



西安电子科技大学研究生精品教材

*Time Domain Computational Method for Electromagnetic Waves*

# 电磁波时域计算方法

(下册)

——时域有限元法

葛德彪 魏兵 著



西安电子科技大学出版社  
<http://www.xduph.com>

内容简介

本书获西安电子科技大学研究生精品教材项目资助

# 电磁波时域计算方法

(下册)

## ——时域有限元法

葛德彪 魏兵 著

西安电子科技大学出版社

## 内 容 简 介

本书分为上下册,除引言外共三部分 19 章,分别讨论了时域积分方程(IETD)、时域有限差分(FDTD)和时域有限元(FETD)三种方法。对于 IETD,首先导出势函数表述的电场磁场积分方程,经过试验过程和展开过程导出离散形式,再利用时间导数的差分近似获得时域步进公式,分析讨论了细导线、二维导体柱和三维导体的散射。对于 FDTD,基于 Yee 元胞和中心差分近似直接将 Maxwell 旋度方程离散导出时域步进公式,讨论吸收边界、完全匹配层、总场边界和近场—远场外推公式,并用于散射计算;此外,还讨论了共形网格技术和色散介质的处理方法。对于 FETD,从 TM/TE 标量波动方程或电场矢量波动方程及边界条件出发,应用 Galerkin 加权余量导出弱解积分形式;随后经过单元离散和结点或棱边基函数展开,导出单元矩阵方程,再运用组合获得时域矩阵微分方程,将时间导数应用 Newmark 方法离散后给出时域步进公式,讨论了激励源加入、总场边界和近场—远场外推公式并用于散射计算。三种方法都配有算例,附录中给出一维计算程序。上册和下册书末分别附有 FDTD 和 FETD 的电磁波近场分布彩图。

本书可作为无线电物理、电磁场与微波技术、电子科学与技术、电波传播等专业研究生的教材或教学参考书,也可供有关学科教师、科技工作者、研究生和高年级大学生阅读参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

电磁波时域计算方法. 下册, 时域有限元法/葛德彪, 魏兵著.

—西安: 西安电子科技大学出版社, 2014. 11

ISBN 978 - 7 - 5606 - 3531 - 6

I. ① 电… II. ① 葛… ② 魏… III. ① 电磁波—时域分析—有限差分法 IV. ① O441.4

### 中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 263915 号

策 划 李惠萍 胡华霖

责任编辑 马晓娟 李惠萍

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西华沐印刷科技有限责任公司

版 次 2014 年 11 月第 1 版 2014 年 11 月第 1 次印刷

开 本 787 毫米×1092 毫米 1/16 印张 14.5 彩页 2

字 数 336 千字

印 数 1~3000 册

定 价 28.00 元

ISBN 978 - 7 - 5606 - 3531 - 6/O

**XDUP 3823001 - 1**

\*\*\* 如有印装问题可调换 \*\*\*

## 作者简介



葛德彪，男，1961年毕业于武汉大学物理系。西安电子科技大学教授，博士生导师。中国电子学会会士，电磁科学院会士(Fellow of The Electromagnetics Academy)。1980~1982年为美国宾夕法尼亚大学(University of Pennsylvania)访问学者。1993年及1995年为美国德克萨斯大学达拉斯分校(University of Texas at Dallas)高级访问学者。被评为电子部优秀教师(1985年)，机械电子部有突出贡献专家(1991年)，政府特殊津贴专家(1992年)，陕西省学位委员会、陕西省教育委员会优秀博士生导师(1998年)。

主要研究领域为电磁散射、逆散射及电磁成像，计算电磁学，复杂介质中的电磁波传播等。已发表学术刊物及会议论文多篇。出版著作有《电磁逆散射原理》(1987年)，获机械电子部优秀教材一等奖(1992年)；《电磁波时域有限差分方法》(2002年)，被教育部推荐为研究生教学用书；《电磁波理论》(2011年)。



魏兵，男，1993年7月毕业于北京师范大学物理系。2004年7月获西安电子科技大学无线电物理专业博士学位。现为西安电子科技大学教授，博士生导师，2011计划“信息感知技术协同创新中心”目标与环境特性研究部副部长、西安电子科技大学物理与光电工程学院电波研究所副主任，中国物理学会计算物理学分会计算电磁学组理事，中国电子学会高级会员，陕西物理学会理事。近年来先后主持和参与了973项目、863项目、国家自然科学基金、国防预研项目、博士后基金等科研项目。发表论文100余篇，其中被SCI检索30余篇，EI检索50余篇。与葛德彪教授合著出版有专著《电磁波理论》(2011年，科学出版社)。

