线性代数

xianxing daishu

江 龙 魏 兵 主编

中国矿业大学出版社

线性代数

江 龙 魏 兵 主编

中国矿业大学出版社

图书在版编目(C I P)数据

线性代数/江龙,魏兵主编.—徐州:中国矿业大学出版社,2004

ISBN 7-81040-403-2

Ⅰ.线… Ⅱ.①江… ②魏… Ⅲ.线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 073759 号

书　　名	线性代数
主　　编	江　龙　魏　兵
责任编辑	姜志方
责任校对	杜锦芝
出版发行	中国矿业大学出版社 (江苏省徐州市中国矿业大学内　邮编 221008)
网　　址	http://www.cumtp.com　**E-mail**　cumtpvip@cumtp.com
排　　版	中国矿业大学出版社排版中心
印　　刷	徐州新华印刷厂
经　　销	新华书店
开　　本	787×960 1/16　**印张** 17.25　**字数** 320 千字
版次印次	2004 年 8 月第 3 版　2004 年 8 月第 1 次印刷
定　　价	19.80 元

(图书出现印装质量问题,本社负责调换)

前　言

近年来，线性代数已经成为高等院校理、工、经济管理、医、农等学科所有专业的一门重要的基础课程，已经成为培养大学生数学素质的一门基础的训练课程。其主要原因至少有二：一是随着计算机技术的迅猛发展，许多经济学、工程学、物理、化学等领域的大型的线性问题的计算成为现实，使得线性代数成为“应用最广泛的数学学科”；二是线性代数课程能引导学生进入命题性与公理化的数学领域，对培养学生的科学思维能力具有重要作用。

本书是面向高等院校工科、经济管理、医、农等专业的大学生编写的教材，前六章涵盖了工学、经济学硕士研究生入学考试有关线性代数的所有内容，而第七章是线性代数的重要组成部分。考虑到本课程内容抽象、课程教学一般安排在前三个学期以及学生的学习能力，本教材在组织内容时注重“取材合适，要求恰当，内容阐述循序渐进，富有启发性，便于自学，使学生能够掌握基本理论与基本方法，利于培养学生的数学素养”。

编者在编写过程中作了以下几方面的探索：

(1) 编写者认为线性方程组理论是线性代数理论的极其基本、极其重要的组成部分，而矩阵的初等变换是解决线性代数中很多问题的基本而有效的方法。因此本教材从一开始就引入了线性方程组与矩阵的初等变换的概念，并将线性方程组理论贯穿课程的始终，这种结构安排在内容上不免有一定的重复，但这种安排有利于突出本课程的最基本、最重要的内容，有利于学生掌握线性方程组的解法、理解线性方程组的解的存在性定理与解的结构，方便学生的学习。

(2) 矩阵是线性代数中最基本的工具，同时矩阵也是线性代数最重要的研究对象之一。本教材比较集中地介绍了矩阵理论，保持了矩阵理论的完整性。编者希望这种安排能够帮助学生系统、完整地掌握矩阵基本理论，使矩阵在后续内容中得到更多的应用，使学生自觉地使用矩阵理论解决问题成为可能。同时本教材将行列式作为矩阵的数字特征来介绍，大胆地压缩了行列式理论的篇幅，希望这种安排能够起到“削枝强干”、突出课程主要内容的作用。

(3) 比较系统地介绍了实向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的基本概念与基本理论，重视从几何角度来讲解线性关系与空间结构等概念。编者希望这种处理能帮助学生认识线性代数中很多问题的起源，使学生能够借助几何直观来理解抽象的代数概念。与

传统的线性代数教材相比，本教材在第 3 章“向量空间”、第 4 章“线性方程组解的结构”、第 6 章“二次型及其标准形”等章节明显地增加了解析几何内容。而与一些探索性的线性代数教材相比，本书仍然是“线性代数”教材，而不是“线性代数与解析几何”教材。

(4) 尽量用通俗的语言准确地叙述抽象的代数概念与定理、严格地证明定理。有时，编写者在正文中略去了一些定理或者结论的证明，原因有二：一是证明方法过于特殊，在线性代数理论中不具有代表性；二是证明过于困难。有兴趣的读者可以在附录中找到这些证明。

