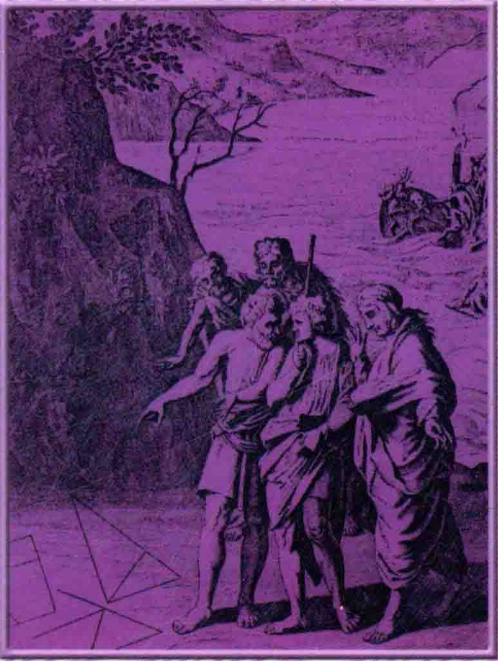
《数学中的小问题大定理》丛书（第二辑）

李天岩—约克定理

——从一道波兰数学竞赛试题谈起



佩捷 编著

◎线段自映射回归点的回归方式
◎自然界中的混沌性和有序性
◎混沌动力系统引论
◎标度行为的数值研究
◎临界准周期轨道的分形结构

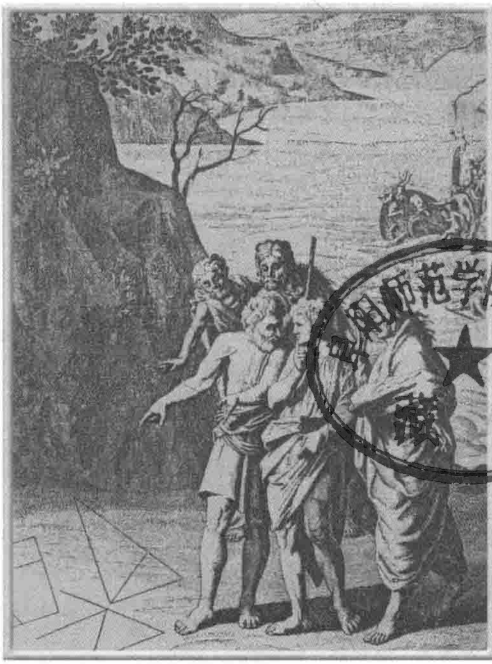
HITP
哈爾濱
HARBIN INSTITUTE

《数学中的小问题大定理》丛书（第二辑）

李天岩—约克定理

——从一道波兰数学竞赛试题谈起

佩捷 编著



◎线段自映射回归点的回归方式

◎自然界中的混沌性和有序性

◎混沌动力系统引论

◎标度行为的数值研究

◎临界准周期轨道的分形结构

HITP
哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书从一道波兰数学竞赛试题谈起，详细介绍了李天岩一约克定理的相关知识及应用．全书共有2章内容，读者可以较全面地了解这个定理的实质，定理的研究过程以及由这个定理得到的一些结论．并且还可以了解到它在其他学科中的一些应用．

本书适合中学生、中学教师以及数学爱好者阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

李天岩一约克定理：从一道波兰数学竞赛试题谈起/佩捷编著．一哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2014.6
ISBN 978-7-5603-4666-3

Ⅰ.①李…　Ⅱ.①佩…　Ⅲ.①函数　Ⅳ.①O174

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第075693号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　宋晓翠　刘春雷
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张9.25　字数96千字
版　　次　2014年6月第1版　2014年6月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-4666-3
定　　价　28.00元

目录

李天岩—约克定理

第1章

1.1 从方程 $x = f^n(x)$ 的实根到自映射 f 的不动点与周期点[①]

设 $f(x)$ 是实变数 x 的一个实值的单值连续函数，n 是一个正整数，并且用 $f^n(x)$ 表示 f 的 n 次复合函数 $f(\cdots(f(f(x))))$.

