高等学校教材 4

工科数学分析

GONGKE SHUXUE FENXI

（下）

李冬松 王洪滨 主编

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等学校教材 4

工科数学分析

GONGKE SHUXUE FENXI

（下）

李冬松　王洪滨　主编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

《工科数学分析》分上、下两册。本书为其下册，共分四章，依次为：多元函数微分学，多元函数积分学，第二型曲线积分与第二型曲面积分、向量场，无穷级数。每章均有供自学的综合性例题。

本书叙述详细，说理透彻，例题由浅入深，可作为工科大学一年级新生数学课教材，也可作为备考工科硕士研究生的人员和工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析. 下/李冬松，王洪滨主编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2011.7

ISBN 978-7-5603-3336-6

Ⅰ.①工… Ⅱ.①李… ②王… Ⅲ.①数学分析-高等学校-教材 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 130952 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　王勇钢
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 16.25　字数 311 千字
版　　次　2011 年 7 月第 1 版　2011 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-3336-6
定　　价　28.00 元

前　　言

随着科学技术的迅猛发展，工科学生需要掌握更多的数学基础理论，拥有很强的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和科学计算能力. 为适应21世纪科技人才对数学的需求，我们按照前国家教委颁布的高等工业学校各门课程基本要求和硕士研究生入学考试大纲，编写了《工科数学分析》这套书.

本书适合各类工科大学学生使用，且具有以下特点：

1. 理论丰富. 本书不仅包括了普通工科学生必须掌握的高等数学基本理论和方法，同时还引入了一定量的理科数学分析知识，相信学生认真阅读学习本书后，必能获得扎实的理论基础.

2. 侧重培养学生的创新及分析解决问题的能力. 和普通教材相比，本书有大量的例题和习题，其中一部分习题必须认真观察、分析才能解决. 另一部分习题侧重于联系实际，学生必须将实际问题转化为数学问题，建立数学模型才能解决.

3. 满足硕士研究生入学考试需要. 本书部分例题和习题达到硕士研究生统一考试试题难度，如能很好地掌握本书内容，可以满足学生备考硕士研究生的需求.

哈尔滨工业大学数学系张宗达教授（基础学科带头人）对本书的编写给予了指导性建议，并提出了大量的有价值的意见；刘维国老师一直给予我们很大鼓励和帮助并对本书的总体框架及修改过程提出许多建设性建议；黄艳老师等在本书的电子稿形成和校对过程中做了大量工作；哈尔滨工业大学出版社张永芹编辑辛勤运作，为本书出版作了很多工作，在此一并向他们表示衷心感谢！

由于编者水平有限，书中的缺点、疏漏在所难免，恳请广大读者批评指正.

编　者

2011年3月

目 录

第8章 多元函数微分学

此前我们讨论的函数都仅有一个自变量,这种函数被称为一元函数,但是在很多实际问题中,客观事物的变化是受多方面因素制约的,反映在数学上我们必须研究依赖多个自变量的函数,即多元函数. 多元函数的微积分学的内容和方法都与一元函数的内容和方法紧密相关,但由于变元的增加,问题更加复杂多样. 在学习时,应注意与一元函数有关内容的对比,找出异同. 这样不但有利于理解和掌握多元函数的知识,而且复习巩固了一元函数的知识. 本章介绍多元函数的基本概念及其微分学.

8.1 多元函数的基本概念

8.1.1 预备知识

因为我们要研究多元函数,而多元函数的定义域是 n 维空间上点的集合,所以本段将介绍 n 维空间及其上点的集合的术语和概念.

在平面引入直角坐标系 Oxy 后,平面上的点 P 和两个实数构成的有序数组 (x,y) 一一对应,这样数组 (x,y) 就等同于点 P,所有的二元有序数组 (x,y) 的集合就表示二维空间上所有的点的集合,即整个二维空间. 推而广之,有下面的定义.

定义 8.1 称 n 元有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(x_i\in\mathbf{R})$ 为一个 n 维点(或 n 维向量),所有 n 维点构成的集合叫做 n 维空间,记为 $\mathbf{R}^n$. 点 $(0,0,\cdots,0)$ 称为 n 维空间的原点.

所有实数构成一维空间 $\mathbf{R}$,几何上就是数轴;所有实数偶 (x,y) 的集合为二维空间 $\mathbf{R}^2$,几何上是坐标平面;日常说的空间就是三维空间. $n>3$ 时,空间 $\mathbf{R}^n$ 没有直观的几何形象,但它们客观上是存在的,比如,我们生活的“时 - 空”空间是四维空间. 我们常常可以借助于二维、三维空间来想象三维以上的空间.