(5) 本书每章都配备练习题与习题以供读者练习，在某些章还配备了附录以对正文内容进行深化。读者可以根据学习要求与兴趣选做这些练习与习题或者选学附录。

本书的前六章内容适合于 40 学时左右的线性代数课程教学，正文部分(即删去附录部分)能够满足高等学校非数学专业“线性代数教学基础要求”。

本书由江龙、魏兵、李金玉、魏琦瑛编写，江龙、魏兵担任主编。其中第一、二、四章由江龙编写，第三、七章由魏兵编写，第五章由魏琦瑛编写，第六章由李金玉编写。全书由魏兵统稿、江龙审阅并定稿。

本书的编写得到了理学院、应用数学系、信息与计算科学系的大力支持，采纳了同行们提出的一些宝贵的意见与建议。在此作者向他们表示衷心的感谢。

我们编写的教材是对线性代数课程教学改革的一种探索。虽然作者付出了很多努力，但不足之处仍然难免。不当之处敬请同行与读者予以批评指正。

编者

2004 年 8 月

目　录

第一章 解线性方程组的消元法与矩阵的初等变换

线性方程组的一般理论是线性代数最基本的研究对象，它与线性代数的其他主要研究对象如矩阵理论、线性空间理论等有非常紧密的联系；同时解线性方程组的基本方法——矩阵的初等变换法（由消元法提炼而得）——也是解决线性代数中其他基本问题如判别向量组的线性相关性、求秩、求逆矩阵、求矩阵的特征值与特征向量的有效方法。我们从线性方程组的解法开始和读者一起学习与研究线性代数。

§1.1 若干典型问题

我们先来看一些线性代数中或用线性代数理论解决的典型问题。

问题 1 投资问题 总共有 30000 美元投资给三个投资公司 M_1、M_2、M_3，投资给这三个公司的（平均）年利润率分别为 12%、15%、22%。投资者投资目标是（平均）年总利润为 6000 美元，投资者要求投给公司 M_2 的钱是投给公司 M_1 的 2 倍。为了达到这个投资目标与要求，应当投资每个公司各多少美元？

设投资于公司 M_1、M_2、M_3 的钱分别为 x_1、x_2、x_3 美元。则由已知条件得线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 30000 \\ \dfrac{12}{100}x_1 + \dfrac{15}{100}x_2 + \dfrac{22}{100}x_3 = 6000 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

解之，得：$x_1=2500$，$x_2=5000$，$x_3=22500$。

问题 2 线性方程组的一般理论 设有 m 个方程、n 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{I}$$

问：(2.1)如何判别线性方程组(Ⅰ)是否有解？若有解，解是否惟一？

(2.2)如何解线性方程组(Ⅰ)？

(2.3)如何判别线性方程组(Ⅰ)中有没有多余的方程？如果有，有多少个多余的方程？如何去掉多余的方程？

(2.4)当线性方程组(Ⅰ)有无穷多解时，能否用(Ⅰ)的有限个解将(Ⅰ)的所有解表示出来？

在§1.3，我们将利用矩阵的初等行变换给出线性方程组(Ⅰ)的解法并初步回答问题(2.1)、(2.2)；在第二章，我们将利用矩阵的秩解决问题(2.1)；在第三章，我们将利用向量组的线性相关性回答问题(2.3)；在第四章，我们将利用向量空间理论研究解的结构并回答问题(2.4)。

问题3　航线连接问题　考虑为8个城市$c_1,c_2,\cdots,c_8$服务的一家航空公司。如果从城市c_i到c_j有直接的航线，则(i,j)元记为1，如果从c_i到c_j没有直接航线，则(i,j)元记为0。下面是航空公司的航线连接表：

城市 \ (i,j)元 \ 城市	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8
c_1	0	1	0	0	0	0	0	1
c_2	0	0	0	0	0	1	0	0
c_3	1	0	0	1	0	0	0	0
c_4	0	0	0	0	0	0	1	0
c_5	0	0	1	0	0	0	0	0
c_6	0	0	0	1	0	0	0	0
c_7	0	0	0	0	0	0	0	1
c_8	1	0	0	0	1	0	0	0