为了简便，用 $\mathrm{Fix}(f^n)$ 来表示函数 $f^n(x)$ 的不动点的集合 $\{x \mid x = f^n(x)\}$，也即方程 $x = f^n(x)$ 的实根的集合. 读者不难证明下述定理.

定理 1 若 $a \in \mathrm{Fix}(f)$，则 $a \in \mathrm{Fix}(f^n)$，$n > 1$. 更一般地，若 $a \in \mathrm{Fix}(f^k)$，并且正整数 h 能整除 n（从而 $0 < k < n$），则 $a \in \mathrm{Fix}(f^n)$.

① 引自《数学通报》江泽涵的文章.

引理 设 $a_{n,1}\in \mathrm{Fix}(f^n)$，$n>1$，命 $a_{n,k+1}=f^k(a_{n,1})$，$k=1,2,\cdots,n-1$. 则(1)$a_{n,k+1}\in \mathrm{Fix}(f^n)$；(2)$f(a_{n,k})=a_{n,k+1}$，$f(a_{n,n})=a_{n,1}$.（我们把(2)中的这 n 个式子说成是在 f 的作用下，$a_{n,1}$ 与 $a_{n,k+1}$ 这 n 个数（不必不同）顺序地轮换.）

证明 明显地，等式

$$f^n(a_{n,k+1})=f^n(f^k(a_{n,1}))=f^k(f^n(a_{n,1}))=f^k(a_{n,1})=a_{n,k+1}$$

给出(1). $a_{n,k+1}$ 的定义与关于 $a_{n,1}$ 的假设给出(2).

定理 2 设 $a_{n,1}\in \mathrm{Fix}(f^n)$，$n>1$，并设 $a_{n,1}\notin \mathrm{Fix}(f^k)$，$k=1,2,\cdots,n-1$. 则(1)$a_{n,1}$ 与 $a_{n,k+1}$（$a_{n,k+1}=f^k(a_{n,1})$）$\in \mathrm{Fix}(f^n)$，见引理）是 f^n 的n个不同的不动点，即方程 $x=f^n(x)$ 的 n 个不同的根；(2)$a_{n,h+1}\notin \mathrm{Fix}(f^k)$，$h=1,2,\cdots,n-1$.

证明 (1) 假设的第二项就是说：特别地 $a_{n,1}\neq f^k(a_{n,1})=a_{n,k+1}$，$k=1,2,\cdots,n-1$. 还需证明：一般地 $a_{n,k+1}\neq a_{n,h+1}$，当 $k=1,2,\cdots,n-1$，而 $k\neq h$. 这时候，不妨设 $k>h$，因而有 $0<k-h<n-1$，$n-(k-h)>1$. 用反证法，设 $a_{n,k+1}=a_{n,h+1}$. 从下列明显的式子

$$a_{n,1}=f^n(a_{n,1})=f^{n-k}(f^k(a_{n,1}))=f^{n-k}(a_{n,k+1})$$

$$f^{n-k}(a_{n,h+1})=f^{n-k}(f^h(a_{n,1}))=f^{n-(k-h)}(a_{n,1})=a_{n,n-(k-h)+1}$$

得出 $a_{n,1}=a_{n,n-(k-h)+1}$. 这与刚才证得的结果矛盾. (1) 证毕.

(2) 用反证法. 设 $a_{r,h+1}\in \mathrm{Fix}(f^k)$，即 $a_{n,h+1}=f^k(a_{n,h+1})$，即 $f^h(a_{n,1})=f^h(f^k(a_{n,1}))$. 由于 f 是单值函数，能在等式两边作 f^{n-k}，得 $a_{n,1}=a_{n,k+1}$ 与(1)矛盾.

本定理证毕.

引理与定理 2 表明：在定理 2 的假设下，若 $\mathrm{Fix}(f^n)$，$n>1$，含有 $a_{n,1}$ 与 $a_{n,k+1}$，$k=1,2,\cdots,n-1$，这 n 个不同的点中的任一个，则也必含有其他 $n-1$ 个. 这一事实引导我们采用下述定义.