定义 8.2 $\mathbf{R}^n$ 中任意两点 $A(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $B(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 之间的距离 $\rho(A,B)$ 规定为

$$\rho(A,B)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2}$$

这与n维向量的模(范数)的定义是一致的. 代数中已经证明,若P_1,P_2,P_3是三个n维点,则有"三角不等式"

$$\rho(P_1,P_3)\leqslant\rho(P_1,P_2)+\rho(P_2,P_3)$$

定义 8.3 设$P_0\in\mathbf{R}^n$,常数$\delta>0$,则称$\mathbf{R}^n$的子集

$$\{P\mid\rho(P,P_0)<\delta,P\in\mathbf{R}^n\}$$

为点P_0的δ邻域,记为$U_\delta(P_0)$.

$U_\delta(P_0)$是以P_0为中心,δ为半径的"n维球"内部所有点的集合. 当我们不关心半径δ的大小时,就把它称为P_0的邻域,记为$U(P_0)$.

定义 8.4 对集合$E\subseteq\mathbf{R}^n$,点$P_0\in\mathbf{R}^n$,若$\exists\delta>0$,使$U_\delta(P_0)\subseteq E$,则称P_0为E的内点. 若P_0的任何邻域内部有属于E的点,也有不属于E的点(P_0可以属于E,也可以不属于E),则称P_0为E的边界点(图 8.1).

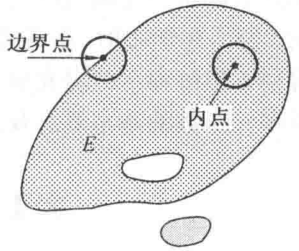

图 8.1

定义 8.5 若集合E的每个点都是它的内点,则说E是开集. 若E的任何两点都有E中的曲线($\mathbf{R}^n$中的曲线是满足单参数t的连续函数$x_i=x_i(t),i=1,2,\cdots,n$的点集)连接,则说$E$是(线)连通集. 连通开集称为区域或开区域. 区域和它的边界的并集叫做闭区域.

定义 8.6 若$\exists\delta>0$,使集合$E\subseteq U_\delta(O)$,其中O是$\mathbf{R}^n$中的原点$(0,0,\cdots,0)$,则说E有界,否则说E无界.

例如,$\{(x,y)\mid x+y>0\}$是$\mathbf{R}^2$中无界区域,而集合$\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant1\}$是$\mathbf{R}^3$中有界闭区域.

8.1.2 多元函数

在很多自然现象和实际问题中,经常会遇到依赖两个或两个以上变量的变量,请看下面的例子.

例 8.1.1 一定量的某种理想气体的压强P依赖于体积V和绝对温度T

$$P=\frac{RT}{V}$$

其中R为常数.

例 8.1.2 设R是电阻R_1,R_2并联后的总电阻,由电学知道它们之间具有关系

$$R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

这里当R_1,R_2在集合$\{(R_1,R_2)\mid R_1>0,R_2>0\}$内取定一对值时,$R$的对应值

就随之确定.

例 8.1.3 冷却过程中的铸件,温度 τ 与铸件内点的位置 x,y,z 和时间 t,以及外界环境温度 τ_0,空气流动的速度 v 有关

$$\tau=f(t,x,y,z,\tau_0,v)$$

定义 8.7 设 D 是 Oxy 平面的点集,若变量 z 与 D 中的变量 x,y 之间有一个依赖关系,使得在 D 内每取定一个点 $P(x,y)$ 时,按着这个关系有确定的 z 值与之对应,则说 z 是 x,y 的二元(点)函数,记为

$$z=f(x,y)\ (\text{或 } z=f(P))$$

二元函数 $z=f(x,y)$ 就是 Oxy 平面点集 D 到 z 轴上的映射 $f:D\to\mathbf{R}$. 称 x,y 为自变量,称 z 为因变量,点集 D 称为该函数的定义域,数集

$$\{z \mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为该函数的值域.

函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的函数值记为 $f(x_0,y_0)$ 或 $f(P_0)$.

类似地可以定义 n 元函数. 二元及二元以上的函数统称多元函数. 关于多元函数的定义域,我们做出如下约定,实际问题中的函数,定义域由实际意义确定. 在一般地考虑由数学式子表达的函数时,定义域是使这个算式在实数范围内有意义的那些点所确定的点集.

例 8.1.4 函数 $z=\ln(x+y)$ 的定义域是 $\{(x,y) \mid x+y>0\}$,在平面直角坐标系下是直线 $x+y=0$ 右上方的半平面(不含该直线),是无界开区域(图 8.2).