问：(3.1)从c_4到c_8用恰好2个航班，这可能吗？

(3.2)有多少种方式能够用恰好3个航班从c_8到达c_1？

(3.3)在每一对城市之间，用3个或较少的航班旅行，这可能吗？

(3.4)在每一对城市之间，用6个或较少的航班旅行，这可能吗？

对问题(3.1)与(3.2)，读者可以通过作图(每个城市用点表示，如果城市从c_i到c_j有直接的航线，则c_i到c_j用线连接，并标上方向)很快予以回答；对问题(3.3)与(3.4)，我们通过计算方阵的幂(第二章)也可以很快予以回答。

问题4　Fibonacci数列　意大利数学家Fibonacci于1202年提出了兔子繁殖问题：设有1对兔子出生2个月后生下1对小兔，以后每个月生下1对；新生

的小兔也是这样繁殖后代。假定每生下1对小兔必为雌雄异性且均无死亡，问：从1对新生兔开始，以后每个月共有多少对兔？

令 u_n 代表第 n 个月的兔子对数，则有：

$$u_0 = 1,\quad u_1 = 1,\quad u_2 = 2,\quad u_3 = 3,\quad u_4 = 5,\quad u_5 = 8,\cdots$$

这个数列称为 Fibonacci 数列，它有很多奇妙的性质。Fibonacci 数列满足递推公式：

$$u_{n+2} = u_n + u_{n+1},\ n = 0,1,2,\cdots$$

你知道吗？上述递推公式可以用矩阵表示，利用矩阵的对角化方法（第五章），可以得到 u_n 的显式表示公式：

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

问题5 二次曲面的图形 在空间直角坐标系下，如下二次方程

$$2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 8yz = 1$$

所代表的曲面是椭球吗？如果是，能求出其体积吗？

利用二次型理论（第六章），我们将证明该曲面确实是一个椭球，其体积为 $\dfrac{4}{3\sqrt{10}}\pi$。

§1.2 矩阵及其初等变换

在本节与下一节，我们将利用矩阵及其初等变换初步讨论关于线性方程组的如下三个问题：线性方程组（Ⅰ）何时有解？若有解，解何时惟一？有解时，如何求出其所有解。

定义1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为一个 m 行 n 列矩阵，简称为 $m\times n$ 矩阵，简记为 $(a_{ij})_{m\times n}$ 或 (a_{ij})。

矩阵通常用大写英文字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 等表示。若矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，则称数 a_{ij} 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素，简称为 (i,j) 元。

元素全为实数的矩阵称为实矩阵，元素全为复数的矩阵称为复矩阵。

当 $m=n$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵或 n 阶矩阵。仅有一行的矩阵称为行矩阵，仅有一列的矩阵称为列矩阵。

例 1 设$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 7\\3 & -4 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3 & 5\\9 & 8\end{bmatrix}$，则$A$是一个$2\times3$矩阵，$B$是一个2阶方阵，$A$的第2行、第3列元素是1。

例 2 设甲、乙两家银行分别向Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三个企业发放贷款(单位：万元)。设每笔贷款的情况用矩阵A表示，各家银行的贷款年利率用矩阵B表示。以下矩阵A,B清楚地表示了贷款与利率的情况。

$$A=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{甲} & \text{乙}\end{array}\\ \begin{bmatrix}30 & 40\\20 & 30\\40 & 35\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\ \mathrm{I}\\ \mathrm{II}\\ \mathrm{III}\end{array},\quad B=\begin{array}{c}\text{年利率}\\ \begin{bmatrix}0.11\\0.12\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\ \text{甲}\\ \text{乙}\end{array}$$

例 3 (续§1.1问题3) 航线连接问题之**邻接矩阵**。设8阶方阵$A=(a_{ij})_{8\times8}$为

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1,\text{如果从城市 } c_i \text{ 到 } c_j \text{ 有直接航班；}\\0,\text{如果从城市 } c_i \text{ 到 } c_j \text{ 无直接航班。}\end{cases}$$

