 为生成锥; 如果 $E = \overline{P - P}$, 则称 P 是完全锥.

§1.2 时间尺度的计算

有关时间尺度的概念与基本计算, 可参见 [5-7].

定义 1.2.1([5, 7]) 我们称实数集 $\mathbb{R}$ 的任意一个非空闭子集为时间尺度, 记为 $\mathbb{T}$. 对于 $t \in \mathbb{T}$, 分别定义向前跳跃算子 $\sigma : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ 和向后跳跃算子 $\rho : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ 如下:

$$\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\},$$

$$\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}.$$

在此定义中, 令 $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$(即若 $\mathbb{T}$ 有一个最大值 t, 则 $\sigma(t) = t$), $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$(即若 $\mathbb{T}$ 有一个最小值 t, 则 $\rho(t) = t$), 这里 $\emptyset$ 表示空集. 若 $\sigma(t) > t$, 则称 t 为右稀疏; 若 $\rho(t) < t$, 则称 t 为左稀疏; 若 $t < \sup \mathbb{T}$ 且 $\sigma(t) = t$, 则称 t 为右稠密; 若 $t > \inf \mathbb{T}$ 且 $\rho(t) = t$, 则称 t 为左稠密. 若 $\mathbb{T}$ 有一个右稀疏的最小值 m, 定义 $\mathbb{T}_k = \mathbb{T} - \{m\}$, 否则令 $\mathbb{T}_k = \mathbb{T}$. 若 $\mathbb{T}$ 有一个左稀疏的最大值 M, 定义 $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{M\}$, 否则令 $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$.

定义 1.2.2([5, 6]) 对于 $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ 与 $t \in \mathbb{T}^k$, 若有 $f^{\Delta}(t) \in \mathbb{R}$, 对任给 $\epsilon > 0$, 存在 t 的一个邻域 U, 使得对所有的 $s \in U$, 都有

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)| \leq \epsilon|\sigma(t) - s|.$$

则称 f 在 t 点是 Δ- 可导的, 并称 $f^{\Delta}(t)$ 为 f 在 t 点的 Δ- 导数.

定义 1.2.3([7]) 对于 $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ 与 $t \in \mathbb{T}_k$, 若有 $f^{\nabla}(t) \in \mathbb{R}$, 对任给 $\epsilon > 0$, 存在 t 的一个邻域 U, 使得对所有的 $s \in U$, 都有

$$|f(\rho(t)) - f(s) - f^{\nabla}(t)(\rho(t) - s)| \leq \epsilon|\rho(t) - s|.$$

则称 f 在 t 点是 ∇- 可导的, 并称 $f^{\nabla}(t)$ 为 f 在 t 点的 ∇- 导数.

定义 1.2.4([5, 6]) 若对于所有 $t \in \mathbb{T}^k$, 有 $F^{\Delta}(t) = f(t)$. 定义 f 的 Δ- 积分如下:

$$\int_a^t f(s)\Delta s = F(t) - F(a), \quad t \in \mathbb{T}.$$

定义 1.2.5([7]) 若对于所有 $t \in \mathbb{T}_k$, 有 $\Phi^{\nabla}(t) = f(t)$. 定义 f 的 ∇- 积分如下:

$$\int_a^t f(s)\nabla s = \Phi(t) - \Phi(a), \quad t \in \mathbb{T}.$$

引理 1.2.1([7]) 令 $a, b \in \mathbb{T}$ 满足 $a \leq b$. 令 $f(t)$ 是一个定义在 $[a, b]$ 上的连续函数. 则

(i) $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^{\rho(b)} f(t)\Delta t + [b - \rho(b)]f(\rho(b))$;

(ii) $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t = [\sigma(a) - a]f(a) + \int_{\sigma(a)}^b f(t)\Delta t$;

(iii) $\displaystyle\int_a^b f(t)\nabla t = \int_a^{\rho(b)} f(t)\nabla t + [b - \rho(b)]f(b)$;

(iv) $\displaystyle\int_a^b f(t)\nabla t = [\sigma(a) - a]f(\sigma(a)) + \int_{\sigma(a)}^b f(t)\nabla t$.