# 前 言

电磁波在现代科学技术和日常生活中的应用日益广泛。对于电磁波的研究包括理论分析、数值模拟和实验测试等途径。作为理论分析和数值计算基础的麦克斯韦(Maxwell)方程提出(1873年)至今已近150年。随着计算机的发展,数值模拟结合理论分析与可视化技术凸显了电磁波辐射散射传播过程中的物理属性和量化特征;在此基础上发展的电磁仿真技术更是实验研究和工程设计的重要手段。电磁学数值计算可分为频域方法和时域方法。许多数值方法起源于频域计算,例如矩量法、有限元法和高频技术中的几何光学和物理光学方法等。时域计算发展的重要标志是时域有限差分方法的提出(Yee, 1966)和应用。随后许多频域方法都发展了其时域版本。本书讨论时域数值计算方法,不包含高频技术的时域方法。

本书共三部分,分别讨论时域积分方程(IETD)、时域有限差分(FDTD)和时域有限元(FETD)三种方法。全书分为上册和下册三部分(引言独立于三部分之外),共19章。上册为引言和前两部分,共9章,下册为第三部分共10章。第1章为引言,着重讨论关联时域和频域分析的傅里叶(Fourier)变换。书中时谐场复数表示的时谐因子采用 $\exp(j\omega t)$ 。第2~4章为IETD方法,根据电场和磁场积分方程,经过试验过程、展开过程和差分近似导出时域步进公式,分析细导线和二维与三维导体散射。第5~9章为FDTD方法,基于Yee元胞和中心差分将Maxwell旋度方程离散导出时域步进公式,讨论了吸收边界、总场边界和近场-远场外推公式并用于散射计算。第10~19章下册为FETD方法,第10~15章讨论基于结点基函数的二维TM/TE标量波动方程FETD;第16~19章讨论基于棱边基函数的电场矢量波动方程FETD。标量和矢量FETD都采用Galerkin加权余量分析途径。在导出波动方程边值问题弱解积分形式基础上,应用有限元离散、基函数展开以及组合过程得出矩阵方程,再运用Newmark方法获得时域步进公式,分析激励源加入、总场边界和近场-远场外推并用于散射计算。时域计算方法要将电磁波积分微分方程转换为代数方程(包括矩阵形式),并且具有时域步进特点,从而可编程计算。为了理解和掌握几种方法,应当明了演绎的出发点、数学过程、条件、结论及计算步骤。本书注重推导明晰,概念清楚,论述简明。三种方法都配有算例,并附有简单程序。学习本书内容需要具备电磁场或电动力学的基本知识。

本书是在使用多年的研究生课程讲义基础上形成的,从讲义到书稿的形成经历了科研和教学过程,许多工作都有研究生的合作参与。参加IETD有关工作的有

朱今松、李小勇、徐雨果、曹乐等；参加 FETD 有关工作的有宋刘虎、李林茜、杨谦等。关于 FDTD 的研究已持续多年，有许多过去和现在的研究生参与，他们中有闫玉波研究员、杨利霞教授、张玉强副教授、王飞副教授、胡晓娟副教授、吴跃丽副教授和杨谦、李林茜等，本书的完成和他们的工作密不可分。本书的准备和出版得到西安电子科技大学研究生精品教材项目资助和 863 项目“复杂电磁环境数值建模”(2012AA01A308)的支持，出版过程中西安电子科技大学出版社作了大量细致的编辑工作，在此一并表示感谢。