定义　如果点 $a\in\mathrm{Fix}(f^n)$，$n>1$，而不属于 $\mathrm{Fix}(f^k)$，$k=1,2,\cdots,n-1$，则 a 叫做 f 的一个 n 阶周期点. a 与 $f^k(a)$ 这 n 个点(两两不同，根据定理 2) 的集合叫做 f 的一个 n 阶轨道.

注意，该定义未考虑 $n=1$. 我们约定不把 $\mathrm{Fix}(f)$ 的点，即 f 的不动点，叫做 1 阶周期点，即不用 1 阶周期点这个名称.

采用这个定义后，定理 2 可改述如下：

推论 1　若 f 有一个 $n(>1)$ 阶周期点 a，则 a 的轨道由 n 个两两不同的点组成，而且轨道中其他 $n-1$ 个点的每一个都是 n 阶周期点. 从而 f 的 n 阶周期点的个数是 f 的 n 阶轨道的个数的 n 倍.

定理 3　设 $1<h<n$，并且 h 不能整除 n，如果 f 有一个 h 阶周期点 b_k，则 $b_k\notin\mathrm{Fix}(f^n)$.

证明　由假设条件，存在 $q\geqslant 1$ 与 $r=1$ 或 $2,\cdots,k-1$，使得 $n=qk+r$. 若 $b_k\in\mathrm{Fix}(f^n)$，那么

$$b_k=f^n(b_k)=f^{qk+r}(b_k)=f^r(b_k)$$

但这与 b_k 是 f 的 k 阶周期点相矛盾.

从前面的三个定理，我们立即有下面的推论.

推论 2　$\mathrm{Fix}(f^n)$，$n>1$，是 f 的下列三种点集的并集：(1) f 的不动点集合；(2) f 的诸 k 阶周期点集，这里的 k 满足 $1<k<n$，并且整除 n；(3) f 的 n 阶周期点集.

从上述的结果,我们能得到一个有趣的推论.

推论3 设 f 是一个周期为 n 的周期函数,即 n 是最小的自然数使 $f^n=$恒同自映射 id. 如果 $1<k<n$,并且 k 不能整除 n,则 f 没有 h 阶周期点.

证明 用反证法. 设 f 有一个 k 阶周期点 b_k,从定理 2 有

$$b_k \in \mathrm{Fix}(f^{kn})=\mathrm{Fix}(id)$$

或从 h 阶周期点的定义与定理 1 也有

$$b_k \in \mathrm{Fix}(f^k) \subset \mathrm{Fix}(f^{kn})=\mathrm{Fix}(id)$$

但另一方面,从定理 3 有

$$b_k \notin \mathrm{Fix}(f^n)=\mathrm{Fix}(id)$$

这一矛盾结果证明了 b_k 不存在.

1.2 几个与之相关的竞赛题

试题 A 设 $I=(0,1)$,对给定的 $a \in (0,1)$,定义函数 $f:\mathbf{I} \to \mathbf{I}$ 如下

$$f(x)=\begin{cases} x+(1-a),\text{当 } 0<x\leqslant a \text{ 时} \\ x-a,\text{当 } a<x\leqslant 1 \text{ 时} \end{cases}$$

证明:对任意区间 $J \subset I$,存在 $n \in \mathbf{N}$,使得交集 $f^{[n]}(J) \cap J$ 非空.

(1977 年波兰提供给 IMO 的预选题)

证明 用反证法. 设存在长为 d 的区间 $J \subset I$,使得对任意 $n \in \mathbf{N}$,都有 $f^{[n]}(J) \cap J=\Phi$,则对 $\forall\, m,n \in \mathbf{N}$,有

$$f^{[m+n]}(J) \cap f^{[m]}(J)=f^{[m]}(f^{[n]}(J) \cap J)= f^{[m]}(\Phi)=\Phi$$

因此，集合 $f(J),f^{[2]}(J),\cdots,f^{[n]}(J),\cdots$ 两两不交.

另一方面，对 $\forall n\in\mathbf{N}$，每个集合 $f^{[n]}(J)$ 是 I 中若干个长度之和为 d 的区间之并，因此，它们不可能都是两两不交的，矛盾，故结论正确.