§1.3 拓扑度及不动点指数理论

定义 1.3.1([1, 2]) 设 E_1 和 E_2 是 Banach 空间, $D \subset E_1$, 算子 $A : D \longrightarrow E_2$. 若 A 将 D 中的任何有界集 S 都映成 E_2 中的相对紧集 (即它的闭包 $\overline{A(S)}$ 是 E_2 中的紧集), 则称 A 是映 D 入 E_2 的紧算子. 若算子是连续的, 又是紧算子, 则称 A 是全连续算子.

定义 1.3.2([1, 2]) 设 E 是一个拓扑空间, $X \subset E$. 若存在连续算子 $P : E \longrightarrow X$, 使得当 $x \in X$ 时恒有 $Px = x$, 则称 X 是 E 的一个收缩核, 算子 P 是一个保核收缩.

定义 1.3.3([1, 2]) 设 E 是 Banach 空间, S 是 E 中的有界集. 令

$$\alpha(S) = \inf\{\delta > 0 | S\text{是有限个直径} \leq \delta\text{的集合之并}\},$$

则称 $\alpha(S)$ 是 S 的 Kuratowski 非紧性测度, 简称非紧性测度.

定义 1.3.4([1, 2]) 设 E 是 Banach 空间, $D \subset E$, $A : D \longrightarrow E$ 是连续算子. 若存在常数 $k \geq 0$, 使得对任何有界集 $S \subset D$, 都有

$$\alpha(A(S)) \leq k\alpha(S),$$

则称 A 是 D 上的 k 集压缩算子; 特别地, $k<1$ 时的 k 集压缩算子称为严格集压缩算子; 若对任何非相对紧的有界集 $S\subset D$, 都有

$$\alpha(A(S))<\alpha(S),$$

则称 A 是 D 上的凝聚算子.

设 E 是 Banach 空间, X 是 E 中的一个收缩核, $U\subset X$ 是 X 中的有界相对开集 (即把 X 看成一个拓扑空间时, U 是 X 中的开集), $\overline{U}$ 和 ∂U 分别是 U 相对于 X 的闭包和边界.

定义 1.3.5([1, 2]) 设 X 是 Banach 空间 E 中的收缩核, $U\subset X$ 是 X 中的有界相对开集, $A:\overline{U}\longrightarrow X$ 全连续, 并且在 ∂U 上没有不动点. 令 $r:E\longrightarrow X$ 是一个保核收缩. 取 R 充分大, 使 $\overline{U}\subset T_R=\{x|x\in E,\ \|x\|<R\}$. 定义 A 在 U 上关于 X 的不动点指数如下:

$$i(A,U,X)=\deg(I-Ar,T_R\cap r^{-1}(U),\theta),\tag{1.3.1}$$

这里右端是 Leray-Schauder 度.

引理 1.3.1([1, 2]) 由 (1.3.1) 定义的收缩核上的不动点指数具有下列基本性质:

(i) 正规性: 若 $A:\overline{U}\longrightarrow U$ 是常算子 (即存在 $x_0\in U$, 使得 $Ax\equiv x_0$), 则 $i(A,U,X)=1$;

(ii) 可加性: 设 $U_1\subset U$ 和 $U_2\subset U$ 都是 X 中的相对开集, $U_1\cap U_2=\emptyset$, 并且 A 在 $\overline{U}\backslash(U_1\cup U_2)$ 上没有不动点, 则 $i(A,U,X)=i(A,U_1,X)+i(A,U_2,X)$;

(iii) 同伦不变性: 设 $H:[0,1]\times\overline{U}\longrightarrow X$ 全连续, 使得当 $(t,x)\in[0,1]\times\partial U$ 时, 恒有 $H(t,x)\neq x$, 则 $i(H(t,\cdot,),U,X)$ 与 $t\in[0,1]$ 无关;

(iv) 保持性: 若 Y 是 X 的收缩核, $A(\overline{U})\subset Y$, 则 $i(A,U,X)=i(A,U\cap Y,Y)$;