邻接矩阵A完整地反映了城市之间的航线情况。

下列特殊矩阵经常使用：

(1) 元素全为0的$m\times n$矩阵称为**零矩阵**，记作$O_{m\times n}$或O；

(2) 如下形状的n阶方阵(矩阵中未写出的元素全为零)

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

称为n阶**对角阵**，简记为$\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$。

例如矩阵$\Lambda=\mathrm{diag}(-5,0,3)$表示矩阵$=\begin{bmatrix}-5 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$。

(3) 对角线上元素全为 1 的 n 阶对角阵，即形如

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

的 n 阶方阵，称为 n 阶**单位矩阵**，记作 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$。

定义 2 若两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 的元素都对应相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}\quad(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$。

定义 3 下列三种变换称为矩阵的**初等行变换**：

(1) 对调两行（对调第 i 行与第 j 行，记作 $r_i\leftrightarrow r_j$）；

(2) 以数 $k(k\neq 0)$ 乘某行中的所有元素（第 i 行乘以 k，记作 $r_i\times k$）；

(3) 以数 k 乘某行的每个元素加到另一行的对应元素上去（用数 k 乘第 j 行加到第 i 行去，记作 r_i+kr_j）。

将定义 3 中的“行”换成“列”，就得到矩阵的初等列变换的定义，将“r”换成“c”，就得到列变换的表示方法。

矩阵的初等行变换与初等列变换，统称为**矩阵的初等变换**。

一个矩阵经过初等行变换能化为一个什么样的形状比较简单的矩阵呢？为了回答这个问题，我们引入阶梯形矩阵与行最简形矩阵的概念。

定义 4 设 $m\times n$ 非零矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的前 $r(1\leqslant r\leqslant m)$ 行均不全为零，其余行（如果存在的话）全为零，设 $\boldsymbol{A}$ 的第 k 行的第一个非零元素 a_{kj_k} 所在列的列数 $j_k(k=1,2,\cdots,r)$ 满足

$$j_1<j_2<\cdots<j_r,$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**阶梯形矩阵**。

观察下列矩阵（注意虚线画出的“阶梯”）

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

容易看出 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是阶梯形矩阵，并且这三个阶梯形矩阵（事实上阶梯形矩阵基本上）都具有如下 3 个特点：

（Ⅰ）每个“阶梯”上仅有一行；

（Ⅱ）它的任一行从第一个元素起到该行的第一个非零元素的左下方的每个元素都为零。

（Ⅲ）如果某行的元素全为0，则该行下面的元素也全为0。

再观察阶梯形矩阵 $\boldsymbol{C}$，它还有如下特点：

（Ⅳ）每个非零行上的第一个非零元素都是1，并且这些1所在列的其他元素均为零。

具有特点（Ⅳ）的阶梯形矩阵称为**行最简形矩阵**。

【注1】 为叙述问题的方便，零矩阵也常常被称为阶梯形矩阵或行最简形矩阵。

定理1.1.1 每个矩阵都可以经过有限次初等行变换化为行阶梯形矩阵，进而化为行最简形矩阵。

我们通过一个例子来说明这个定理的证明过程以及如何用初等行变换将矩阵化为行阶梯形矩阵。

例4 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 6 & -2\\ 1 & -2 & -1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 0 & 4 & 3\\ 3 & 3 & 3 & 6 & 4\end{bmatrix},$$

试用初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为行阶梯形，进而化为行最简阶梯形。

解 $$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2\\ 2 & -1 & 0 & 4 & 3\\ 3 & 3 & 3 & 6 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{r_3-2r_1}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2\\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1\\ 0 & 9 & 6 & 3 & -2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2\\ 0 & 9 & 6 & 3 & -2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4-3r_2}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4+\frac{1}{2}r_3}\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\triangleq\boldsymbol{B}$$

（阶梯形矩阵）

对 $\boldsymbol{B}$ 继续使用初等行变换，将 $\boldsymbol{B}$ 化为行最简形矩阵：

$$B \xrightarrow[\substack{r_2-2r_3\\ r_1-r_3}]{\frac{1}{6}r_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 3 & 2 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1+2r_2]{r_2\times\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{19}{9} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从上面的变换过程读者还可看出：