试题 B 已知函数 $\varphi:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$. 是否有 $\mathbf{N}$ 上的函数 f，对所有 $x\in\mathbf{N}$，$f(x)>f(\varphi(x))$，并且

(1) f 的值域是 $\mathbf{N}$ 的子集？

(2) f 的值域是 $\mathbf{Z}$ 的子集？

解 (1) 不存在，如果 f 满足所说条件，那么

$$f(1)>f(\varphi(1))>f(\varphi(\varphi(1)))>\cdots>$$
$$f(\varphi^{(k)}(1))>\cdots$$

而一个严格递减的自然数的数列只能有有限多项.

(2) 如果 $\varphi^{(k)}$ 有不动点，即有 x_0 使

$$\varphi^{(k)}(x_0)=x_0$$

那么 $f(\varphi^{(k)}(x_0))=f(x_0)$ 对任一函数 f 成立. 所以 $\varphi^{(k)}(k=1,2,\cdots)$ 无不动点是所述函数 f 存在的必要条件.

这一条件也是充分的. 事实上，自然数集 $\mathbf{N}$ 可以分拆成若干条 φ 的“轨道”.

当且仅当 $m=\varphi^{(k)}(n)$ 或 $n=\varphi^{(k)}(m)$ 时，m,n 属于同一轨道，这里 k 为任一自然数.

对每一条轨道，任取一个数 n_0，定义

$$f(n_0)=0$$
$$f(\varphi^{(k)}(n_0))=-k\quad(k\in\mathbf{Z})$$

这里 $\varphi^{(-1)}(n_0)$ 即满足 $\varphi(m)=n_0$ 的任一个 m.

这样定义的 f 显然满足条件：对所有 x

$$f(x)>f(\varphi(x))\quad(=f(x)-1)$$

注 前面的链是最简单的轨道，在本例中，φ 的每

一条轨道是一个树(无圈的连通图).

试题 C　求证:存在 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$,满足

$$f^{(k)}(n)=n+a\quad(n\in\mathbf{N})$$

的充分必要条件是 a 为自然数或零,并且 $k\mid a$.

解　条件是充分的,令

$$f(n)=n+\frac{a}{k}$$

(这一次,线性函数符合要求,我们应先想到它,但不能仅想到它.在它不符合要求时,应考虑其他的候选者.)则

$$f^{(k)}(n)=n+\underbrace{\frac{a}{k}+\frac{a}{k}+\cdots+\frac{a}{k}}_{k个}=n+a$$

条件也是必要的.由于 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$,所以 a 为整数.由于 $f^{(k)}(1)=1+a\in\mathbf{N}$,所以 a 为自然数或零.首先注意 f 是单射,即对于不同的(自然数)n,函数值 $f(n)$ 也互不相同.事实上,若

$$f(n_1)=f(n_2)$$

则

$$n_1+a=f^{(k)}(n_1)+f^{(k)}(n_2)=n_2+a$$

导出 $n_1=n_2$.

自然数集 $\mathbf{N}$ 可以分为若干条(f 的)轨道,轨道中每一项 n 的后面是 $f(n)$.由于 f 是单射,每两条轨道不相交.每条轨道的前 k 项

$$b,f(b),f^{(2)}(b),\cdots,f^{(k-1)}(b)$$

均不大于 a(否则,在该项前面至少有 k 项,并且这项减去 a 就是它的前面的第 k 项),其余的项均大于 a(等于前 k 项加 a),因此,$1,2,\cdots,a$ 分配在 l 条轨道中,每条含 k 个这样的数,所以

$$kl=a$$

即结论成立.

在罗马尼亚提供给1989年第30届IMO的预选题中有:

试题 D 对 $\varphi:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$,记

$$M_\varphi=\{f\mid \mathbf{N}\to\mathbf{Z},f(x)>f(\varphi(x)),\forall x\in\mathbf{N}\}$$

(1) 求证:若 $M_{\varphi_1}=M_{\varphi_2}\neq 0$,则 $\varphi_1=\varphi_2$;

(2) 若 $M_\varphi=\{f\mid \mathbf{N}\to\mathbf{N},f(x)>f(\varphi(x)),\forall x\in\mathbf{N}\}$,上述性质是否仍然成立?