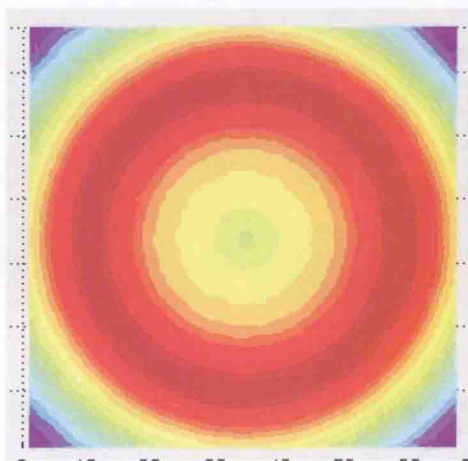
十分欢迎与感谢专家和读者对本书提出意见与建议。

葛德彪 魏兵

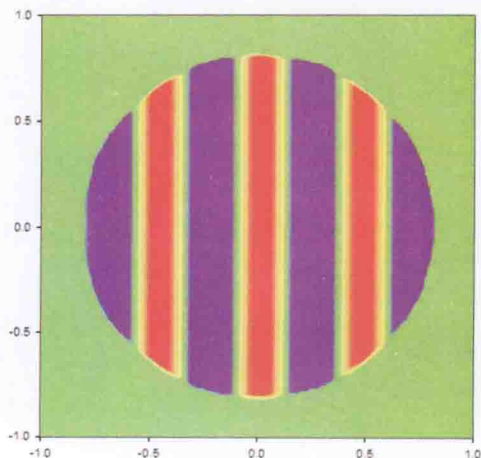
2014 年 4 月于西安电子科技大学

## 下册附彩图

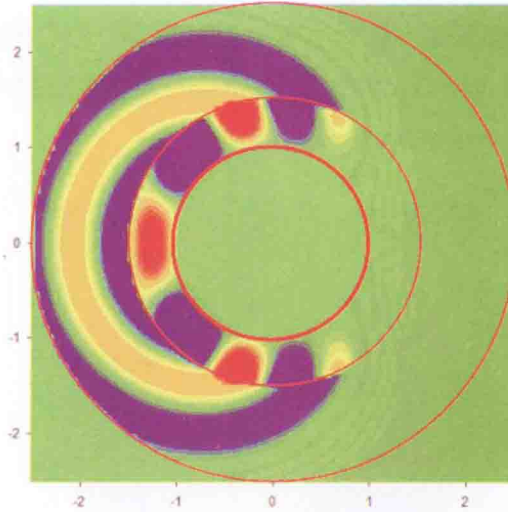
【彩图 7】 结点基函数 FETD 方法。TM 波，线电流辐射， $200\Delta t$  电场  $E_z$  分布。（矩形计算域为  $2\text{ m}\times 2\text{ m}$ ，划分为 2144 个三角形，1123 个结点。高斯脉冲为  $\exp[-4\pi(t-t_0)/\tau^2]$ ， $\tau=t_0=100\Delta t$ ， $\Delta t=0.025\text{ ns}$ 。）



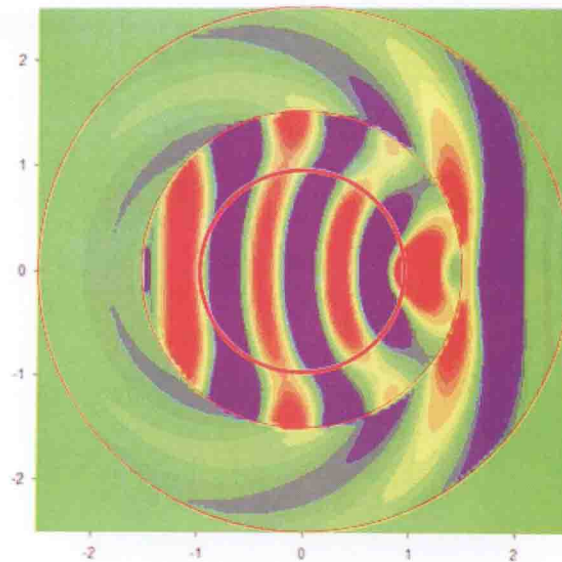
【彩图 8】 结点基函数 FETD 方法。TM 平面波，电场  $E_z$  分布。（矩形计算域为  $2\text{ m}\times 2\text{ m}$ ，离散为 21 728 个三角形，11 025 结点；圆形总场边界半径为 0.8 m。时谐场  $f=2/\pi\text{ GHz}=0.637\text{ GHz}$ 。）



【彩图 9】 结点基函数 FETD 方法。TM 平面波金属圆柱散射， $240\Delta t$  电场  $E_z$  分布。（圆形计算域半径为 2.5 m，离散为 76 544 个三角形，38 596 个结点。圆形总场边界半径为 1.5 m，金属圆柱半径为 1 m。时谐场  $\lambda=1$  m， $\Delta t=4.16\times 10^{-11}$  s。）