(v) 切除性: 若 V 是 X 中的相对开集, $V\subset U$, 且 A 在 $\overline{U}\backslash V$ 上没有不动点, 则 $i(A,U,X)=i(A,V,X)$;

(vi) 可解性: 若 $i(A,U,X)\neq 0$, 则 A 在 U 中至少有一个不动点;

(vii) 边界值性质: 设 $A,\ B:\overline{U}\longrightarrow X$ 全连续, 在 ∂U 上没有不动点, 并且 $Ax=Bx,\ x\in\ \partial U$, 则 $i(A,U,X)=i(B,U,X)$.

定义 1.3.6([1, 2]) 设 E_1 和 E_2 是 Banach 空间, D 是 E_1 中的开集, $A:D\longrightarrow E_2$, $x_0\in D$. 若存在有界线性算子 $B:E_1\longrightarrow E_2$, 使得

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|A(x_0+h)-Ax_0-Bh\|}{\|h\|}=0.$$

则称算子 A 在点 x_0 处是 Fréchet 可微的, B 叫做 A 在点 x_0 处的 Fréchet 导算子, 记为 A'_{x_0}.

引理 1.3.2([1, 2]) 设 $D \subset E_1$ 是开集, $A: D \longrightarrow E_2$ 是全连续算子, 并且在点 $x_0 \in D$ 处 Fréchet 可微, 则 $A'_{x_0}: E_1 \longrightarrow E_2$ 是全连续线性算子.

定义 1.3.7([1, 2]) 设 $A: D \longrightarrow E_2$, D 包含 E_1 中某球的外部 (即存在 $R > 0$, 使得 $\forall\, x \in E_1$, $\|x\| > R$ 都有 $x \in D$). 若存在有界线性算子 $B: E_1 \longrightarrow E_2$, 使得

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{\|Ax - Bx\|}{\|x\|} = 0,$$

则称算子 A 在无穷远 ∞ 处 Fréchet 可微, B 叫做 A 在 ∞ 处的 Fréchet 导算子, 记为 A'_∞, 即 $A'_\infty = B$. 当 A'_∞ 存在时, 称 A 为渐近线性算子.

引理 1.3.3([1, 2]) 若 $A: D \longrightarrow E_2$ 是全连续的渐近线性算子, 则 $A'_\infty: E_1 \longrightarrow E_2$ 是全连续线性算子.

定义 1.3.8([1]) 设 Ω 是 Banach 空间 E 中的开集, $A: \overline{\Omega} \longrightarrow E$ 全连续, $f = I - A$, $x_0 \in \Omega$ 是 f 在 Ω 中的孤立零点, 即存在 $r > 0$, 使得 $T_r = \{x \mid \|x - x_0\| < r\} \subset \Omega$, 并且 x_0 是 f 在 $\overline{T}_r$ 中唯一的零点 (即 A 唯一不动点). 定义

$$\operatorname{ind}(I - A, x_0) = \deg(I - A, T_r, \theta)$$

并称 $\operatorname{ind}(I - A, x_0)$ 为 $I - A$ 在零点 x_0 处的指数.

定义 1.3.9([1]) 设 $A: E \longrightarrow E$ 全连续, 并存在 $R > 0$, 使得对任给 $x \in E$, $\|x\| \geq R$, 都有 $Ax \neq x$. 定义

$$\operatorname{ind}(I - A, \infty) = \deg(I - A, T_R, \theta),$$

并称 $\operatorname{ind}(I - A, \infty)$ 为 $I - A$ 在 ∞ 处的指数.

设 E 为 Banach 空间, P 为 E 中的正锥, $A: E \longrightarrow E$. 若 $x \in P$ 满足算子方程

$$x = Ax, \tag{1.3.2}$$

则称 x 为算子方程 (1.3.2) 的正解; 若 $x \in -P$ 满足 (1.3.2), 则称 x 为 (1.3.2) 的负解; 若 $x \in E \backslash (P \cup (-P))$ 满足 (1.3.2), 则称 x 为 (1.3.2) 的变号解.