例 8.1.5 函数 $z=\dfrac{\sqrt{2x-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ 的定义域是 $\{(x,y) \mid (x-1)^2+y^2\leqslant 1$ 且 $x^2+y^2>1\}$,图 8.3 中有阴影的月牙形为有界点集.

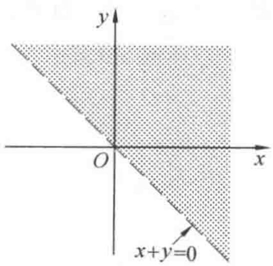

图 8.2

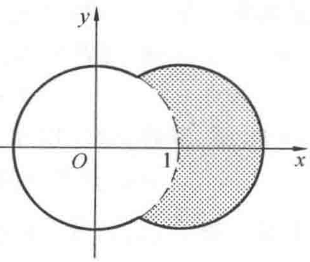

图 8.3

例 8.1.6 函数 $u=\sqrt{z-x^2-y^2}+\arcsin(x^2+y^2+z^2)$ 的定义域是 $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2\leqslant z$ 且 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$,在空间直角坐标系下是以原点为球心,1 为半径的球体内,旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 上方的部分,是有界闭区域(图 8.4).

我们经常接触到的平面区域 D 上的二元函数

$$z=f(x,y) \quad (x,y)\in D$$

的图形是三维空间中的曲面,如图 8.5 所示.

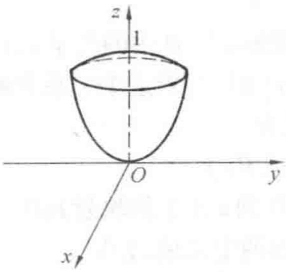

图 8.4

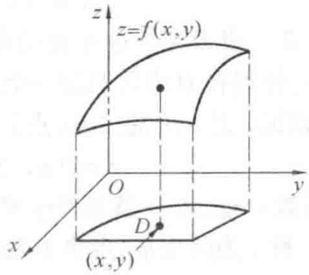

图 8.5

例如,由空间解析几何知,函数 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的图形是以原点为球心,R 为半径的上半球面. 函数 $z=x^2+y^2$ 的图形是旋转抛物面. 函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的图形是圆锥面. 函数 $z=xy$ 的图形是双曲抛物面. 二元隐函数 $Ax+By+Cz+D=0$ 的图形是平面.

最后指出,从一元函数到二元函数,在内容和方法上都会出现一些实质性的差别,而多元函数之间差异不大,因此讨论多元函数时,将以二元函数为主.

8.1.3 多元函数的极限与连续

对集合 $E\subseteq\mathbf{R}^n$,点 $P_0\in\mathbf{R}^n$,如果 P_0 的任何邻域中都有无穷多个点属于 E,则称 P_0 为集合 E 的一个聚点. 聚点本身可能属于 E,也可能不属于 E. 集合的内点必是聚点,边界点可能是聚点,也可能不是.

定义 8.8 设 $u=f(P)$,$P\in D$,P_0 是 D 的聚点,A 是常数. 如果对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得当 $P\in D$,且 $0<\rho(P,P_0)<\delta$ 时,恒有

$$|f(P)-A|<\varepsilon$$

则说 $P\to P_0$ 时,函数 $f(P)$ 以 A 为极限,记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \text{ 或 } f(P)\to A \quad (P\to P_0)$$

当 P 是二维点 (x,y) 时,上述极限记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \text{ 或 } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

多元函数极限的含意是:只要点 $P(P\in D)$ 到 P_0 的距离 $\rho(P,P_0)\to 0$,就有 $f(P)\to A$.

例 8.1.7 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0,(x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

在原点的极限为 0.

证 可知

$$|f(x,y)-0|=\begin{cases}\left|x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\right|, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0,(x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

对 $\forall\varepsilon>0$:

(1) 若 $xy=0,(x,y)\neq(0,0)$,存在 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$,当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时,恒有

$$|f(x,y)-0|<\frac{\varepsilon}{2}$$

(2) 若 $x,y\neq 0$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$,当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时,恒有

$$|f(x,y)-0|=\left|x\sin\frac{1}{x}+y\sin\frac{1}{y}\right|\leqslant|x|+|y|\leqslant 2\sqrt{x^2+y^2}<2\delta=\varepsilon$$

即

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$$

务必注意,虽然多元函数的极限与一元函数的极限的定义相似,但它复杂得多. 一元函数在某点处极限存在的充要条件是左右极限存在且相等,而多元函数在某点处极限存在的充要条件是点 P 在 P_0 的某邻域内以任何可能的方式和途径趋于 P_0 时,$f(P)$ 都有极限且相等(查理科数学分析). 因此:

(1) 如果点 P 以两种不同的方式或途径趋于 P_0 时,$f(P)$ 趋向不同的值,则可断定 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$ 不存在.