矩阵的初等行(列)变换是可逆的，即如果 $\boldsymbol{A}$ 经过一次(或有限次)初等行(列)变换能变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}$ 经过一次(或有限次)初等行(列)变换也可变成矩阵 $\boldsymbol{A}$。

以行变换为例：

$$\boldsymbol{A} \underset{r_i\leftrightarrow r_j}{\overset{r_i\leftrightarrow r_j}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{A} \underset{r_i\times\frac{1}{k}}{\overset{r_i\times k(k\neq 0)}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{A} \underset{r_j-kr_i}{\overset{r_j+kr_i}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{B}$$

定义 5　如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换能变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记作 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$。

利用初等变换的可逆性，我们立即知道矩阵的等价具有如下性质：

性质　(1) $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{A}$　(反身性)；

(2) 如果 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{A}$　(对称性)；

(3) 如果 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{C}$　(传递性)。

练习 1.2

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 3×4 矩阵，其第 i 行第 j 列元素为 $2i-j(i=1,2,3;j=1,2,3,4)$。写出矩阵 $\boldsymbol{A}$。

2. 所有的零矩阵都相等吗？为什么？

3. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & s \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & t & 7 \end{bmatrix}$ 相等，求 s,t。

4. 用初等行变换将下列矩阵化为阶梯形，进而化为行最简形矩阵。

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

5. 设 $\boldsymbol{T}$ 是一个 5×3 的行最简形矩阵。如果 $\boldsymbol{T}$ 的“阶梯数”(亦即非零行行数)为 3，试写出这个行最简形矩阵 $\boldsymbol{T}$。

6. 设 $\boldsymbol{T}$ 是一个 $m\times n$ 的行最简形矩阵，将 $\boldsymbol{T}$ 的最后一列去掉得到的矩阵记为 $\boldsymbol{T}_0$，设 $\boldsymbol{T}_0$ 有 r 个非零行，$\boldsymbol{T}$ 有 s 个非零行。

(1) 问 $\boldsymbol{T}_0$ 是不是行最简形矩阵？

(2) s 比 r 最多大多少？

(3) 如果 $s=r$，那么 $\boldsymbol{T}$ 的最后一个非零行是什么样的？

(4) 如果 $s=r+1$，那么 $\boldsymbol{T}$ 的最后一个非零行具有什么样的特点？

(5) 如果 $m=5,n=4,s=r=3$，你能写出 $\boldsymbol{T}$ 的前 3 列吗？此时 $\boldsymbol{T}$ 中有几个元素的值尚不能确定？

§1.3 解线性方程组的消元法

在初等代数中已经介绍了用加减消元法、代入消元法解二元、三元一次线性方程组。现在我们讨论 m 个方程 n 个未知量的线性方程组的求解问题。

设有 n 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{Ⅰ}$$

当 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为 0 时，称(Ⅰ)为**非齐次线性方程组**。若存在 $x_1=c_1,x_2=c_2,\cdots,x_n=c_n$ 使(Ⅰ)每个方程成为恒等式，则称 $x_1=c_1,x_2=c_2,\cdots,x_n=c_n$ 是(Ⅰ)的一个**解**，否则称(Ⅰ)**无解**。

当(Ⅰ)的右端常数全为 0 时，线性方程组(Ⅰ)称为**齐次线性方程组**。

对于给定的方程组(Ⅰ)，把右端常数全换为 0 得到的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \tag{Ⅱ}$$

称为(Ⅰ)**导出的齐次线性方程组**。

由线性方程组(Ⅰ)的系数组成的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为方程组(Ⅰ)的**系数矩阵**。由方程组(Ⅰ)的系数与常数项组成的矩阵

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

称为方程组(Ⅰ)的**增广矩阵**。显然,线性方程组与它的增广矩阵是一一对应的。

下面通过具体例子来说明用消元法解线性方程组的求解过程。在求解过程中我们将使用**方程组的三种初等变换**:

(1) 两个方程互换位置;

(2) 用一个非零数 k 乘某个方程;