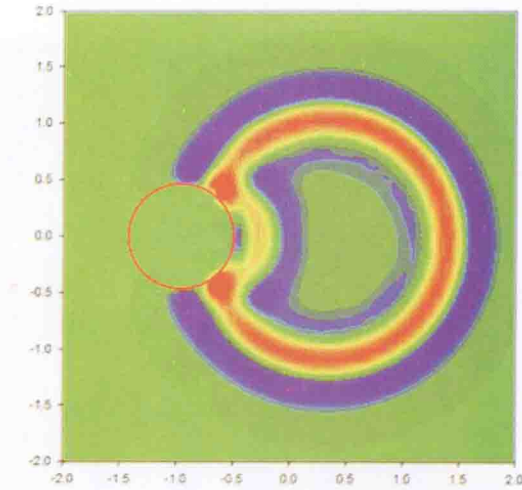


【彩图 10】 结点基函数 FETD 方法。TM 平面波介质圆柱散射， $400\Delta t$  电场  $E_z$  分布。（圆形计算域半径为 2.5 m，离散为 76 544 个三角形，38 596 个结点。圆形总场边界半径为 1.5 m，介质圆柱半径为 1 m， $\epsilon_r=2$ 。时谐场  $\lambda=1$  m， $\Delta t=4.16\times 10^{-11}$  s。）

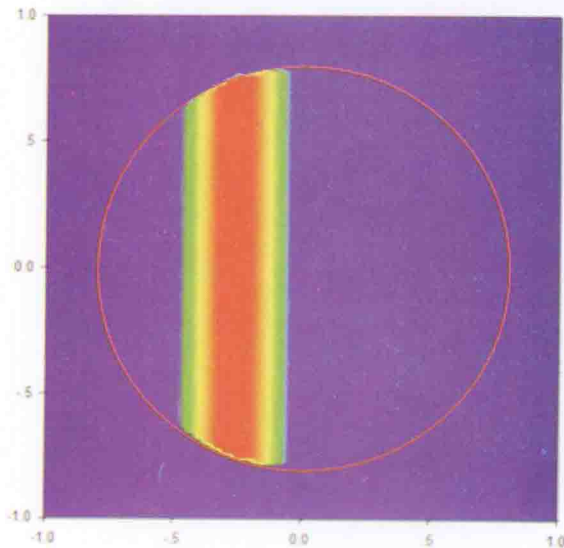




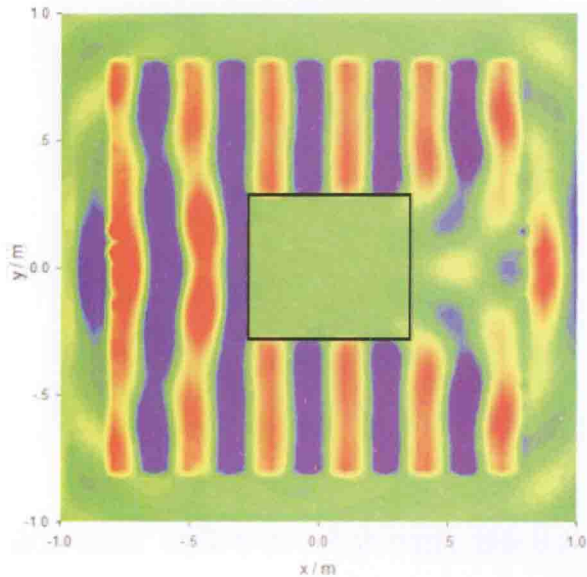
【彩图 11】 棱边基函数 FETD 方法。TE 波，线磁流照射金属圆柱散射， $250\Delta t$  磁场  $H_z$  分布。（矩形计算域为  $4\text{ m}\times 4\text{ m}$ ，离散为 5458 个三角形，2810 个结点，8267 条棱边。微分高斯脉冲。）