证明 用"轨道"的概念可以很方便的解决.

(1) 设 $f\in M_{\varphi_1}$,记

$$\varphi_1^{[n]}=\varphi_1(\varphi_1(\cdots\varphi_1(x)\cdots))\quad(n\text{ 次迭代})$$

易知对 $\forall n\in\mathbf{N},\forall x\in\mathbf{N}$,有

$$f(\varphi_1^{[n]}(x))<f(x)\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

所以 $x=\varphi_1^{[0]}(x),\varphi^{[1]}(x),\varphi^{[2]}(x),\cdots$ 互不相同.

固定 $x_0\in M$,令 M 表示 x_0 的一条"轨道".即

$$M=\{\varphi_1^{[0]}(x_0),\varphi_1^{[1]}(x_0),\cdots,\varphi_1^{[n]}(x_0),\cdots\}$$

定义

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x),x\notin M\\ f(x)-n,x\in M\end{cases}\quad(n\in\mathbf{N})$$

我们证明 $f_n(x)\in M_{\varphi_1}$,事实上,若 $x\notin M$,则

$$f_n(x)=f(x)>f(\varphi_1(x))\geqslant f_n(\varphi_1(x))$$

若 $x\in M,f_n(x)=f(x)-n>f(\varphi_1(x))-n=f_n(\varphi_1(x))$.

由于 $M_{\varphi_1}=M_{\varphi_2}$,所以 $f_n\in M_{\varphi_2}$,从而

$$f_n(\varphi_2(x))<f_n(x)$$

若 $\varphi_2(x_0)\notin M$,则

$$f(\varphi_2(x_0))=f_n(\varphi_2(x_0))<f_n(x_0)=f(x_0)-n$$

但在 n 足够大时，上式不可能成立，所以必有 $\varphi_2(x_0)\in M$. 即存在 k，使 $\varphi_2(x_0)=\varphi_1^{[k]}(x_0)$，这里 $k\in\mathbf{N}$(由上面所说 $\varphi_2(x_0)\neq x_0$).

于是，对每个 $x\in\mathbf{N}$，均有 $k\in\mathbf{N}$(k 依赖于 x)，使

$$\varphi_2(x)=\varphi_1^{[k]}(x)$$

同样，对 $\forall x\in\mathbf{N}$，均有 $h\in\mathbf{N}$，使

$$\varphi_1(x)=\varphi_2^{[h]}(x)$$

于是在 $h>1$ 时，便有

$$\begin{aligned}\varphi_1(x)=\varphi_2^{[k]}(x)=\varphi_2^{[k-1]}(\varphi_1^{[k]}(x))=\\ \varphi_2^{[k-2]}(\varphi_1^{[k+k_1]}(x))=\cdots=\\ \varphi_1^{[k+k_1+\cdots+k_{i-1}]}(x)\end{aligned}$$

其中 $k_i\in\mathbf{N}$，使

$$\varphi_2(\varphi_1^{[k+k_1+\cdots+k_{i-1}]}(x))=\varphi_1^{[k_i]}(\varphi_1^{[k+\cdots+k_{i-1}]}(x))$$

但 $\varphi_1(x),\varphi_1^{[2]}(x),\varphi_1^{[3]}(x),\cdots$ 互不相同. 所以必有 $h=1,k=1$，即 $\varphi_1=\varphi_2$.

(2) 这时 M_{φ_1} 一定是空集. 事实上，若 $f\in M_{\varphi_1}$，则 f 的值集中必有一最小值 $a=f(x_0)$，这与 $f(x_0)>f(\varphi_1(x_0))$ 矛盾.

由于前提条件 $M_{\varphi_1}=M_{\varphi_2}\neq 0$ 不成立，所以(1) 中性质“若 $M_{\varphi_1}=M_{\varphi_2}\neq 0$，则 $\varphi_1=\varphi_2$”仍然成立.

试题 E 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续映射. 求证：如果存在 $a\in\mathbf{R}$ 和正数 c，使得对所有正整数 n 满足 $|f^n(a)|\leqslant c$，则 f 有一不动点 x_0 满足 $f(x_0)=x_0$，这里 f^n 表示 f 的 n 次迭代.