若 $x_0 \in E \backslash \{\theta\}$ 满足 $\lambda A x_0 = x_0$, 其中 λ 是某实数, 则称 λ 是 A 的特征值, x_0 是 A 的属于特征值 λ 的特征函数.

设 E 是 Banach 空间, P 是 E 中的一个锥, $B: E \longrightarrow E$ 是正线性算子, 即 $B(P) \subset P$.

引理 1.3.4([1, 8]) 设 P 是 Banach 空间 E 中的生成锥, B 是 E 上正的全连续线性算子, 并且谱半径 $r(B) > 0$, 则 B 必定存在正特征元属于 $P \backslash \{\theta\}$, 对应的特征值是 $r^{-1}(B)$, 这里 $r^{-1}(B) = (r(B))^{-1}$.

定义 1.3.10([9]) 令 $A: D \longrightarrow E$ 是一个算子, $e \in P \backslash \{\theta\}$, 且 $x_0 \in D$. 若对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, 使得对所有的 $x \in D$ 及 $\|x - x_0\| < \delta$, 都有

$$-\epsilon e \leq Ax - Ax_0 \leq \epsilon e.$$

则称 A 在 x_0 处 e- 连续. 若 A 在 D 上的每一点都 e- 连续, 则称 A 在 D 上 e- 连续.

第二章　一类带扰动的混合单调算子的不动点定理及其应用

§2.1　引言

1987 年, 郭大钧先生和 Lakshmikantham 教授在文 [10] 中首次提出了混合单调算子的概念, 该概念不仅可直接应用于数学领域, 统一增算子和减算子的结论, 而且可应用于工程、生物化学、核工业等学科抽象出来的非线性方程 [3, 10-19].

近年来, 带有扰动的非线性算子的不动点理论获得了一些进展. 文 [13] 证明了算子 $A=B+C$ 的正不动点的存在唯一性与迭代收敛性, 其中 B 是一个正线性算子, 且谱半径 $r(B)<1$, C 是一个 φ- 凹增算子. 文 [14] 获得了算子 $C=A+B$ 的正不动点的存在性和唯一性, 其中 A 是减算子, B 是一个次线性算子. 进一步, 文 [15] 借助于半序方法、锥理论以及迭代技巧, 研究了序 Banach 空间 E 中的算子方程 $A(x,x)+Bx=x$ 的解的存在唯一性, 其中 A 是带凹凸型的混合单调算子, 且 B 是一个仿射算子. 其主要结果为:

定理 2.1.1([15])　设 P 是 E 中的正规锥, N 为 P 的正规常数, $u, v\in P\cap\mathcal{D}(B)$, $u<v$, 算子 $A:[u,v]\times[u,v]\longrightarrow E$ 是混合单调算子, 且 $B:\mathcal{D}(B)\longrightarrow E$ 为 $[u,v]$ 上的仿射算子, 即

$$B(tx+(1-t)y)=tBx+(1-t)By,\quad x,\ y\in[u,v],\quad t\in[0,1].$$

我们还假设

(i) 对固定的 y, 算子 $A(\cdot,y):[u,v]\longrightarrow E$ 是凹的; 而对固定的 x, $A(x,\cdot):[u,v]\longrightarrow E$ 是凸算子;

(ii) $(I-B)^{-1}:E\longrightarrow\mathcal{D}(B)$ 存在且在 $[u-Bu, v-Bv]$ 上为增算子;

(iii) $A(u,v)\geq u$, $A(v,u)\leq v$, $Bu\geq\theta$, $Bv\leq\theta$;

(iv) 存在 $m_0\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 使得

$$u_{m_0+1}\geq\frac{1}{2}(v_{m_0+1}+u_{m_0}),$$

这里

$$u_0=u,\qquad v_0=v,$$

$$u_n=(I-B)^{-1}A(u_{n-1},v_{n-1}),\qquad v_n=(I-B)^{-1}A(v_{n-1},u_{n-1}),\ n=1,2,\cdots,$$