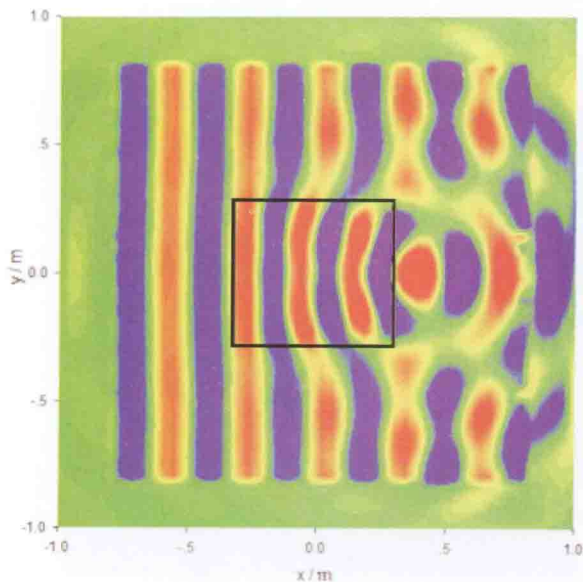
【彩图 12】 棱边基函数 FETD 方法。TE 平面波， $200\Delta t$  磁场  $H_z$  分布。（矩形计算域为  $2\text{ m}\times 2\text{ m}$ ，离散为 21 760 个三角形，11 041 个结点，32 800 条棱边。圆形总场边界半径为  $0.8\text{ m}$ 。高斯脉冲  $\tau=t_0=100\Delta t$ ， $\Delta t=2.5\times 10^{-11}\text{ s}$ 。）



【彩图 13】 棱边基函数 FETD 方法。TE 平面波方柱散射，磁场  $H_z$  分布。（矩形计算域为  $2\text{ m}\times 2\text{ m}$ ，离散为 20 416 个三角形，10 369 个结点，30784 条棱边。矩形总场区域为  $1.6\text{ m}\times 1.6\text{ m}$ ，方柱为  $0.6\text{ m}\times 0.6\text{ m}$ 。时谐场  $\lambda=0.3\text{ m}$ ， $\Delta t=2.5\times 10^{-11}\text{ s}$ 。）



(a) 金属方柱， $400\Delta t$



(b) 介质方柱， $\epsilon_r=2$ ， $400\Delta t$

# 目 录

## 第三部分 时域有限元(FETD)方法

<b>第 10 章 电磁场波动方程边值问题及其弱解形式</b> .....	3
10.1 电磁场矢量波动方程 .....	3
10.1.1 无耗介质情形 .....	3
10.1.2 有耗介质情形 .....	4
10.2 二维标量波动方程 .....	4
10.2.1 TM 波 .....	4
10.2.2 TE 波 .....	5
10.2.3 无耗介质 TM 和 TE 波动方程的统一形式 .....	5
10.3 边界条件 .....	6
10.3.1 介质分界面边界条件 .....	6
10.3.2 标量波动方程的三类边界条件 .....	7
10.4 吸收边界条件 .....	7
10.4.1 两类辐射散射问题 .....	7
10.4.2 一阶吸收边界条件的标量式 .....	8
10.4.3 吸收边界条件的电场矢量式 .....	10
10.4.4 阻抗边界条件 .....	11
10.5 微分方程边值问题的弱解形式 .....	12
<b>第 11 章 计算域空间单元和结点基函数</b> .....	14
11.1 计算域空间单元的划分 .....	14
11.1.1 结构单元和非结构单元 .....	14
11.1.2 一维二维和三维常用有限元单元 .....	15
11.2 一维直线单元 .....	15
11.2.1 结点基函数和长度坐标 .....	15
11.2.2 基函数单元积分公式 .....	18
11.3 二维三角形单元 .....	18
11.3.1 三角形单元和结点基函数 .....	18
11.3.2 三角形单元的面积坐标 .....	22
11.3.3 基函数单元积分公式 .....	23
11.4 二维矩形单元 .....	24
11.4.1 矩形单元和结点基函数 .....	24
11.4.2 基函数单元积分公式 .....	25
11.5 三维四面体单元 .....	26
11.5.1 四面体单元和结点基函数 .....	26