(第 3 届全国大学生数学夏令营第 1 试第 3 题)

证明 我们证明，在数列 $\{f^n(a)\}$ 的各种可能的情形中 f 都有不动点.

情形 1 设存在 $n\in\mathbf{N}$，使 $f^n(a)=f^{n-1}(a)$. 令

$x_0=f^{n-1}(a)$(记 $f^0(a)=a$)，则由 f^n 的定义可知 $f(x_0)=x_0$，即 x_0 是 f 的不动点.

情形2　设对任何 $n\in\mathbf{N}$，都有 $f^n(a)\neq f^{n-1}(a)$. 不妨设 $f(a)>a$，则或者 $M=\{n\in\mathbf{N}, f^n(a)<f^{n-1}(a)\}\neq\varnothing$，或者 $M=\varnothing$.

当 $M\neq\varnothing$ 时，令 $k=\min\limits_{n\in M}n$，则 $k>1$，且 $f^{k-1}(a)>f^{k-2}(a)$，$f^k(a)<f^{k-1}(a)$. 令 $y_1=f^{k-2}(a)$，$y_2=f^{k-1}(a)$，则 $y_1<y_2$，且

$$f(y_1)=f(f^{k-2}(a))=f^{k-1}(a)>f^{k-2}(a)=y_1$$

$$f(y_2)=f(f^{k-1}(a))=f^k(a)<f^{k-1}(a)=y_2$$

令 $g(x)=f(x)-x$，则有 $g_0(y_1)>0$，$g_0(y_2)<0$. 故存在 $x_0\in(y_1,y_2)$ 使 $f(x_0)=x_0$，即 x_0 是 f 的不动点.

当 $M=\varnothing$ 时，对任何 $n\in\mathbf{N}$ 都有 $f^n(a)>f^{n-1}(a)$. 因此，数列 $\{x_n=f^{n-1}(a)\}$ 是单调的. 由于 $\{f^n(a)\}$ 是有界的，$\{x_n\}$ 是有界的，因而 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n$ 存在. 记作 x_0，由于 $x_{n+1}=f^n(a)=f(f^{n-1}(a))=f(x_n)$ 以及 f 的连续性，令 $n\to\infty$，即得 $x_0=f(x_0)$，即此时 f 也有不动点.

1.3　李天岩关于 Li-Yorke 混沌的故事的自述[①]

在科学界，关于混沌(chaos)现象和奇异吸引子(Strang Attractor)的研究领域里，名气最大的奇异吸引子大概就是所谓的 Lorenz 吸引子吧. 在 Lorenz 吸引子成名的过程中，有一个关键的教授 Aller Feller 的名字却很少有人知道.

---

① 摘自《数学译丛》.

我在美国马里兰大学(University of Maryland)做研究生时，我的博士论文的指导教授是 J. A. Yorke 先生，他所属的研究所是"流体动力学与应用数学所"(Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics)(现在的名称已改成"物理科学与技术研究所"(Institute for Physical Sciences and Technology)). 那个研究所研究的领域非常之广. 比如说，固态物理、等离子体物理、化学工程、应用数学等. 其中有一个相当奇怪的项目，叫做气象研究，A. Feller 是这个项目的教授.

大约在 1972 年时，Feller 教授将 E. N. Lorenz 所写的关于气象预测模式的 4 篇文章交给 Yorke 教授. 当时 Feller 教授觉得 Lorenz 的文章过于理论化、数学化，他们不太感兴趣，也许我们搞数学的会比较感兴趣. 那 4 篇文章都是在气象的期刊上发表的. 若不是 Feller 教授，我们不太可能有机会接触到它，那段时间，我们读了那几篇 Lorenz 写的文章，觉得很有意思.