(2) 已知 P 以几种方式和途径趋于 P_0 时,$f(P)$ 趋于同一个数,这时还不能断定 $f(P)$ 有极限.

(3) 如果已知 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$ 存在,则可取一特殊途径来求极限.

例 8.1.8 讨论极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 的存在性.

解 当点 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时

$$\lim_{(x,kx)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^3}{x^2+k^4x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x}{1+k^4x^2}=0$$

又沿直线 $x=0$,也有

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{y\to 0}f(0,y)=0$$

这说明沿任何直线趋于原点时，$f(x,y)$ 都趋于零. 尽管如此，还不能说 $f(x,y)$ 以零为极限，因为点 (x,y) 趋于 $(0,0)$ 的途径还有无穷多种. 请看，当点 (x,y) 沿抛物线 $x=y^2$ 趋于 $(0,0)$ 时

$$\lim_{(y^2,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{y^4}{y^4+y^4}=\frac{1}{2}$$

故例 8.1.8 中的极限不存在.

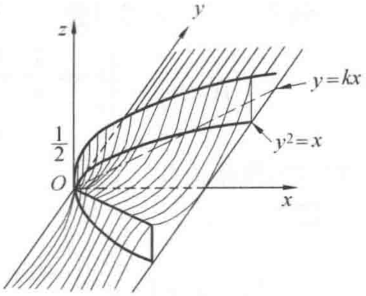

图 8.6

函数 $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 是 x 的奇函数，关于 y 轴对称，又是 y 的偶函数，图形关于坐标面 $y=0$ 对称. 其图形如图 8.6 所示.

一元函数求极限的四则运算法则、夹挤准则都可以推广到多元函数极限运算上来，唯一性、极限点附近的保序性和有界性也都成立.

例 8.1.9 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3+y^5}{x^2+y^2}$.

解 可得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3+y^5}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot x\right)+\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot y^3\right)=0$$

这里我们利用了 $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ 和 $\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ 的有界性，以及 x 和 y^3 是无穷小量的事实.

例 8.1.10 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y}$.

解 令 $y=x$，有

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+x^5+x^3}{2x}=0$$

令 $y=x^3-x$，有

$$\lim_{(x,x^3-x)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3(x^3-x)+x(x^3-x)^4+x^2(x^3-x)}{x+x^3-x}=-1$$

故极限不存在.

顺便指出：$(x,y)\to(x_0,y_0)$ 的过程中，x 和 y 是作为点的坐标同时趋于 x_0 和 y_0 的，不能把它分开先后. 如

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{y\to 0}0=0$$

与例 8.1.8 的极限不是一回事.

定义 8.9 设函数$f(P)$的定义域为D, P_0是D的聚点. 如果$P_0 \in D$,且

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$$

则说函数$f(P)$在点P_0处连续,并称P_0是$f(P)$的连续点. 否则称P_0是$f(P)$的间断点.

若记$\Delta u = f(P) - f(P_0)$, $\rho = \rho(P, P_0)$,函数$u = f(P)$在P_0处连续等价于

$$\lim_{\rho \to 0} \Delta u = 0$$

如果函数$f(P)$在区域E的每一点处都连续,则说函数$f(P)$在区域E上连续,记为$f(P) \in C(E)$.

例如,函数$f(x,y) = \dfrac{xy}{1 + x^2 + y^2}$在$(x,y)$平面上处处连续. 函数$f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$仅在原点$(0,0)$处不连续. 函数$f(x,y) = \sin \dfrac{1}{1 - x^2 - y^2}$在单位圆$x^2 + y^2 = 1$上处处间断.

在空间直角坐标系下,平面区域E上的二元连续函数$z = f(x,y)$的图形是在E上张开的一张"无孔无缝"的连续曲面.

同一元函数一样,多元连续函数的和、差、积、商(分母不为零)及复合仍是连续的. 每个自变量的基本初等函数经有限次四则运算和有限次复合,由一个式子表达的函数称为多元初等函数,多元初等函数在它们定义域的内点处均连续.

有界闭区域上的多元连续函数有如下重要性质:

最大最小值存在性 在有界闭区域上连续的函数必有界,且有最大值和最小值.

介值存在性 在有界闭区域上连续的函数必能取到介于最大值与最小值之间的任何值.