11.5.2	四面体单元的体积坐标	30
11.5.3	基函数单元积分公式	32
11.6	三维矩形块单元	32
<b>第 12 章 基于结点基函数的二维波动方程 Galerkin 有限元解</b>		<b>34</b>
12.1	无耗介质二维波动方程边值问题及其弱解形式	34
12.2	弱解形式的有限元离散	36
12.2.1	区域的单元划分和结点编号	36
12.2.2	有限元矩阵方程	38
12.2.3	一阶吸收边界条件的加入	42
12.3	单元矩阵分量的计算	43
12.4	全域矩阵和全域矢量的组合	44
12.4.1	二单元区域的简单例子	44
12.4.2	单元矩阵组合为全域矩阵的对号入座累加方法	47
12.4.3	单元矢量组合为全域矢量的对号入座累加填充	49
12.5	有耗介质二维 TM 波电场的矩阵方程	50
12.6	Dirichlet 边界条件的强加方法	52
<b>第 13 章 时域矩阵方程离散的 Newmark 方法</b>		<b>54</b>
13.1	基于前两步递推的 Newmark- $\beta\gamma$ 方法	54
13.2	基于前一步递推的 Newmark 方法	56
13.3	Newmark- $\beta$ 方法	57
13.4	有限元矩阵方程的求解	58
<b>第 14 章 基于结点基函数的一维和二维 FETD</b>		<b>59</b>
14.1	一维 FETD	59
14.1.1	弱解形式	59
14.1.2	有限元矩阵方程	60
14.1.3	全域矩阵和全域矢量的组合	62
14.2	面电流辐射	63
14.2.1	面电流的加入和单向行波辐射	63
14.2.2	算例	64
14.3	二维 TM 波线电流辐射和散射	66
14.3.1	线电流辐射	66
14.3.2	近场分布显示和 FETD 数据处理	68
14.3.3	线电流辐射与散射算例	68
14.4	二维 TE 波线磁流辐射	71
<b>第 15 章 平面波加入方法和近场-远场外推</b>		<b>72</b>
15.1	一维 FETD 总场边界加源方法	72
15.1.1	弱解形式	72
15.1.2	有限元矩阵方程	74
15.1.3	一维算例	78
15.2	二维 FETD 总场边界加源方法	83
15.2.1	弱解形式	83
15.2.2	有限元矩阵方程	86

15.2.3	激励源矢量中全域矩阵 $[M_s]$ 和 $[K_s]$ 的组合	90
15.2.4	平面波与散射算例	92
15.3	二维 FETD 总场区域加源方法	94
15.3.1	弱解形式	94
15.3.2	有限元矩阵方程	95
15.3.3	平面波与散射算例	96
15.4	二维 TM 波时谐场近场-远场外推	98
15.4.1	远区场公式	98
15.4.2	外推边界面上的等效电磁流	98
15.4.3	外推边界上棱边积分的解析结果	101
15.4.4	TM 外推算例	103
15.5	二维 TE 波时谐场近场-远场外推	106
15.5.1	外推边界面上的等效电磁流	106
15.5.2	TE 外推算例	108
<b>第 16 章</b>	<b>棱边基函数</b>	109
16.1	二维矩形单元	109
16.1.1	矩形单元棱边基函数	109
16.1.2	基函数单元积分公式	111
16.2	二维三角形单元	112
16.2.1	三角形单元棱边基函数	112
16.2.2	基函数单元积分公式	118
16.3	三维矩形块单元	123
16.3.1	矩形块单元棱边基函数	123
16.3.2	基函数单元积分公式	128
16.4	三维四面体单元	132
16.4.1	四面体单元棱边基函数	132
16.4.2	基函数单元积分公式	135
<b>第 17 章</b>	<b>基于棱边基函数的二维 TE 波 FETD</b>	139
17.1	有耗介质二维 TE 波电场波动方程及其弱解形式	139
17.2	有限元矩阵方程	141
17.3	全域矩阵和全域矢量的组合	145
17.3.1	二单元区域简单例子	145
17.3.2	单元矩阵到全域矩阵的组合	148
17.3.3	单元矢量到全域矢量的组合	151
17.4	二维线磁流 TE 波辐射和散射	152
17.4.1	线磁流的激励源矢量	152
17.4.2	TE 波近场分布显示及线磁流辐射算例	154
17.4.3	线磁流 TE 波照射二维柱体散射	157
<b>第 18 章</b>	<b>TE 平面波的加入和近场-远场外推</b>	159
18.1	总场-散射场区的弱解形式	159
18.2	总场区域加源方法	161
18.2.1	有限元矩阵方程	161