在 1973 年 4 月中的一天下午，我到 Yorke 教授的办公室. 当时他对我说："我给你一个好的思想！"(I have a good idea for you！)那时我在做微分方程方面的研究，我以为他所谓的"好思想"是关于微分方程方面的高深思想. 但是我却开玩笑地说："你的那个思想足够《数学月刊》的水平吧！"(Is your idea good enough for Monthly？)《数学月刊》是一个相当普及性的刊物，它就好像日本的《数学セミメー》一样，是一般学生都能看得懂的浅显杂志，并不刊载非常高深的思想(这种学生向老师开玩笑的事，在美国非常普遍，但是在国内好像并不多见). Yorke 教授听了我的

话之后，只是笑了一下. 当时他告诉我的思想就是后来出了名的 Li-Yorke 定理. 对于一个从 $\mathbf{R}^1$ 到 $\mathbf{R}^1$ 上的函数 f，我们用 $f^n(x)$ 来代表 $f \circ f^{n-1}(x)$. 如果对一点 $a \in \mathbf{R}^1$，我们有 $f^k(a)=a$，而且 $f^j(a) \neq a$，此处$0 \leqslant i < k$，则我们称 a 是周期 k 的点.

定理　假设 f 是从实数空间 $\mathbf{R}$ 到实数空间 $\mathbf{R}$ 的连续函数，同时假设 f 有一个周期 3 的点. 则：

(1) 对任一个正整数 n，都存在一个周期 n 的点 x_n；

(2)① 存在一个不可数的子集合 S，对其中的任何两点 x，y，我们有

$$\liminf_{n\to\infty} | f^n(x) - f^n(y) | = 0$$

$$\limsup_{n\to\infty} | f^n(x) - f^n(y) | > 0$$

② 对任一个周期点 $P \in \mathbf{R}^1$ 以及 S 里的点 x，我们有

$$\lim_{n\to\infty} | f^n(p) - f^n(x) | \neq 0$$

这个思想的原始出发点在 Lorenz 的那些文章中. 我们得到这个思想之后，马上感慨地说："这太适合《数学月刊》了！"(It will be a perfect work for Monthly！)"的确如此，因为它根本不牵涉高深的语言，一般学生都应看得懂.

大约两星期后，我就完全证明了这个定理. 证明过程中所用到的只是初等微积分里的中值定理，实在不是太高深. 我们将它写好之后，就真的投到《数学月刊》去了. 那时那篇文章引的参考文献只有 Lorenz 的那 4 篇文章.

没想到，没过多久那篇文章就被《数学月刊》退回. 他们说，我们这篇文章过于偏向"研究性"，并不适

合该期刊的读者,因此他们建议我们将原稿转寄其他的杂志.若是我们一定要投《数学月刊》,他们建议我们把它改写到一般学生都能看懂的地步.

文章退回以后,Yorke 教授还是坚持要寄回《数学月刊》.因为它比较一般化,读者群相当之大(其实,我真恨不得他能同意我转寄别的期刊).当初我们研究这个问题,以及写这篇文章,只是着迷它本身的趣味,和我博士论文的内容根本无关.因此我并没有花工夫去改它.事实上,我也不知道该怎么改.于是乎,这篇文章就在我桌上躺了将近一年.

1974 年是马里兰大学数学系的生物数学"特别年".在这一年里,每星期都要请生物数学这个领域里最杰出的学者来校演讲.在 5 月的第一个星期,他们所请的学者是赫赫有名的 Robert May 教授.他是当时普林斯顿大学生物系的教授.R. May 教授在那一星期中,每天都作一次演讲.最后一天演讲的内容是函数 $f_r(x)=rx(1-x),x\in[0,1],0<r<4$ 的迭代.这个函数在他们生物界的研究领域里是一个非常重要的模型,通常被称为 Logistic Model.

关于这个函数的迭代,现在已是举世皆知.但是 R. May 教授当时只是述说了前面一部分较规则的动态.也就是说,当 r 较小时我们作 $x_{n+1}=rx_n(1-x_n)$.这样的迭代,对于随意取的 x_0,$\{x_n\}$ 这个数列最后都趋近于一个点.但是当 r 慢慢变大而超过 3 时,$\{x_n\}$ 这个数列却趋向一对周期 2 的点.当 r 再变大而超过某一个数值时,$\{x_n\}$ 最后趋近一组周期 4 的点.然后,随 r 的逐渐变大,$\{x_n\}$ 最后会趋近一组周期 2^m 的点.但是当 r 大于某个极值后,却会出现一些奇怪的现象.比方