8.2 偏导数与高阶偏导数

8.2.1 偏导数

在学习一元函数时,我们从研究函数的变化率的工作中引进了导数的概念,对于多元函数,我们仍然需要了解函数的变化率,然而,由于自变量的个数多于一个,情况变得复杂. 但我们可以研究一个受多种因素制约的量,在其他因素固定不变的情况下,随一种因素变化的变化率问题 —— 偏导数问题.

定义 8.10 设函数$z = f(x,y)$在点(x_0, y_0)的某邻域内有定义,固定$y = y_0$,给x_0以增量Δx,称

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏增量,若极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}[f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)]$$

存在,则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数,记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \text{或} f'_x(x_0,y_0)$$

同样定义 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 y 的偏导数为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = f'_y(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y}[f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]$$

如果在区域 E 内每一点 (x,y) 处函数 $z=f(x,y)$ 关于 x 的偏导数都存在,那么这个偏导数就是 E 内点 (x,y) 的函数,称之为 $z=f(x,y)$ 关于 x 的偏导数,简称对 x 的偏导数,记为

$$z'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \text{或} f'_x(x,y)$$

同样,$z=f(x,y)$ 对 y 的偏导(函)数,记为

$$z'_y, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \text{或} f'_y(x,y)$$

偏导函数 $f'_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的值,就是函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$.

对一般多元函数可以类似地定义偏导数. 如函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处关于 x 的偏导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = f'_x(x_0,y_0,z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}[f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)]$$

由偏导数的定义知,多元函数对某个自变量的偏导数,就是把其他自变量视为常量,考查函数对这个自变量变化的变化率. 所以利用一元函数的导数公式与法则,就可计算偏导数了.

例 8.2.1 求 $f(x,y,z)=(z-a^{xy})\sin \ln x^2$ 在点 $(1,0,2)$ 处的三个偏导数.

解 求某一点的偏导数时,可以先将其他变量的值代入,变为一元函数,再求导,这种方法常常较简便

$$f'_x(1,0,2) = [\sin \ln x^2]'|_{x=1} = \frac{2}{x}\cos \ln x^2|_{x=1} = 2$$

$$f'_y(1,0,2) = 0'|_{y=0} = 0, f'_z(1,0,2) = 0'|_{z=2} = 0$$

例 8.2.2 求 $z=x^y(x>0)$ 的偏导数.

解 $z'_x = yx^{y-1}, z'_y = x^y \ln x$.

例 8.2.3 设 $z=z(x,y)$ 定义在全平面上,若 $\frac{\partial z}{\partial x}\equiv 0$,试证 $z=z(0,y)=f(y)$.

证 对任意给定的 y_0,因为 $\frac{\partial z}{\partial x}\equiv 0$,故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(z(x,y_0))=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y_0)}\equiv 0$$

故

$$z(x,y_0)=C=z(0,y_0)$$

由 y_0 的任意性

$$z(x,y)=z(0,y)=f(y)$$

例 8.2.4 求二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处的两个偏导数.

解 这里必须由偏导数定义计算

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0$$

两个偏导数都存在,回顾 8.1 节例 8.1.8 知,当 $(x,y)\to(0,0)$ 时这个函数无极限,所以在点 $(0,0)$ 处也不连续.

一元函数可导必连续. 但对多元函数,偏导数都存在,函数未必有极限,更保证不了连续性.

为了一般地说明这一问题,先介绍偏导数的几何意义.

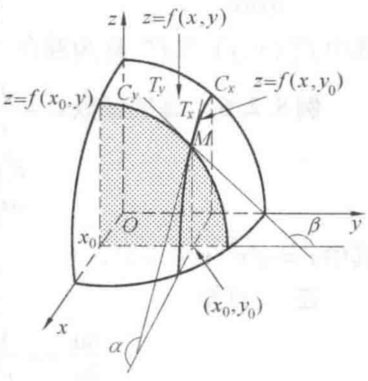

图 8.7

因为偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 就是一元函数 $f(x,y_0)$ 在 x_0 处的导数,所以几何上 $f'_x(x_0,y_0)$ 表示曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $y=y_0$ 的交线在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线对 x 轴的斜率. 同样 $f'_y(x_0,y_0)$ 表示曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $x=x_0$ 的交线在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线对 y 轴的斜率,因为偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 仅与函数 $z=f(x,y)$ 在 $y=y_0$ 上的值有关,$f'_y(x_0,y_0)$ 仅与 $z=f(x,y)$ 在 $x=x_0$ 上的值有关,与 (x_0,y_0) 邻域内其他点上的函数值无关,所以偏导数的存在不能保证函数有极限(图 8.7).