18.2.2	激励源矢量中矩阵 $[M_s]$ 和 $[K_s]$ 的组合	165
18.2.3	平面波加入和散射算例	167
18.3	总场边界加源方法	171
18.3.1	弱解形式和有限元矩阵方程	171
18.3.2	激励源矢量的讨论	174
18.3.3	平面波加入和散射算例	175
18.4	二维 TE 波时谐场近场-远场外推	177
18.4.1	外推边界面上的等效电磁流	177
18.4.2	算例	179
<b>第 19 章 基于棱边基函数的三维 FETD</b>		182
19.1	三维矢量波动方程及其矩阵方程	182
19.1.1	矢量波动方程及其弱解形式与矩阵方程	182
19.1.2	表面三角形单元矩阵分量的计算	185
19.1.3	基于矩形块的结构性四面体单元	187
19.1.4	电偶极子辐射算例	188
19.2	平面波加入的总场区域加源方法	190
19.2.1	弱解形式和矩阵方程	190
19.2.2	激励源矢量中矩阵 $[M_s]$ 和 $[K_s]$ 的组合	194
19.2.3	算例	195
19.3	三维时谐场近场-远场外推	196
19.3.1	外推边界面上的等效电磁流	196
19.3.2	远区电磁场	198
19.3.3	电流矩和磁流矩的直角分量	198
19.3.4	算例	199
19.4	三维瞬态场近场-远场外推	200
19.4.1	外推边界面上的等效电磁流和远区场	200
19.4.2	推迟势公式的直角分量和投盒子方法	201
19.4.3	算例	203
19.5	PML	203
19.5.1	UPML 频域波动方程及其弱解形式与矩阵方程	204
19.5.2	时域矩阵方程	207
<b>附录 C 分部积分公式和 Green 定理</b>		208
<b>附录 D 一维 FETD 程序</b>		210
<b>FETD 参考文献</b>		217
<b>索引</b>		219

## 第三部分

---

### 时域有限元(FETD)方法

有限元方法(FEM)是从支配方程和边界条件出发将计算区域划分为多个单元后导出矩阵方程并求解的方法。Turner 和 Clough(1956)在处理弹性力学问题时提出这一数值方法。Silvester(1969)首次将 FEM 应用于微波工程。有限元方程的推导有两种途径：其一是变分(或称 Ritz)方法，其二是加权余量(或称 Galerkin)方法。变分途径是寻找一个适当泛函，它的极小值对应于问题的支配方程和边界条件；通过泛函的基函数展开获得矩阵方程。加权余量途径是通过余量加权寻找支配方程和边界条件的相应弱解形式，运用基函数展开获得矩阵方程。20 世纪 80 年代发展了电磁学的时域有限元(FETD)方法。本部分讨论基于结点基函数的标量 FETD 和基于棱边基函数的矢量 FETD，两者都采用 Galerkin 加权余量分析途径，应用有限元进行空间离散，再采用 Newmark 方法进行时间离散获得时域步进公式，并讨论了平面波加入和近场-远场外推方法。





## 第10章

## 电磁场波动方程边值问题及其弱解形式

本章介绍非均匀介质中电磁场波动方程、边界条件和截断边界处的吸收边界条件,以及将微分方程边值问题转化为积分表述的弱解形式。



## 10.1 电磁场矢量波动方程

## 10.1.1 无耗介质情形

Maxwell 方程为

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} \end{cases} \quad (10-1)$$

无耗介质的本构关系为

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \end{cases} \quad (10-2)$$

将式(10-2)代入式(10-1),得

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{0} \\ \nabla \times \mathbf{H} - \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J} \end{cases} \quad (10-3)$$

设介质  $\epsilon, \mu$  为非均匀,由式(10-3)可得电场和磁场的波动方程为

$$\begin{cases} \nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \\ \nabla \times \left( \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \mathbf{H} \right) + \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \nabla \times \left( \frac{1}{\epsilon} \mathbf{J} \right) \end{cases} \quad (10-4)$$

其中,  $\mathbf{J}$  是外加电流。在无源区域,外加电流  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ , 式(10-4)变为

$$\begin{cases} \nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \\ \nabla \times \left( \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \mathbf{H} \right) + \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (10-5)$$

可见对于无耗介质,电场和磁场波动方程式(10-4)和式(10-5)中无  $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{E}$  之间的耦合。