(3) 某个方程的常数倍加到另一个方程上去。

方程组的初等变换将方程组变为一个与它同解的方程组。

例 1 (续§1.1 问题 1——**投资问题**)解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=30000 \\ \frac{12}{100}x_1+\frac{15}{100}x_2+\frac{22}{100}x_3=6000 \\ 2x_1-x_2=0 \end{cases}$$

解 为便于观察,我们列表对照解线性方程组的消元过程与其增广矩阵化阶梯形的对应的变化情况。以下用①、②、③分别代表第一、第二、第三个方程。

解线性方程组的消元过程	增广矩阵 $\overline{A}$ 的初等行变换
$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=30000 \\ \frac{12}{100}x_1+\frac{15}{100}x_2+\frac{22}{100}x_3=6000 \\ 2x_1-x_2=0 \end{cases}$	$\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 30000 \\ \frac{12}{100} & \frac{15}{100} & \frac{22}{100} & 6000 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
②×100,得	$\downarrow r_2\times 100$
$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=30000 \\ 12x_1+15x_2+22x_3=600000 \\ 2x_1-x_2=0 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 30000 \\ 12 & 15 & 22 & 600000 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
②−①×12,③−①×2,得	$r_2-12r_1 \downarrow r_3-2r_1$
$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=30000 \\ 3x_2+10x_3=240000 \\ -3x_2-2x_3=-60000 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 30000 \\ 0 & 3 & 10 & 240000 \\ 0 & -3 & -2 & -60000 \end{bmatrix}$
③+②,得	$\downarrow r_3+r_2$

续表

解线性方程组的消元过程	增广矩阵 $\overline{A}$ 的初等行变换
$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=30000 \\ 3x_2+10x_3=240000 \\ 8x_3=180000 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 30000 \\ 0 & 3 & 10 & 240000 \\ 0 & 0 & 8 & 180000 \end{bmatrix}$
（消元过程结束）	（$\overline{A}$ 化为阶梯形）
②－③$\times\frac{10}{8}$，①－③$\times\frac{1}{8}$，③$\times\frac{1}{8}$得	$r_2-\frac{10}{8}r_3, r_1-\frac{1}{8}r_3 \Big\downarrow \frac{1}{8}r_3$
$\begin{cases} x_1+x_2=7500 \\ 3x_2=15000 \\ x_3=22500 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 7500 \\ 0 & 3 & 0 & 15000 \\ 0 & 0 & 1 & 22500 \end{bmatrix}$
①－②$\times\frac{1}{3}$，②$\times\frac{1}{3}$得	$r_1-\frac{1}{3}r_2 \big\downarrow \frac{1}{3}r_2$
$\begin{cases} x_1=2500 \\ x_2=5000 \\ x_3=22500 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2500 \\ 0 & 1 & 0 & 5000 \\ 0 & 0 & 1 & 22500 \end{bmatrix}$
（回代过程结束）	（$\overline{A}$ 化成行最简形）

所以原方程组的解为：$x_1=2500$，$x_2=5000$，$x_3=22500$。

从本例可以看出：方程组的初等变换可以用它的增广矩阵的相应的初等行变换来表示，“消元过程”实际上就是用初等行变换将增广矩阵化为阶梯形矩阵的过程，而“回代过程”就是将阶梯形矩阵继续化为行最简形矩阵的过程。

利用矩阵的初等行变换解线性方程组的步骤是：

线性方程组⇒增广矩阵 $\overline{A}\xrightarrow{\text{行变换}}$行最简形 $\boldsymbol{T}$⇒写出以 $\boldsymbol{T}$ 为增广矩阵的同解方程组⇒判别是否有解？$\xrightarrow{\text{有解时}}$解此同解方程组，得解。

例 2 解线性方程组

$$\begin{cases} -3x_2-2x_3=2 \\ x_1+x_2+2x_3=1 \\ 4x_1+x_2+6x_3=6 \end{cases}$$

解 对方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 进行初等行变换

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & -3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 6 \end{array}\right]\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 6 \end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-4r_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\times\left(-\frac{1}{3}\right)}$$